МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНИ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМІЯ УКРАИНИ

Г.Г. Швачич, А.Н. Дук, Е.Г. Холод, А.А. Шмукин

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Утверждено на заседании Ученого совета академии
в качестве учебного пособия

Днепропетровск НМетАУ 2005

УДК 22.142
Швачич Г.Г., Дук А.Н., Холод Е.Г., Шмукин А.А. Высшая математика: Учебное пособие.– Днепропетровск: НМетАУ, 2005. - 170 с.

Содержит все разделы, предусматриваемые рабочей программой по высшей математике.

Учебное пособие составлено в виде лекций, объединенных по соответствующим темам. В конце каждой лекции приведены решения типовых задач.

Предназначено для студентов экономических специальностей заочной формы обучения.

Рис. 20. Библиогр.: 30 наим.

Печатается в авторской редакции.

Ответственный за выпуск
Г.Г. Швачич, канд. техн. наук., проф.

Рецензент
Ю.Е. Чернявский, канд.физ.-мат.наук, доц.(ДУЭП)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В любом из современных курсов экономики в той или иной степени используется математический аппарат: анализируются графики различных зависимостей, проводится математическая обработка различных статистических данных и т.д. С переходом украинской экономики на рыночные отношения роль математики и математических методов существенно возрастает.

Действительно, центральная проблема экономики - это проблема рационального выбора. В плановой экономике (по крайней мере, на уровне отдельного предприятия) практически нет выбора, а значит, роль экономического анализа существенно принижена. В условиях же рыночной экономики, когда каждой хозяйственной единице необходимо самостоятельно принимать решение, т.е. делать выбор, математическое моделирование становится крайне необходимым. В этой связи роль математических методов в экономике постоянно возрастает.

Отметим некоторые основные преимущества математического подхода при решении экономических задач.

Во-первых, возрастает необходимость в уточнении различных понятий. Математика не может оперировать нечетко, а, тем более, неконкретно определенными понятиями. Следовательно, если применяют математические методы для решения определенных задач, то необходимо на первых этапах составления математической модели четко сформулировать задачу, в том числе, четко представить и обосновать все сделанные допущения.

Во-вторых, развитость математических теорий как таковых (векторная алгебра, аналитическая геометрия, теория дифференциальных уравнений, корреляционный и регрессионный анализы и т. д.), предоставляет к услугам исследователя очень мощный математический аппарат.

Разумеется, в использовании математических методов есть и свои слабые стороны. При попытке формализовать экономическую ситуацию может получиться очень сложная математическая модель. Для того, чтобы ее упростить, приходится вводить новые допущения, зачастую не оправданные с точки зрения экономики. Здесь исследователя подстерегает опасность совершенствования математической техники вместо анализа подлинной экономической ситуации.

Данное учебное пособие иллюстрировано многочисленными примерами, которые позволяют более полно понять сущность основных теоретических положений.

Раздел 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Тема 1.1. Матрицы. Действия над матрицами

Определение 1.1. Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Согласно определению, матрица размерности $m \times n$ имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Числа m и n называются порядками матрицы. Числа a_{ij}, образующие матрицу, называются ее элементами. Индексы i и j элемента a_{ij} указывают соответственно на номера строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Матрицу можно записать сокращенно в виде

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor,$$

где $i = \overline{1,m};\ \ j = \overline{1,n}$.

Определение 1.2. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой.

Равенство матриц

*Сравнивать **можно** только матрицы одинаковой размерности.*

Определение 1.3. Две матрицы $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ и $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ называются равными, если они имеют одинаковые порядки, а соответствующие элементы равны между собой. Таким образом, $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ для всех значений $\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}};\ \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}}$.

Операции над матрицами

К операциям над матрицами относятся: *сложение (вычитание) матриц, умножение матрицы на скаляр (число), умножение матриц.*

1. Сложение (вычитание) матриц

Складывать (вычитать) можно только матрицы одной размерности.

Определение 1.4. Суммой матриц $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ и $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ называется матрица $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ того же порядка, элементы которой c_{ij} определяются равенством

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad .$$

Аналогично определяется разность двух матриц.

Заметим, что операция сложения (вычитания) матриц обладает теми же свойствами, что и операция сложения (вычитания) вещественных чисел.

