МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Г. Г. ШВАЧИЧ, В. С. КОНОВАЛЕНКОВ, Т. М. ЗАБОРОВА

ВВЕДЕННЯ У МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник. Протокол № 1 від 29.01.13

Дніпропетровськ НМетАУ 2013

УДК 517.3

Швачич Г.Г., Коноваленков В.С., Заборова Т.М. Введення у математичний аналіз: Навчальний посібник. - Дніпропетровськь: НМетАУ, 2013. – 32 с.

Містить теоретичні відомості, велику кількість прикладів з детальними поясненнями, перелік літератури, рекомендованої для вивчення теми «Введення у математичний аналіз», яка є вступним розділом до диференціального й інтегрального числення, наведені варіанти завдань для індивідуальної роботи.

Призначений для студентів усіх напрямів.

Іл. 15. Бібліогр.: 15 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск Г. Г. Швачич, д-р техн. наук, проф.

Рецензенти: Ю.Н.Головко, канд. фіз.- мат. наук, доц. (НГУ)
Ю.В.Сохач, канд. фіз.- мат. наук, доц. (ДГУ)

ЗМІСТ

1. Основні поняття математичного аналізу. Змінна величина. Функція…………4

2. Способи завдання функції……………………………………………….....4

3. Область визначення функції…………………………………………………..5

4. Основні елементарні функції…………………………………………..……6

5. Границя змінної величини. Нескінченно велика змінна величина……………6

6. Границя функції……………………………………………………………..9

7. Функція, що прямує до нескінченності. Обмежені функції……………….……11

8. Нескінченно малі та їх основні властивості……………………………..13

9. Основні теореми про границі……………………………………………..……..15

10. Порівняння нескінченно малих величин………………………………..16

11. Неперервна функція……………………………………………………....16

12. Невизначеності вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \left(\frac{0}{0}\right), (0\cdot\infty), (\infty-\infty)$ ………………………….....19

13. Перша важлива границя…………………………………………….....22

14. Друга важлива границя………………………………………………..24

15. Деякі елементи дослідження функції………………………………………27

15. 1. Нулі функції. Знак функції……………………………………………27

15. 2. Парність та непарність функції………………………………………..28

15. 3. Періодичність функції…………………………………………………28

15. 4. Зростання, спадання (монотонність) функції………………..........…...29

16. Завдання для самостійного вирішення …..…………………………….......29

ЛІТЕРАТУРА……………………..……………………………………………...........32

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ЗМІННА ВЕЛИЧИНА. ФУНКЦІЯ

У математичному аналізі одне з центральних місць займає поняття змінної величини. При вимірюванні таких фізичних величин, як час, довжина, площа, об'єм, швидкість, тиск, температура та т.ін. визначаються їх числові значення. Математика має справу з величинами, відволікаючись від їх конкретного вмісту. У подальшому, кажучи про величини, ми будемо мати на увазі їх числові значення.

Змінною величиною називається величина, яка приймає різні числові значення. Величина, числові значення якої не змінюються, називається ***сталою величиною***. Традиційно змінні величини позначаються буквами $x, y, z, \ldots,$ а сталі – буквами $a, b, c, \ldots$ і т. і.

Зауваження. У математиці стала величина часто розглядається як частинний випадок змінної, у якої всі числові значення однакові.

> ***Визначення.*** *Якщо за деяким правилом або законом кожному значенню деякої змінної x, що належить до множини X, відповідає одне або декілька значень іншої змінної y, що належить до множини Y, тоді кажуть, що на множині X задана* **функція** *і записують це у вигляді* $y = f(x)$.

При цьому змінна величина x називається *аргументом*, $f(x)$ - *функцією.*

Також кажуть, що величина *y залежить* від величини *x,* тому *аргумент* називають *незалежною,* а функцію – *залежною змінною.*

2. СПОСОБИ ЗАВДАННЯ ФУНКЦІЇ

а) табличний спосіб. Наприклад, таблиці логарифмів, квадратних коренів тощо;

б) графічний спосіб полягає у побудові лінії (графіка), де абсциси відображають значення аргументу, а ординати – відповідні значення функції;

в) аналітичний спосіб полягає у завданні функції однією, або декількома формулами. Наприклад, функціональна залежність між радіусом кола r та його довжиною S задається формулою $S = 2\pi r$.

Слід вказати три основні способи аналітичного завдання функцій. Це:

1) $y = f(x)$ - функція задана явно;

2) $F(x, y) = 0$ - функція задана неявно;

3) $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ - функція задана параметрично. t - параметр (змінна величина, яка для кожної конкретної функції змінюється на деякому проміжку). При цьому, коли параметр t пробігає всі свої значення, відповідні

точки з координатами (x, y) описують деяку лінію у декартової прямокутної системі координат.

3. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Сукупність усіх значень аргументу *x*, при яких дана функція має сенс (тобто визначена), називається областю визначення функції.

Наприклад, функція $y=\sqrt{x-1}$ визначена для всіх $x-1\geq 0,$ (або $x\geq 1$), функція $y=ax+b$ визначена для всіх $x\in(-\infty,+\infty).$

Звернемось до прикладів, присвячених знаходженню області визначення для деяких складних функцій.

Приклад 1. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}.$

Оскільки підкореневий вираз повинен бути, по-перше, невід'ємним, а, по-друге, відмінним від нуля, то область визначення отримаємо, розв'язуючи наступну квадратну нерівність $x^2-3x+2>0.$ Застосуємо метод інтервалів, що є добре знайомий з шкільного курсу математики. Представимо ліву частину нерівності у вигляді добутку лінійних множників $(x-1)\cdot(x-2)>0,$ де числа 1 і 2 – корені квадратного рівняння $x^2-3x+2=0.$ Відомо, що квадратний тричлен зберігає знак на проміжках між своїми сусідніми нулями. Виберемо по одній довільній точці відповідно на проміжках $(-\infty,1),[1,2]\ i\ (2,+\infty).$ Наприклад, $x=0$ на першому проміжку, $x = 1{,}5$ на другому і $x = 3$ на третьому. Легко бачити, що для всіх $x\in[1,2]$ виконується нерівність $x^2-3x+2\leq 0.$ Таким чином, шуканою областю визначення буде об'єднання інтервалів $(-\infty,1)\ i\ (2,+\infty),$ де $x^2-3x+2>0.$

Приклад 2. $y=\arcsin\dfrac{x}{4}.$

Як відомо, $\arcsin\dfrac{x}{4}$ слід розуміти, як дугу, синус якої дорівнює $\dfrac{x}{4}$. Але оскільки модуль синуса будь-якого кута не перевищує одиницю, отримаємо нерівність $-1\leq\dfrac{x}{4}\leq 1.$ Звідки маємо шукану область визначення: $-4\leq x\leq 4.$

Приклад 3. $y=\lg\sin x$.

Оскільки логарифмічна функція визначена тільки для строго додатних значень аргументу, отримуємо умову: $\sin x>0.$ Тобто шукана область визначення є розв'язком останньої тригонометричної нерівності. Знову користуємось відомими з шкільного курсу результатами. Отже, одержуємо:

$$2\pi k<x<(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Приклад 4. $y = \arccos\dfrac{2}{2+\sin x}$.

Розв’язання прикладу базується на тому, що дана функція існує, якщо має місце нерівність $-1 \le \dfrac{2}{2+\sin x} \le 1.$ Після елементарних перетворень одержуємо нерівність: $\sin x \ge 0.$ Звідки $2\pi k \le x \le (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

1) *Степенева* функція $y = x^{\alpha}$, де α – стале постійне число.
2) *Показникова* функція $y = a^{x}$, де $a > 0, a \ne 1$ (основа степеня).
3) *Логарифмічна* функція $y = \log_a x,$ де $a > 0, a \ne 1$(основа логарифма).
4) *Тригонометричні* функції
   $y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx, y = scx, y = \csc x.$
5) *Кругові (обернені тригонометричні функції)*
   $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx, y = arcctgx, y = ar\csc x, y = arc\csc x.$

Усі ці функції детально вивчались у шкільному курсі математики. Відзначимо при цьому, що функції, які можна одержати з елементарних шляхом їх суперпозиції, а також при виконанні чотирьох дій арифметики над ними, також вважаються елементарними. Наприклад, функція $y = \lg\sin\sqrt[3]{1-3\sin x}$ є елементарна.

Функції, яки не можна виразити вказаним чином, не є елементарними. Наприклад, функція $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ не є елементарною, тому що її не можна виразити обмеженою кількістю елементарних дій.

5. ГРАНИЦЯ ЗМІННОЇ ВЕЛИЧИНИ. НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКА ЗМІННА ВЕЛИЧИНА

У подальшому поняття границі змінної буде відігравати фундаментальну роль, оскільки з ним безпосередньо пов'язані основні поняття математичного аналізу – похідна, інтеграл та інші.

Визначення 1. *Стале число a називається границею змінної величини x, якщо для будь-якого наперед заданого, скільки завгодно малого додатного числа ε можна вказати таке значення змінної x, що всі подальші значення змінної будуть задовольняти нерівності $|x-a| < \varepsilon.$*

Якщо число a є границя змінної величини x, то кажуть, що x прямує до границі a, і пишуть $x \to a,$ або $\lim x = a$ («$\lim$» є абревіатура від латинського слова *limes* – границя).

У геометричних термінах визначення границі може бути сформульовано наступним чином. Стале число a є границя змінної, якщо для будь-якого наперед заданого скільки завгодно малого околу з центром у точці a

і радіусом ε знайдеться таке значення x, що всі точки, що відповідають подальшим значенням змінної, будуть знаходитись у цьому околі (рис.5.1).

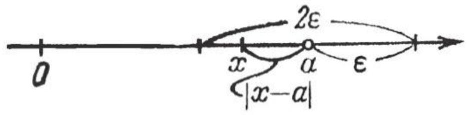


Рис. 5.1

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Змінна величина послідовно приймає значення

$$x_1 = 1+1,\ x_2 = 1+\frac{1}{2},\ x_3 = 1+\frac{1}{3},\dots,x_n = 1+\frac{1}{n},\dots.$$

Доведемо, що змінна величина має границю, що дорівнює одиниці. Маємо

$$|x_n - 1| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right| = \frac{1}{n}.$$

Для будь-якого ε всі значення змінної, починаючи з номера n, де $\frac{1}{n} < \varepsilon,$ або $n > \frac{1}{\varepsilon}$, будуть задовольняти нерівності $|x_n - 1| < \varepsilon,$ що і потрібно було довести. Зауважимо, що ця змінна прямує до границі, убуваючи.

Приклад 2. Змінна величина послідовно приймає значення

$$x_1 = 1-\frac{1}{2},\ x_2 = 1+\frac{1}{2^2},\ x_3 = 1-\frac{1}{2^3},\ x_4 = 1+\frac{1}{2^4},\dots,x_n = 1+(-1)^n\frac{1}{2^n},\dots$$

Границя цієї змінної величини дорівнює одиниці. Дійсно,

$$|x_n - 1| = \left|\left(1+(-1)^n/2^n\right)-1\right| = 1/2^n.$$

Для будь-якого ε, починаючи з номера n, що задовольняє співвідношенню $\frac{1}{2^n} < \varepsilon,$ з якого випливає $2^n > 1/\varepsilon, n\lg 2 > \lg(1/\varepsilon),$ або $n > \frac{\lg(1/\varepsilon)}{\lg 2}$, всі наступні значення x будуть задовольняти співвідношенню $|x_n - 1| < \varepsilon.$ Зауважимо, що тут значення змінної величини то більше, то менше границі, тобто змінна величина прямує до границі, «коливаючись» навколо її.

Зауваження 1. Як відомо, сталу величину часто розглядають як змінну величину, всі значення якої однакові: $x = c.$ Очевидно, що границя сталої буде дорівнювати самої сталої, оскільки завжди, при будь-якому ε, виконується нерівність $|x - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$

Зауваження 2. З визначення границі випливає, що змінна величина не може мати двох границь. Дійсно, якщо $\lim x = a$ і $\lim x = b\,(a < b)$, то x повинна задовольняти одразу двом нерівностям $|x - a| < \varepsilon$ і $|x - b| < \varepsilon$ при довільному малому $\varepsilon,$ а це неможливо, якщо $\varepsilon < (b-a)/2$ (рис.5.2).

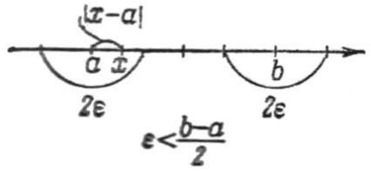


Рис. 5.2

Зауваження 3. Не слід вважати, що кожна змінна величина має границю. Нехай змінна величина приймає значення:

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1 - \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{1}{8}, \ldots, x_{2k} = 1 - \frac{1}{2^{2k}},\ x_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}, \ldots \text{ (рис.5.3).}$$

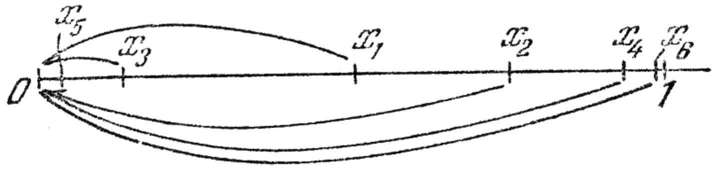


Рис. 5.3

При достатньо великих k значення x_{2k} і всі подальші значення змінної з парними номерами будуть скільки завгодно мало відрізнятись від одиниці, а подальші значення змінної з непарними номерами будуть скільки завгодно мало відрізнятись від нуля. Отже, змінна x не прямує до границі.

У визначенні границі вказано, що якщо змінна величина прямує до границі a, то a - стале число. Але поняття «прямує» використовується також для характеристики іншого способу зміни змінної величини, що видно з наступного визначення.

> ***Визначення 2.*** *Змінна x прямує до нескінченності, якщо для кожного наперед заданого додатного числа M можна вказати таке значення x, починаючи з якого всі подальші значення змінної будуть задовольняти нерівності $|x| > M$.*

Якщо змінна x прямує до нескінченності, то її називають *нескінченно великою* змінною величиною і пишуть $x \to \infty$.

Приклад 3. Змінна величина x приймає значення

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3, \ldots, x_n = (-1)^n n, \ldots$$

Це нескінченно велика змінна величина, оскільки при довільному $M > 0$ всі значення змінної, починаючи з деякого, будуть за абсолютною величиною більше M. Змінна величина x «прямує до плюс нескінченності» $x \to \infty$, якщо при довільному $M > 0$ всі подальші значення змінної, починаючи з деякого, будуть задовольняти нерівності $M < x$. Прикладом змінної величини, що прямує до плюс нескінченності, може бути змінна величина x, що приймає значення $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3, \ldots, x_n = n, \ldots$

Змінна величина прямує «до мінус нескінченності» $x \to -\infty$, якщо при довільному $M > 0$ всі подальші значення змінної, починаючи з деякого, будуть задовольняти нерівності $x<-M$. Наприклад, змінна $x,$ що приймає значення $x_1=-1, x_2=-2, \ldots, x_n=-n, \ldots,$ прямує до мінус нескінченності.

6. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Розглянемо деякі випадки зміни функції при прямуванні аргументу x до деякої границі *а* або до нескінченності.

Визначення 1. *Нехай функція* $y=f(x)$ *визначена у деякому околі точки а або у деяких точках цього околу. Функція* $y=f(x)$ *прямує до границі* $b\,(y\to b)$ *при* x *, що прямує до* $a\,(x\to a)$ *, якщо для кожного додатного числа* ε *яким би малим воно не було, можна вказати таке додатне число* δ *, яке, взагалі кажучи, залежить від* ε *, що для всіх* x *, відмінних від* a *і задовольняючих нерівності* $|x-a|<\delta,$ *має місце нерівність* $|f(x)-b|<\varepsilon.$

Традиційні позначення для границі функції виглядають так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b, \text{ або } f(x)\to b \text{ при } x\to a.$$

Якщо $f(x)\to b$ при $x\to a$, то на графіку функції $y=f(x)$ це ілюструється наступним чином (рис. 6.1): оскільки із нерівності $|x-a|<\delta$ випливає нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon,$ то це о означає , що для всіх точок *x*, віддалених від точки a не далі ніж на ε , точки *М* графіка функції $y=f(x)$ лежать у середині смуги шириною 2ε , обмеженої прямими $y=b-\varepsilon$ і $y=b+\varepsilon.$

Якщо $f(x)$ прямує до границі b_1 при прямуванні x до деякого a так, що x приймає значення, менші *а*, то пишуть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$ і називають b_1 *границею функції* $f(x)$ *в точці* a *зліва.*

Якщо $f(x)$ прямує до границі b_2 при прямуванні *x* до деякого a так, що *x* приймає значення, більші a , то пишуть $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$ і називають b_2 *границею функції* $f(x)$ *в точці* a *справа*. Замість $x\to 0+0$ і $x\to 0-0$ зазвичай пишуть $x\to +0$ *і* $x\to -0.$

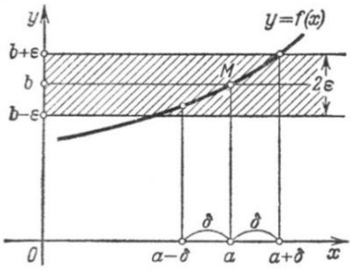


Рис. 6.1

Можна довести, що якщо границі справа і зліва існують та рівні, тобто $b_1=b_2=b,$ то b і буде границею у сенсі даного вище визначення границі у точці a. І навпаки, якщо існує границя функції b у точці a, то існують її границі у точці a зліва та справа і ці границі рівні.