2. Умножение матрицы на число

Определение 1.5. Произведением матрицы $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ на вещественное число λ называется матрица $C = \lfloor c_{ij} \rfloor$ той же размерности, что и матрица А, элементы которой равны

$$c_{ij} = l \cdot a_{ij} \quad .$$

*То есть, при умножении матрицы на число, на это число умножаются **все** элементы матрицы.*

3. Умножение матриц

Определение 1.6. Произведением матрицы $A = [a_{ij}]\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$, имеющей порядки соответственно равные m и n, на матрицу $B = [b_{ij}]\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,p}\right)$, имеющую порядки соответственно равные n и p, называется матрица $C = [c_{ij}]\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,p}\right)$, имеющая порядки соответственно m и

p, элементы которой c_{ij} определяются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}; \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, p}\right) \qquad (1.1)$$

Другими словами, матрицу A можно умножить на матрицу B тогда и только тогда, когда ***число столбцов матрицы*** A ***соответствует числу строк матрицы*** B**.** Формула (1.1) дает правило вычисления элементов матрицы-произведения, называемое правилом "строка–столбец", которое может быть сформулировано следующим образом: *элемент* c_{ij} *матрицы* $C = AB$ *равен сумме попарных произведений соответствующих элементов* i*-й строки матрицы* A *и* j*-го столбца матрицы* B.

Задача 1.1. Найти произведение матриц $C = AB$, если последнее существует:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

По правилу "строка–столбец" получим

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (3{\cdot}1 + 0{\cdot}2 + 1{\cdot}4) & (3{\cdot}0 + 0{\cdot}3 + 1{\cdot}1) & (3{\cdot}4 + 0{\cdot}(-1) + 1{\cdot}(-2)) \\ (2{\cdot}1 + 1{\cdot}2 + 2{\cdot}4) & (2{\cdot}0 + 1{\cdot}3 + 2{\cdot}1) & (2{\cdot}4 + 1{\cdot}(-1) + 2{\cdot}(-2)) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 1 & 10 \\ 12 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Определение 1.7. Транспонированием матрицы называется замена строк этой матрицы ее столбцами с сохранением их номеров. Матрица, полученная таким образом из матрицы A, называется ***транспонированной*** по отношению к матрице A и обозначается A'.

Например, если $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, то $A' = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

Может оказаться, что квадратная матрица A совпадает со своей транспонированной матрицей, т.е. $A = A'$. В этом случае матрица A называется ***симметричной***.

Квадратная матрица

Если в матрице порядки m и n равны, то она называется ***квадратной***, а число $m = n$ называется ее порядком. Квадратная матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Для квадратной матрицы вводят понятие главной и побочной диагоналей. *Главной диагональю* квадратной матрицы называется диагональ, идущая из левого верхнего угла в правый нижний ее угол, *побочной диагональю* той же матрицы – диагональ, идущая из левого нижнего угла в правый верхний угол.

Определение 1.8. Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Определение 1.9. Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, называется *единичной* и обозначается E. Например,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

С каждой квадратной матрицей связывают вполне определенную числовую характеристику, которая называется ее *определителем* или *детерминантом*.

Определитель квадратной матрицы

Рассмотрим квадратную матрицу A произвольного порядка. Определитель (детерминант) матрицы обозначается $\det A$ или Δ.

Определение 1.10. Определителем, соответствующим квадратной матрице n - го порядка, называется число, полученное из элементов этой матрицы по следующим правилам:

– определитель n - го порядка равен алгебраической сумме $n!$ элементов матрицы;

– каждое слагаемое представляет собой произведение n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Сомножители располагаются таким образом, чтобы первым был элемент из первой строки, вторым - элемент из второй строки и т.д.;

– слагаемое берется со знаком плюс, если число инверсий в перестановке вторых индексов сомножителей четное, и со знаком минус – в противном случае.

Итак, по определению имеем:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{j} (-1)^{Q(j)} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot a_{3j_3} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$$

В последней формуле суммирование распространяется на все перестановки $j = (j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$, которые можно составить из чисел $1,2,3,\ldots. n$.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть $n = 2$. В общем виде определитель второго порядка записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Членом такого определения будет произведение вида:

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2}$$

где (j_1, j_2) – любая перестановка из чисел 1, 2. Возможных перестановок две: $(1,2), (2,1)$. В первом случае имеем 0 инверсий $(1 < 2)$, а во втором – одну $(2 > 1)$. Следовательно, в первом случае четное число инверсий, а во втором – нечетное.

Следовательно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Таким образом, *определитель второго порядка, соответствующий квадратной матрице второго порядка, равен разности произведений элементов, стоящих на главной диагонали, и элементов, стоящих на побочной диагонали.*

Пусть $n = 3$. Определитель третьего порядка имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Членами определителя третьего порядка являются произведения вида: $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3}$ где (j_1, j_2, j_3) – перестановки из чисел $1,2,3$. Таких возможных перестановок шесть:

$$(1,2,3), \quad (2,3,1), \quad (3,1,2)$$
$$(3,2,1), \quad (2,1,3), \quad (1,3,2)$$

Отметим, что первая группа перестановок имеет четное число инверсий, вторая – нечетное, поэтому:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Минор и алгебраическое дополнение

Пусть $\det A$ – определитель матрицы n-го порядка.