Приклад 1. Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7.$ Дійсно, нехай задано довільне $\varepsilon>0$. Для того, щоб виконувалась нерівність $|(3x+1)-7|<\varepsilon,$ необхідно виконання наступних нерівностей $|3x-6|<\varepsilon,$ $|x-2|<\varepsilon/3,$ $-\dfrac{\varepsilon}{3}<x-2<\dfrac{\varepsilon}{3}.$ Таким чином, при будь-якому ε для всіх значень x, що задовольняють нерівності $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{3}=\delta,$ значення функції $3x+1$ буде відрізнятися від 7 менш, ніж на $\varepsilon.$ А це і означає, що 7 є границя функції при $x\to 2.$

Зауваження 3. Для існування границі функції при $x\to a$ не потрібно, щоб функція була визначена у точці $x=a$. При знаходженні границі розглядаються значення функції у точках, що належать околу точки a, але відмінних від a, і це положення наочно ілюструє наступний приклад.

Приклад 2. Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)/(x-2)=4.$ Тут функція $(x^2-4)/(x-2)$ не визначена при $x=2.$ Треба довести, що при довільному ε знайдеться таке δ, що буде виконуватись нерівність

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon, \tag{6.1}$$

якщо $|x-2|<\delta.$ Але при $x\neq 2$ нерівність (6. 1) еквівалентна нерівності

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}-4\right|=|(x+2)-4|<\varepsilon,$$

або
$$|x-2|<\varepsilon. \tag{6.2}$$

Таким чином, при довільному ε нерівність (6. 1) буде виконуватись, якщо буде виконуватись нерівність (6. 2) (тут $\delta=\varepsilon$). А це означає, що дана функція при $x\to 2$ має границею число 4.

Розглянемо деякі випадки змінення функції при $x\to\infty$.

Визначення 2*. Функція $f(x)$ прямує до границі b при $x\to\infty$, якщо для кожного як завгодно малого додатного числа ε можна вказати таке додатне число M, що для всіх значень x, що задовольняють нерівності $|x|>M,$ буде виконуватись нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon.$*

Приклад 3. Доведемо, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1,$ або $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1.$

Треба довести, що при довільному ε буде виконуватись нерівність

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|<\varepsilon, \tag{6.3}$$

якщо тільки $|x|>N,$ причому N визначається вибором ε. Нерівність (6.3) еквівалентна наступній нерівності: $|1/x|<\varepsilon,$ яка буде виконуватись, якщо $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}=N.$ Це означає, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1$ (рис.6.2).

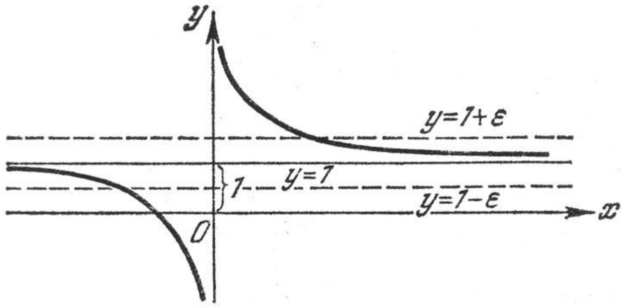


Рис. 6.2

Вважається, що вираз $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ означає, що $f(x)$ прямує до b при $x\to\infty$, а вираз $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ означає, що $f(x)$ прямує до b при $x\to-\infty$.

7. ФУНКЦІЯ, ЩО ПРЯМУЄ ДО НЕСКІНЧЕННОСТІ. ОБМЕЖЕНІ ФУНКЦІЇ

Вище розглянуто випадки, коли функція $f(x)$ прямує до деякої границі b при $x\to a$ або $x\to\infty$. Розглянемо тепер випадок, коли функція $y=f(x)$ прямує до нескінченності при деякому способі зміни аргументу.

Визначення 1. *Функція $f(x)$ прямує до нескінченності при $x\to a$, тобто є нескінченно великою величиною при $x\to a$, якщо для кожного додатного числа M, яким би великим воно не було, можна знайти таке $\delta>0$, що для всіх значень x, відмінних від a, задовольняючих умові $|x-a|<\delta$, має місце нерівність $|f(x)|>M$.*

Якщо $f(x)$ прямує до нескінченності при $x\to a$, то пишуть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, або $f(x)\to\infty$ при $x\to a$.

Якщо $f(x)$ прямує до нескінченності при $x\to a$ та при цьому приймає лише додатні або від’ємні значення, то відповідно пишуть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, або $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Приклад 1. Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)=\infty$. Дійсно, при будь-якому $M>0$ будемо мати $\left(-\frac{1}{x}\right)>M$, якщо тільки $|x|=|x-0|<1/M=\delta$. Тут $\left(-\frac{1}{x}\right)>0$ при $x<0$ та $\left(-\frac{1}{x}\right)<0$ при $x>0$ (рис. 7.1).

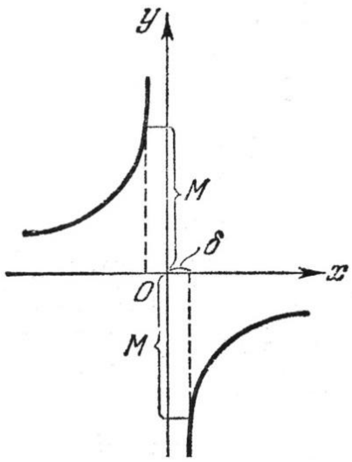


Рис. 7.1

Якщо функція прямує до нескінченності при $x \to \infty$, то пишуть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, зокрема, може бути $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Зауваження 1. Функція $y = f(x)$ при $x \to a$ або при $x \to \infty$ може не прямувати до кінцевої границі або нескінченності.

Приклад 2. Функція $y = \sin x$, визначена на нескінченному інтервалі $-\infty < x < \infty$ при $x \to \infty$, не прямує а ні до кінцевої границі, а ні до нескінченності.

> ***Визначення 2.*** *Функція $y = f(x)$ називається обмеженою у даній області зміни аргументу x, якщо існує додатне число M, таке, що для всіх значень x, що належать цієї області, буде виконуватись нерівність $|f(x)| < M$. Якщо такого числа не існує, то функція $f(x)$ називається необмеженою у даній області.*

Приклад 3. Функція $y = \sin x$, що визначена у інтервалі $-\infty < x < \infty$, є обмеженою, оскільки $|\sin x| < 1 = M$ при всіх значеннях x.

> ***Визначення 3.*** *Функція $y = f(x)$ називається обмеженою при $x \to a$, якщо існує окіл з центром у точці a, у якому дана функція обмежена.*
>
> ***Визначення 4.*** *Функція називається обмеженою при $x \to \infty$, якщо існує таке число $N > 0$, що при всіх значеннях x, що задовольняють нерівності $|x| < N$, функція $f(x)$ обмежена.*

Питання про обмеженість функції, що прямує до границі, розв'язується наступною теоремою.

ТЕОРЕМА 1. *Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, при цьому b є кінцеве число, то функція $f(x)$ є обмежена при $x \to a$.*

Доведення. З рівності $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке δ, що в околі $a - \delta < x < a + \delta$ буде виконуватись нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$, або $|f(x)| < b + \varepsilon$. А це й означає, що функція $f(x)$ обмежена при $x \to a$.

Зауваження 2. Із визначення обмеженості функції $f(x)$ випливає, що якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ або $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, тобто $f(x)$ є нескінченно велика, то вона є необмеженою. Зворотне твердження, взагалі кажучи, не вірно: необмежена функція може не бути нескінченно великою.

8. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ТА ЇХ ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ

У даному розділі будемо розглядати функції, що прямують до нуля при деякому характері зміни аргументу.

Визначення . Функція $\alpha=\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x\to a$ або $x\to\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ або $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0.$

Приклад 1. Функція $\alpha=(x-1)^2$ є нескінченно мала при $x\to 1$, оскільки $\lim\limits_{x\to 1}\alpha=\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$ (рис. 8.1).

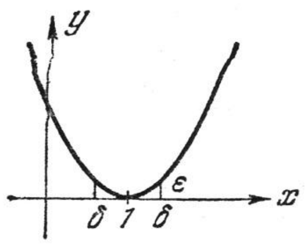


Рис. 8.1

Приклад 2. Функція $\alpha=1/x$ є нескінченно малою при $x\to\infty$ (рис. 8.2).

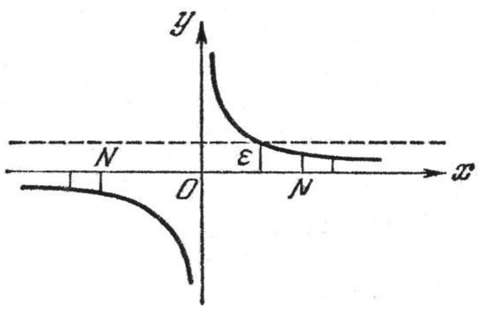


Рис. 8.2

ТЕОРЕМА 1. *Якщо функція* $y=f(x)$ *представляється у вигляді суми сталого числа* b *та нескінченно малої* α: $y=b+\alpha$, (8.1)
то $\lim y=b$ *при* $x\to a$ *або* $x\to\infty$. *Навпаки, якщо* $\lim y=b$, *то можна записати, що* $y=b+\alpha$, *де* α *- нескінченно мала.*

Доведення. З рівності (8.1) випливає $|y-b|=|\alpha|$. Але при довільному ε всі значення α, починаючи з деякого, задовольняють співвідношенню $|\alpha|<\varepsilon,$

а тому для всіх значень y, починаючи з деякого, буде виконуватись нерівність $|y-b|<\varepsilon$, а це і означає, що $\lim y=b$. Навпаки: якщо $\lim y=b$, то при довільному ε та всіх значень y, починаючи з деякого, буде $|y-b|<\varepsilon$. Але якщо позначимо $y-b=\alpha$, то для всіх значень α, починаючи з деякого, буде мати місце нерівність $|\alpha|<\varepsilon$. Тобто α - нескінченно мала, що й треба було довести.

ТЕОРЕМА 2. *Якщо $\alpha=\alpha(x)$ прямує до нуля при $x\to a$ (або $x\to\infty$) та не перетворюється на нуль, то $y=1/\alpha$ прямує до нескінченності.*

Доведення. При будь-якому великому $M>0$ буде виконуватись нерівність $1/|\alpha|>M$, якщо тільки виконується нерівність $|\alpha|<1/M$. Остання нерівність буде виконуватись для всіх значень α, починаючи з деякого, оскільки $\alpha(x)\to 0$.

ТЕОРЕМА 3. *Алгебраїчна сума двох, трьох та взагалі кінцевого числа нескінченно малих є нескінченно мала функція.*

Доведення. Виконаємо доведення для двох нескінченно малих, оскільки для їх будь-якої кінцевої кількості воно аналогічне. Нехай $u(x)=\alpha(x)+\beta(x)$, де $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0, \lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$. Доведемо, що для довільного як завгодно малого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що при $|x-a|<\delta$ буде виконуватись нерівність $|u|<\varepsilon$. Оскільки $\alpha(x)$ є нескінченно мала, то знайдеться таке δ_1, що у околі із центром у точці a і радіусом δ_1 буде $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$. Оскільки $\beta(x)$ є нескінченно мала, то знайдеться таке δ_2, що у околі з центром у точці a і радіусом δ_2 буде $|\beta(x)|<\varepsilon/2$. Оберемо δ, що дорівнює меншої з величин δ_1 та δ_2, тоді у околі точки a із радіусом δ буде $|u|<|\alpha(x)+\beta(x)|<|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. Тобто $|u|<\varepsilon$, що й треба було довести.

Доведення у випадку, коли $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0, \lim\limits_{x\to\infty}\beta(x)=0$ виконується аналогічно.

Зауваження. Інколи розглядаються такі суми нескінченно малих, що із зменшенням кожного доданка кількість доданків збільшується. Наприклад, нехай $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+...+\frac{1}{x}$, де кількість доданків дорівнює x, а саме x приймає тільки цілі додатні значення $(x=1,2,3,...,n,...)$.Очевидно, що при $x\to\infty$ маємо суму нескінченно малих, але їх сума $u=1$ не є нескінченно малою.

ТЕОРЕМА 4. *Добуток нескінченно малої функції $\alpha=\alpha(x)$ на обмежену $z=z(x)$ при $x\to a$ (або при $x\to\infty$) є нескінченно мала величина.*

Доведення. Проведемо доведення для випадку $x\to a$. Для деякого $M>0$ знайдеться такий окіл точки $x=a$, у якому буде виконуватись нерівність $|z|<M$. Для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться окіл, у якому буде виконуватись нерівність $|\alpha|<\varepsilon/M$. У меншому з цих околів буде виконуватись нерівність $|\alpha z|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$.

А це означає, що αz - нескінченно мала. У випадку, коли $x \to \infty$ доведення виконується аналогічно.

Н а с л і д о к 1.

Якщо $\lim \alpha = 0, \lim \beta = u,$ то $\lim \alpha\beta = 0$, оскільки $\beta(x)$ є величина обмежена. Це має місце для будь-якого кінцевого числа множників.

Н а с л і д о к 2.

Якщо $\lim \alpha = 0, \quad C = const,$ то $\lim C\alpha = 0.$

ТЕОРЕМА 5. *Частка від ділення нескінченно малої величини на обмежену, границя якої відмінна від нуля, є величина нескінченно мала* $\lim \alpha = 0, \lim \beta = u \neq 0, \lim \frac{\alpha}{\beta} = 0.$

9. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ

1) *Границя сталої дорівнює її самій.*
2) *Границя суми двох, трьох і взагалі будь-якого незмінного числа функцій дорівнює сумі границь цих функцій.* $\lim(u_1 + u_2 + ... + u_n) = \lim u_1 + \lim u_2 + ... \lim u_n.$

   Тут і далі для скорочення не пишемо аргумент функцій x, а також вважаємо, що $x \to a$, або $x \to \infty$.
3) *Границя різниці функцій дорівнює різниці їх границь:* $\lim(u_1 - u_2) = \lim u_1 - \lim u_2.$
4) *Границя добутку двох, трьох і взагалі будь-якого незмінного числа функцій дорівнює добуткові границь цих функцій (за умовою, що ці границі існують):* $\lim(u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_n) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot ... \cdot \lim u_n.$
5) *Сталий множник можна виносити за знак границі:* $\lim c \cdot u = c \cdot \lim u.$
6) *Границя дробу дорівнює відношенню границі чисельника до границі знаменника, якщо остання не дорівнює нулю*: $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} \quad (\lim v \neq 0).$

10. ПОРІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ВЕЛИЧИН

Припустимо, що треба знайти границю $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. Нехай відомо, що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0.$ Таку ситуацію у теорії границь називають невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Виникає вона, як бачимо, коли функція являє собою дріб, у чисельнику і знаменнику якого маємо нескінченно малі при $x \to a$ величини.

Результат залежить від того, як саме функції $f(x), g(x)$ наближаються до нуля. Тобто треба порівняти поведінку двох нескінченно малих. Конкретні приклади розглянемо пізніше, а зараз вкажемо всі можливі випадки:

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1.$ Якщо така границя дорівнює 1, то нескінченно малі $f(x), g(x)$ називаються еквівалентними (тобто функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x\to a$ однаково прямують до нуля).

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A, A\neq 1$, тобто прямування до нуля у обох функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x\to a$ проходить аналогічно, але їх границі відрізняються множником A. (Вважається, що A - кінцеве число). Про такі нескінченно малі кажуть, що вони одного порядку малості.

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0.$ У даному випадку кажуть, що $f(x)$ є нескінченно мала при $x\to a$ вищого порядку малості, ніж $g(x)$. (Це означає, що вона скоріше прямує до нуля, ніж $g(x)$).

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty.$ У даному випадку, навпаки, $g(x)$ є нескінченно мала при $x\to a$ вищого порядку малості, ніж $f(x)$. (Це означає, що вона скоріше прямує до нуля, ніж $f(x)$).

Аналогічно можна розглянути порівняння двох нескінченно великих величин. До речи, це корисна вправа для самостійної роботи.

11. НЕПЕРЕРВНА ФУНКЦІЯ

Визначення 1. *Функція $y=f(x)$ називається неперервною, якщо її приріст $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\to 0$* при $\Delta x\to 0.$

Тобто, якщо приріст аргументу скільки завгодно малий, то і приріст самої функції скільки завгодно малий. Інакше: малим змінам аргументу відповідають малі зміни самої функції.

Розглянемо простий приклад. Нехай задано функцію $y(x)=x^2.$ Легко бачити, що її приріст $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\to 0$ при $\Delta x\to 0.$
Тому дана функція дійсно є неперервна.

При вивченні теорії границь суттєво будемо застосовувати наступне визначення.

Визначення 2. *Для неперервної функції $f(x)$ має місце співвідношення: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a).$*

Тобто, якщо маємо неперервну функцію, то її границю можна знайти, просто підставивши замість x у дану функцію граничне значення аргументу і виконавши підрахунки.

Прийнято позначати неперервну функцію так: $f(x)\in C.$ (Походження цього позначення можна зрозуміти, записавши слово «неперервний» англійською: «*Continuous*». Отже, у позначенні неперервної функції використана перша буква останнього слова.).

Альтернативою неперервних є розривні функції. Існують розриви першого і другого роду. Наприклад, функція Хевисайда $H(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$ має кінцевий розрив (або розрив першого роду) при $x=0$ (рис.11.1).

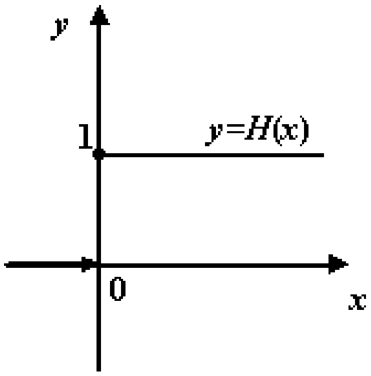


Рис. 11.1

Розрив другого роду, або нескінченний розрив, має при $x=0$ функція $y=\frac{1}{x}$. Дійсно, якщо наближатися до нуля по від'ємним значенням x, то $y\to-\infty$, а якщо по додатним значенням, то $y\to+\infty$ (рис. 11.2).

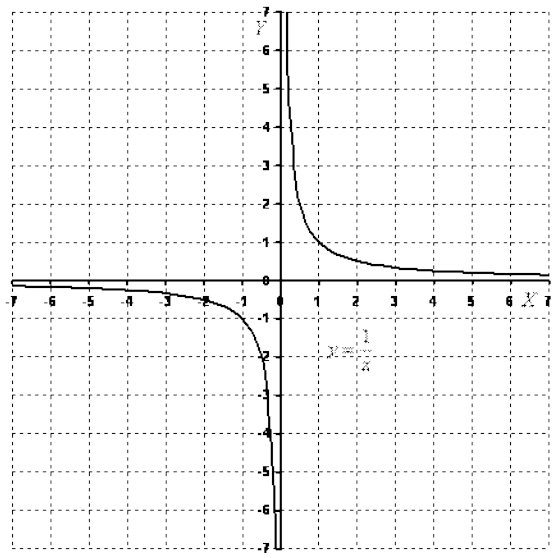


Рис. 11.2

Ми будемо використовувати наведену вище інформацію, до речі, при дослідженні функцій за допомогою диференціального числення. А саме, при знаходженні області визначення функції. Побачимо, що, наприклад, розриви другого роду «розріжуть» графік функції на декілька гілок.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Функція y визначена наступним чином:

$$y=0 \qquad \text{при } x<0;$$
$$y=x \qquad \text{при } 0\le x<1;$$
$$y=-x^2+4x-2 \qquad \text{при } 1\le x<3;$$
$$y=4-x \qquad \text{при } x\ge 3.$$

Чи буде ця функція неперервною?

Як бачимо, ця функція представлена чотирма співвідношеннями, кожне з яких визначається неперервною функцією. Проблемними можуть стати тільки точки, де закінчується область визначення однієї функції і починається область визначення наступної з них. Якщо значення функції зліва і справа від точок x = 0, x = 1 і x = 3 однакові, то функція неперервна. В іншому випадку вона розривна. Виконаємо розрахунки. При $x=0$. $y=x$= 0. При x = 1 $y=-x^2+4x-2$ = 1, а $y=x$ довизначимо граничним значенням $\lim\limits_{x\to 1} x=1$. Аналогічно при x = 3 $\lim\limits_{x\to 3}(-x^2+4x-2)=1$ і $y=4-x$ = 1. Таким чином, умова неперервності даної функції виконана.

Приклад 2.

Нехай $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{якщо}\, x\le 1; \\ 3-ax^2, \text{якщо}\, x>1. \end{cases}$

При якому виборі a функція $f(x)$ буде неперервна?

Функція $3-ax^2$ не визначена при $x=1$. Знайдемо границю цієї функції при прямуванні x до 1 і прирівняємо її до значення, яке приймає при $x=1$ перша з функцій, що визначає дану, тобто $f(x)=x+1=1+1=2$.

Маємо: $\lim\limits_{x\to 1}(3-ax^2)=2$. Звідси $a=1$.

Приклад 3. Функція $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ не визначена при $x=1$. Яким має бути значення $f(1)$, щоб довизначена цим значенням функція стала неперервною при $x=1$.

Доцільно довизначити за неперервністю дану функцію при $x=1$ її граничним значенням $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2}{3}$. При знаходженні границі були використані формули скороченого множення. Перш ніж перейти до границі, чисельник і знаменник одночасно були поділені на загальний множник $(x-1)$, який не дорівнював нулю поки не був здійснений граничний перехід.

Приклад 4. Скільки точок розриву і якого роду має функція $y=\dfrac{1}{\lg|x|}$?

Нагадаємо, що логарифмічна функція визначена тільки для строго додатних значень свого аргументу. У даному випадку наявність знака абсолютної величини гарантує, що цей аргумент тільки невід'ємний, тобто не може приймати значення, що дорівнює нулю. Решта його значення - величини додатні. При $|x|=1$ ми одержимо у знаменнику даної функції нуль. Таким чином, при $x=\pm 1$ дана функція має нескінченний розрив. Отже, маємо два розриви другого роду. Звернемось до аргументу $x=0$. Як вже було вказане вище, сама логарифмічна функція не визначена у цій точці і прямує до мінус нескінченності при прямуванні x до нуля. Але оскільки у досліджуваної функції логарифм знаходиться у знаменнику, то границя цієї функції при $x \to 0$ дорівнює нулю, так що маємо, так званий, усунутий розрив.

Пример 5. Яке значення повинно мати $f(0)$, щоб функція $f(x)=x\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}$ була всюди неперервною?

Аргумент функції $\sin\dfrac{\pi}{x}$ має розрив другого роду при $x = 0$. Значення, яке синус прийме при нескінченному значенні його аргументу, є невизначеним. Це може бути будь-яке число з проміжку $[-1,+1]$. Але оскільки синус є функцією обмеженою ($|\sin\alpha|\le 1$ для всіх $\alpha\in(-\infty,+\infty)$), то добуток нескінченно малої при $x\to 0$ величини x на обмежену буде нескінченно малою величиною. Отже у якості шуканого значення $f(0)$ доцільно обрати наступну границю: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{\pi}{x}=0.$

12. НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИГЛЯДУ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right), \left(\dfrac{0}{0}\right), (0\cdot\infty), (\infty-\infty)$

Розглянемо деякі приклади, де будемо шукати границі функцій.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{3x^2-x+1}.$

Розв'язання почнемо з тестування: підставляємо граничне значення аргументу у дану функцію. Остання є частинний випадок, так званої, дрібно-раціональної функції – відношення двох багаточленів (поліномів). Очевидно, що тип невизначеності - $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Щоб її розкрити, підготуємо функцію до граничного переходу, визначивши, по-перше, найвищу степінь багаточленів (у нашому випадку – це друга) і поділивши на x^2 всі члени чисельника й знаменника одночасно. Отже, маємо:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{3x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{2}{3}.$ Результат одержано при використанні теорем про границю дробу, суми, сталої, а також зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими (а саме: при $x\to\infty$ $\dfrac{3}{x},\dfrac{5}{x^2},\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{x^2}$ є нескінченно малі, тобто їх границі дорівнюють нулю).

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}+2x}{3x+1}$. Маємо знов невизначеність типу $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Старша степінь x у чисельнику і знаменнику дробу дорівнює одиниці. До речі, при наявності коренів, треба під знаком кореня взяти тільки той член, що містить x у найвищій степені і прикинути, у якій степені він стане, якщо корінь із нього витягнути. У нашому прикладі одержуємо x у першій степені. Наявність кореня не заважатиме використанню того ж прийому, що був запроваджений у *прикладі 1.* Отже, одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}+2x}{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}+2}{3+\frac{1}{x}}=1.$$ (Використано, що $x=\sqrt{x^2}$).

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$. Тип невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$. Тобто граничне значення x є коренем як чисельника, так і знаменника. Потрібно використовувати підхід, що суттєво відрізняється від розглянутого вище. Перетворимо функцію, що знаходиться під знаком границі. Для цього розкладемо квадратні тричлени, що стоять у чисельнику і знаменнику на добутки лінійних множників. При цьому, очевидно, там будуть присутні однакові множники, а саме - $(x-1)$. Доки ми не перейдемо до границі, спрямовуючи x до одиниці, ці множники не прямують до нуля. Ділимо одночасно на $(x-1)$ чисельник і знаменник, а вже потім переходимо до границі.

А саме: $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-4)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-4}=\frac{1}{3}.$$

Якщо степені багаточленів у дрібно-раціональної функції вище другої і замість квадратних тричленів доводиться мати справу з багаточленами більш високих степенів, доцільно користатись універсальним підходом, який, до речі, можна застосувати і у прикладі 3. А саме: чисельник і знаменник дробу одночасно ділимо на $(x-a)$, де a- число, яке обертає їх до нуля, тобто є одним з коренів багаточленів, що містяться у чисельнику і знаменнику дрібно-раціональної функції. До границі переходимо після виконання операції ділення. Звернемось до прикладу.

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x-4}{x^2-1}$.

Очевидно, тип невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Оскільки $x=1$ є коренем як чисельника, так і знаменника, то вони діляться без залишку на $(x-1)$. А саме:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,x^3 \qquad\quad +3x-4 & \;\; x-1 \\
\underline{x^3-x^2} & \overline{x^2+x+4} \\
\qquad \_\,x^2+3x & \\
\qquad\;\; \underline{x^2-x} & \\
\qquad\qquad \_\,4x-4 & \\
\qquad\qquad\;\; \underline{4x-4} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Ділення відбувається, так званим, «куточком», що добре знайомий з шкільного курсу математики. У знаменнику можна використати формулу скороченого множення. Таким чином, поділивши чисельник і знаменник одночасно на $(x-1)$, одержимо: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x-4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x^3+3x-4}{x-1}}{\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+4}{x+1}=\dfrac{6}{2}=3.$

Приклад 5. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right).$

Маємо невизначеність $(\infty-\infty)$. Бажано змінити її тип, виконавши еквівалентні перетворення функції, що міститься під знаком границі. Природно привести її до спільного знаменника. Як правило, при цьому пошук границі спрощується. Отже, одержимо:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Таким чином, елементарні перетворення дозволили змінити тип невизначеності на $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, а подальші дії треба виконувати за схемою, що розглядалась у *прикладі 3*: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\cdot(x+2)}{(1-x)\cdot(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{1+x+x^2}=-1.$

Приклад 6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$

Наявність кореня заважає використанню розглянутої вище схеми, що слід застосовувати при невизначеності типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, яка має місце і у даному прикладі. Пропонується впровадження еквівалентного перетворення даної функції, що полягає у одночасному множенні чисельника і знаменника даного дробу на, так званий, спряжений вираз (у даному випадку – на $(\sqrt{1+x^2}+1)$). Після використання формул скороченого множення ми фактично попадемо в умови, які розглядались у *прикладі 3.* Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}{x\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=0.$$

Зауважимо, що при наявності кореня третього ступеня можна використати ще одну формулу скороченого множення з курсу шкільної математики, помноживши чисельник і знаменник на неповний квадрат суми (або різниці).

Приклад 7. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$. Ми вже вдруге одержуємо дуже «неприємну» невизначеність типу $(\infty-\infty)$. Але на відміну від ситуації, що була у *прикладі 4,* дана функція не містить дробів, тому треба шукати інші шляхи для зміни типу невизначеності. Використаймо прийом, застосований у *прикладі 5:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0.$$

Зауважимо, що такі ж самі прийоми треба використовувати, якщо замість x у прикладах буде n - аргумент, що приймає цілі значення. І ще: незважаючи на різноманіття прикладів, існують цілком визначені стандартні прийоми розв'язування задач, пов'язаних з розшуком границь. *Треба уважно проробити цю тему: вона має дуже широке застосування у різних розділах курсу вищої математики.*

13. ПЕРША ВАЖЛИВА ГРАНИЦЯ

Якщо x є радіанна міра кута, то $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Це співвідношення і є *перша важлива границя*. При прямуванні x до нуля $\sin x\to 0,\ x\to 0,$ тобто маємо, що границя відношення цих двох нескінченно малих величин дорівнює одиниці. Із цього випливає, до речі, що функції $\sin x$ і x поводять себе однаково при $x\to 0$. Відомо, що цей факт використовували астрономи: для дуже малих кутів x їх значення приблизно дорівнюють синусам цих кутів. Очевидно, що $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1.$

Доведення. Розглянемо коло радіуса 1 (рис. 13.1).

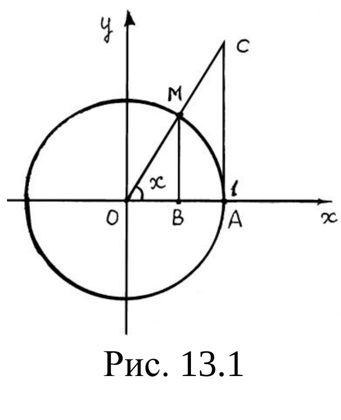


Рис. 13.1

Позначимо центральний кут *MOB,* при цьому $0 < x < \frac{\pi}{2}$. З рис.13.1 безпосередньо випливає, що площа трикутника *MOA* менша за площу сектора *MOA,* яка менша за площу трикутника *COA.*

Площа трикутника *MOA* дорівнює $\frac{1}{2}OA\cdot MB = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x.$ Площа сектора *MOA* дорівнює $\frac{1}{2}OA\cdot \breve{A}M = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x = \frac{1}{2}x.$ Площа трикутника *COA* дорівнює $\frac{1}{2}\cdot OA\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx = \frac{1}{2}tgx.$ Таким чином, маємо $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx,$ або $\sin x < x < tgx.$

Поділимо всі члени останньої нерівності на $\sin x$: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$ або $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$ Ця нерівність доведена для $x > 0$, але, оскільки $\frac{\sin(-x)}{(-x)} = \frac{\sin x}{x}$, $\cos(-x) = \cos x$, вона виконується також при $x < 0.$ Але $\lim_{x\to 0}\cos x = 1, \lim_{x\to 0} 1 = 1.$ Далі скористаємось ***теоремою*:**

Якщо між відповідними значеннями трьох функцій $u = u(x), z = z(x), v = v(x)$ виконується нерівність $u \le z \le v,$ при цьому $u(x)$ та $v(x)$ при $x \to a$ (або при $x \to \infty$) мають однакову границю b, то $z = z(x)$ при $x \to a$ (або $x \to \infty$) також прямує до b.

Але змінна $\frac{\sin x}{x}$ знаходиться між двома величинами, що мають одну й ту ж границю, що дорівнює 1. Тобто, на підставі процитованої вище теореми, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Приклад 1. Знайти $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$

Розв’язання усіх прикладів на пошук границь традиційно починається з тестування функції, розташованої під знаком границі. Для цього треба підставити граничне значення аргументу у дану функцію і подивитись, що при цьому одержуємо. У нашому випадку маємо невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Використаємо формулу $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$ Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Вище виконані елементарні еквівалентні перетворення. Також користуємось теоремою про границю добутку і очевидним узагальненням першої важливої границі: $\lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin(\varphi(x))}{\varphi(x)} = 1.$

Приклад 2. $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\cdot tg\dfrac{\pi z}{2}$. У даному прикладі ми вперше одержуємо «екзотичну» невизначеність типу $(0\cdot\infty)$. При розв'язанні прикладів цей тип невизначеності легко привести або к типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, або – к $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Перепишемо даний приклад у вигляді: $$\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\cdot tg\frac{\pi z}{2}=\lim\limits_{z\to 1}\frac{(1-z)\cdot\sin\dfrac{\pi z}{2}}{\cos\dfrac{\pi z}{2}}.$$

Тестування показує, що тип невизначеності змінився на $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Далі буде потрібна формула приведення: $\cos\dfrac{\pi z}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi z}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi(1-z)}{2}$.
Таким чином, залишається скористатись цим результатом і помножити одночасно чисельник і знаменник на $\dfrac{\pi}{2}$. Отже, маємо: $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}(1-z)\cdot\sin\dfrac{\pi z}{2}}{\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin\dfrac{\pi(1-z)}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$.
Як бачимо, знання шкільної тригонометрії суттєво використовується при вивченні і першої важливої границі. Тобто, зайвих знань не буває!

14. ДРУГА ВАЖЛИВА ГРАНИЦЯ

Другою важливою границею називають $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$. Число e - це основа натурального логарифма. Тип невизначеності (1^{∞}) можна вважати «візитною карткою» другої важливої границі.

Якщо зробити заміну $z=\dfrac{1}{x}$, то одержимо цю границю у новому вигляді: $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$. Тип невизначеності функції, що знаходиться під знаком границі, не змінився: у дужках до одиниці додається нескінченно мала при відповідному прямуванні змінної величини і при цьому ця сума має нескінченно великий показник степені.

За допомогою цих формул можна розв'язувати велику кількість задач.

Звернемось до прикладів.

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

Хоча тип невизначеності – такий, як у стандартній формулі, але наявність деяких відмінностей не дозволяє миттєво нею скористатись. Тому перетворимо еквівалентним чином вигляд даної функції так, щоб було можливо розглянути саме другу важливу границю.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{mx}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right\}^{m\cdot k}=e^{mk}.$$

Спочатку число k відправлено у знаменник знаменника, потім у показнику степеня одночасно помножено і поділено також на число k. Після виконання цих еквівалентних операцій у фігурних дужках одержано шуканий вигляд функції. Отже, маємо результат, використовуючи другу важливу границю.

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Легко бачити, що тип невизначеності $\left(1^{\infty}\right)$. Але ситуація виглядає декілька складніше, ніж у попередньому прикладі. Перетворимо еквівалентним чином вигляд даної функції. Наша мета – у тому, щоб після перетворень можна було б побачити саме другу важливу границю. Спочатку зробимо виділення цілої частини з дробу $\frac{x+1}{x-2}$. Для цього існують три способи:

1) $\frac{x+1}{x-2}=1+\left(\frac{x+1}{x-2}-1\right)=1+\frac{3}{x-2}=1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}$. До речі, у знаменнику останнього дробу міститься підказка: саме такий вираз треба буде виділити, перетворюючи далі показник степені.

2) $\frac{x+1}{x-2}=\frac{(x-2)+3}{x-2}=1+\frac{3}{x-2}$.

3) Нарешті, можна поділити чисельник дробу $\frac{x+1}{x-2}$ на знаменник (саме так виділяють цілу частину неправильного дробу). Ціла частина у нас – одиниця, а залишок від ділення – чисельник дробової частини.

Виконаємо перетворення показника степені:

$$2x-1=2(x-2+2)-1=2(x-2)+3=6\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)+3.$$

Тепер нашу границю одержати неважко:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{6\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)+3}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right\}^{6}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{3}=e^{6}.$$

Звернемо увагу на те, що вираз у фігурних дужках співпадає за своїм виглядом та поведінкою саме з другою важливою границею.

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{2}{x^2-1}}$.

Маємо невизначеність $\left(1^{\infty}\right)$. Оскільки виправдовує себе прийом, що базується на еквівалентних попередніх перетвореннях, використовуємо його знову. Отже, $5x-4=1+(5x-4-1)==1+5(x-1)$. $5(x-1)$ і є та сама нескінченно мала при $x\to 1$.

$$\lim_{x\to 1}(5x-4)^{\frac{2}{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}\left(1+5(x-1)\right)^{\frac{2x}{(x-1)(x+1)}}=\lim_{x\to 1}\left\{\left(1+5(x-1)\right)^{\frac{1}{5(x-1)}}\right\}^{\frac{2x}{x+1}\cdot 5}=e^{10}.$$

Бувають ситуації, коли, на перший погляд, не має підстав у використанні другої важливої границі, але після декількох кроків стає очевидною її необхідність.

Звернемось до прикладу.

Приклад 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

Маємо невизначеність $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Ось як проходить пошук результату:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln(1+kx)=\lim_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\ln\left(1+kx\right)^{\frac{1}{kx}}\right\}^{k}=e^{k}.$$

Приклад 5. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x-4}\right)^{\frac{x}{3}}.$$

Очевидно, тип невизначеності $\{1^{\infty}\}$, що вказує на необхідність використання другої важливої границі. Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x-4}\right)^{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x-4}{5}}\right)^{\frac{(x-4)+4}{3}\cdot\frac{5}{5}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x-4}{5}}\right)^{\frac{x-4}{5}\cdot\frac{5}{3}}\cdot\left(1+\frac{1}{-\frac{x-4}{5}}\right)^{\frac{4}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-\frac{x-4}{5}}\right)^{-\frac{x-4}{5}}\right\}^{-\frac{5}{3}}\cdot\left(1+\frac{1}{-\frac{x-4}{5}}\right)^{\frac{4}{3}}=e^{-\frac{5}{3}}.$$

Приклад 6. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}.$$

Маємо невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Перетворимо функцію, розташовану під знаком границі, використавши властивості логарифму.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a+x}{a}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Прокоментуємо послідовність дій. Спочатку різницю логарифмів замінили логарифмом дробу, потім під знаком логарифма почленно поділили на число *a*. Нарешті, дріб перенесли у показник функції, що стоїть під знаком логарифма. При цьому, тип невизначеності змінювався. Остання з границь містить під знаком логарифма невизначеність типу (1^{∞}). Саме час використовувати другу важливу границю! Однак перед цим "підправимо" показник степеня, помноживши і поділивши його на *a*. Одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}\frac{a}{a}}=\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right]^{\frac{1}{a}}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}.$$

Як бачимо, у квадратних дужках виникло співвідношення, границя якого при $x\to 0$ дорівнює *e*. Оскільки логарифмічна функція неперервна, можна переходити до границі під знаком логарифма.

15. ДЕЯКІ ЕЛЕМЕНТИ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Наведемо деякі поняття, а також властивості функцій, які будуть використовуватися в подальшому, зокрема, при дослідженні функції.

15. 1. Нулі функції, знак функції

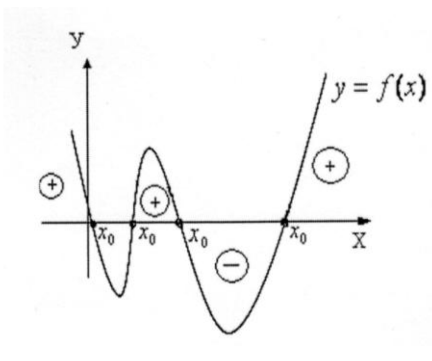


Рис.15.1

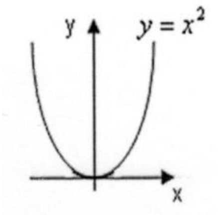
Визначення. *Значення x, при якому функція y дорівнює нулю, називається нулем функції, тобто* $x = x_0$ *- нуль функції* $y = f(x)$, *якщо* $f(x_0)=0$. *Якщо знак у функції додатний у деякому інтервалі осі OX, то графік функції розташований вище осі OX; якщо від'ємний - нижче. У нулі функції графік має спільну точку з віссю OX* (рис.15.1).

15. 2. Парність та непарність функції

Визначення. *Функція* $y = f(x)$ *називається парною, якщо вона не змінюється, коли знак її аргументу x змінити на протилежний, тобто* $f(-x) = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо вона змінює знак на протилежний, коли знак її аргумента x поміняти на протилежний, тобто $f(-x) = -f(x)$.

Приклад 1. Встановити, що дана функція $y = f(x) = x^2$ є парною.



Маємо $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Таким чином, функція $y = x^2$ є парною (рис. 15.2).

Приклад 2. Встановити, що функція $y = f(x) = x^3$ є непарною.

Рис.15.2

Маємо $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -f(x)$.

Таким чином, функція $y = x^3$ є непарною (рис. 15.3).

Необхідно знати, що графік парної функції є симетричний відносно осі ОУ, а графік непарної функції є симетричним відносно початку координат (див. рис. 15.2 та рис. 15.3). Якщо умови парності або непарності не виконуються, то функція не є парною чи непарною, а графік такої функції не буде симетричним.

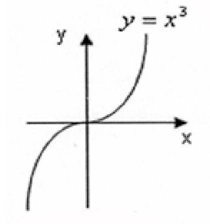


Рис.15.3

15. 3. Періодичність функції

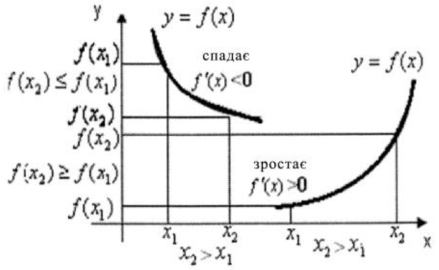
Визначення. *Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо існує таке додатне число T, що називається періодом, для якого при будь-якому значенні x виконується рівність*

$$f(x+T) = f(x).$$

Можна узагальнити останню рівність у вигляді: $f(x+nT) = f(x)$, де *n* – будь-яке ціле число. Тобто кількість періодів функції необмежена.

У якості прикладу можна навести тригонометричні функції $y = \sin x,\ y = \cos x,\ (T = 2\pi);\ y = tgx,\ y = ctgx,\ (T = \pi)$. У дужках вказано найменші періоди цих функцій. Але зрозуміло, що їх періодами можна вважати значення, що є кратними до найменших періодів. Якщо функція є періодичною, то при побудові її графіка буде достатньо зробити це на одному періоді, а потім продовжити його на всю область визначення.

15. 4. Зростання, спадання (монотонність) функції



Визначення. *Функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на деякому інтервалі, якщо більшим значенням аргументу відповідають більші (менші) значення функції: тобто якщо при $x_2 > x_1$ маємо $f(x_2) \ge f(x_1)$, то функція $y = f(x)$ зростає, якщо при $x_2 > x_1$ виконується нерівність $f(x_2) \le f(x_1)$,*

Рис.15.3

то функція $y = f(x)$

спадає (рис.15.3).

Інтервал значень *x*, на якому функція зростає (спадає), називається інтервалом монотонності (зростання (спадання)) функції.

Дослідження монотонності функції на базі її визначення є досить важка задача. Але існує зв'язок між монотонністю функції на деякому інтервалі та властивостями похідної цієї функції на даному інтервалі, який будемо вивчати у наступному розділі, присвяченому похідній.

16. ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИРІШЕННЯ

I. Знайти область визначення функції. Нанести її на числову вісь

1. $\boldsymbol{y = \dfrac{\ln(x^2 - 8x + 15)}{x - 4}}$;

2. $\boldsymbol{y = \dfrac{2^{x+3}}{\sqrt{2x + 6}}}$;

3. $\boldsymbol{y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 8x + 15}}{e^x}}$;

4. $\boldsymbol{y = \dfrac{\sin(2x + 1)}{\ln(3x - 9)}}$;

5. $\boldsymbol{y = \sqrt{\dfrac{2 - x}{x^2 - 9}}}$;

6. $\boldsymbol{y = \ln(x - 4) + 3\sqrt{x + 5}}$;

7. $\boldsymbol{y = \dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{x^3 - 5x^2 + 6x}}$;

8. $\boldsymbol{y = \dfrac{\ln(x - 1)}{\sqrt{x^2 - x - 6}}}$;

9. $\boldsymbol{y = \ln\dfrac{x - 1}{2 + x}}$;

10. $\boldsymbol{y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 3}}$.

II. Знайти границі функцій, не використовуючи правило Лопіталя

1. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-6}{6x^2-x-7}$; $b)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-6x+5}$; $c)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg6x}{5x}$; $d)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$;

$e)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x-2}-1}{x-1}$; $f)\lim\limits_{x\to1}(4x-3)^{\frac{2x}{1-x}}$; $g)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{6x-5}$.

2. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+1}{18x^3+5}$; $b)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-7x+6}$; $c)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x}{\sin 5x}$; $d)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x}$;

$e)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{4x-2}-\sqrt{2}}{x-1}$; $f)\lim\limits_{x\to1}(7x-6)^{\frac{2x}{1-x}}$; $g)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{6x}$.

3. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{24x^2+x+7}{6x^3+5x-9}$; $b)\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$; $c)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg6x}{\sin x}$; $d)\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{5x}}$; .

$e)\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$; $f)\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{2x}{1-x}}$; $g)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos5x}{x^2}$.

4. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+20}{x^4+5}$; $b)\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$; $c)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin5x}$; $d)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{4x+3}$;

$e)\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{2-\sqrt{2x-6}}$; $f)\lim\limits_{x\to1}(6x-5)^{\frac{7x}{1-x}}$; $g)\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx$.

5. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+2x-7}{5x^4+3x+1}$; $b)\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{5x^2+x-4}$; $c)\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sin(4-x)}{\sqrt{x}-2}$; $d)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^{4x+3}$;

$e)\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; $f)\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{\frac{7x}{x^2-4}}$; $g)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin3x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}$.

6. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+20}{x^4+5}$; $b)\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5x^2-7x-34}{2x^2+x-6}$; $c)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin5x}$; $d)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{4x+3}$;

$e)\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2+\sqrt{x+6}}$; $f)\lim\limits_{x\to1}(6x-5)^{\frac{7x}{1-x}}$; $g)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{\cos7x-\cos3x}$.

7. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+20x-7}{3x^4+5}$; $b)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; $c)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x}{\sin5x}$; $d)\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{4x+3}$;

30

$e)\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+16}-1}{2-\sqrt{2x+14}}$; $f)\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{7x}{1-x}}$; $g)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{1-\cos4x}$.

8. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+20}{x^4+5}$; $b)\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-x-2}$; $c)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x\cdot x}{\sin5x}$; $d)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{4x+3}$;

$e)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{4-\sqrt{3x+7}}$; $f)\lim\limits_{x\to1}(5x-4)^{\frac{7x}{1-x}}$; $g)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-tg^2x}{x^4}$.

9. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+20x-5}{6x^3+5}$; $b)\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+13x+15}{2x^2+9x-5}$; $c)\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin3x}{\sin5x}$; $d)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x}{4x+1}\right)^{4x+3}$;

$e)\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x+10}-4}{2-\sqrt{x-2}}$; $f)\lim\limits_{x\to1}(10x-9)^{\frac{7x}{1-x^2}}$; $g)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\sin x-\cos2x}{\sin^2x}$.

10. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+2x^4}{x^4+5x-8}$; $b)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}$; $c)\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$; $d)\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$;

$e)\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{1-\sqrt{3x+10}}{1-\sqrt{2x+7}}$; $f)\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$; $g)\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot(\ln(x+1)-\ln x)$.

III. Дослідити функцію на неперервність

1. $f(x) = x^3 - 2x;$ 2. $f(x) = \frac{1}{x-1};$ 3. $f(x) = arctg\frac{1}{x};$ 4. $f(x) = \frac{x}{|x|};$

5. $f(x) = 2^{\frac{1}{x+1}};$ 6. $f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \le x < 3 \\ 3-x & 3 \le x < 4 \end{cases};$ 7. $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \le x < 1; \\ 2x, & x \ge 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \frac{\sin x}{x};$ 9. $f(x) = e^{\frac{1}{x}};$ 10. $f(x) = \frac{|x^2 - x|}{x^2 - x};$

ЛІТЕРАТУРА

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1978. – Т. 1, 2.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1969.
3. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1969.
4. Щипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высшая школа,1985.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1969.
6. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1966.
7. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике, часть IV. – Харьков: Издательство Харьковского государственного университета,1966.
8. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа для втузов. – М.: Наука, 1977.
9. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие для вузов. – 10-е издание. – М.: Наука,1990.
10. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ч. 1,2. – М.: Высшая школа, 1980.
11. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966.
12. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1967.
13. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977.
14. Бронштейн И. Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и студентов вузов. – М.: Наука, 1986.
15. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. Ч.1, 2. – К.: Либідь, 1992.

Навчальне видання

Швачич Геннадій Григорович

Коноваленков Володимир Степанович

Заборова Тамара Михайлівна

ВВЕДЕННЯ У МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

Тем. план 2013, поз.249

Підписано до друку 25.06.2013. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк.1,88. Умов. друк. арк.1,86. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