Определение 1.11. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного определителя вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Определение 1.12. *Алгебраическое дополнение* A_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ равно минору этого элемента M_{ij}, умноженному на $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Например, если задан определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ то}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \; M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

В то же время

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \; A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Свойства определителей

Приведем ряд свойств, которыми обладает определитель n-го порядка.

1. Свойство равноправности строк и столбцов.

При транспонировании матрицы величина ее определителя сохраняется, т.е. $|A'| = |A|$.

2. Свойство антисимметрии при перестановке двух строк (или двух столбцов).

Если в определителе поменять местами два параллельных ряда (две строки или два столбца) то его знак изменится на противоположный.

3. Линейное свойство определителя.

Если в определителе n *-го порядка* Δ *некоторая* i *-я строка* $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ *является линейной комбинацией двух строк* $(b_1, b_2, \ldots,\ b_n)$ *и* $(c_1, c_2, \ldots,\ c_n)$ *с коэффициентами* λ *и* μ*, то*

$$\Delta = \lambda\Delta_1 + \mu\Delta_2\ ,$$

где Δ_1 *- определитель, у которого* i *-я строка равна* $(b_1, b_2, \ldots,\ b_n)$*, а все остальные такие же строки, как и у* Δ*, а* Δ_2 *- определитель, у которого* i *-я строка равна* $(c_1, c_2, \ldots,\ c_n)$*, а все остальные строки те же, что и у* Δ*.*

Следующие пять свойств являются логическим следствием трех основных свойств.

4. Общий множитель всех элементов некоторого ряда определителя можно вынести за знак определителя.

5. Если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

6. Если все элементы некоторого ряда определителя пропорциональны соответствующим элементам параллельного ему ряда, то определитель равен нулю.

7. Если одна из строк определителя есть линейная комбинация других его строк, то определитель равен нулю.

8. Если к элементам какого-либо ряда определителя добавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число k, то значение определителя при этом не изменится.

9. Теорема ЛАПЛАСА (разложение определителя по элементам строки или столбца).

Определитель произвольного порядка равен сумме произведений элементов любого ряда на их алгебраические дополнения.

Например,

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}; \quad \left(i = \overline{1,n}\right).$$

10. Свойство алгебраических дополнений параллельных рядов.

Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ему ряда равна нулю. Например,

$$a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{kn} = 0; \quad \left(i \neq k\right)$$

Практическое правило вычисление определителей

При вычислении определителей широко используются формулы разложения по строке или столбцу (теорема Лапласа), а также свойство, позволяющее, не изменяя величины определителя, преобразовать его к такому виду, когда какой-либо ряд содержит максимально возможное число нулей. Именно этот ряд рационально принять в качестве ряда для разложения по Лапласу. Такой подход к вычислению определителей называется правилом понижения порядка.

Задача 1.2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

В качестве ряда для разложения рационально использовать вторую строку, которая содержит два нулевых элемента. Для уменьшения объема последующих вычислений можно добиться большего числа нулей в этой строке. Работать будем со столбцами. Сложим соответствующие элементы второго и третьего столбцов и запишем результат на месте третьего столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Используя свойство 8, добавим к элементам второго столбца соответствующие элементы четвертого столбца, умноженные на число 2. Получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Далее разложим определитель по элементам второй строки.

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Теперь в определителе четвертого порядка добьемся наибольшего числа нулей в третьей строке. Для этого умножим на (-1) элементы первой строки и сложим их с соответствующими элементами третьей строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель четвертого порядка по элементам третьей строки

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

В определителе третьего порядка добьемся наибольшего числа нулей во втором столбце. Будем работать со строками. Все элементы первой строки умножим на число (-2) и сложим с соответствующими элементами третьей строки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Применим теорему Лапласа, выбрав в качестве ряда для разложения второй столбец. Получим:

$$\Delta = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Наконец, вычисляя определитель второго порядка, окончательно имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 0 = 1$$

Обратная матрица

Одно из важнейших свойств умножения чисел состоит в том, что для каждого числа a, отличного от нуля, существует обратное a^{-1} такое, что

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Оказывается, что нечто подобное имеет место и для матриц, причем роль условия $a \neq 0$ играет условие, состоящее в том, что определитель матрицы A отличен от нуля.

Определение 1.13. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю $(\Delta \neq 0)$. В противном случае $(\Delta = 0)$ матрица называется *вырожденной*.

Определение 1.14. Матрица A называется обратной по отношению к матрице A, если выполняется соотношение:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Условие существования обратной матрицы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.1. Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Обратная матрица находится по следующей схеме:

1. Вычисляется определитель $|A|$ исходной квадратной матрицы n-го порядка.

2. Формируется матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов a_{ij} исходной квадратной матрицы A. Такая матрица называется *союзной* по отношению к матрице A и обозначается A^*:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

3. Транспонируют союзную матрицу, определяя тем самым так называемую *присоединенную* матрицу. Такая матрица обозначается $\widetilde{A}$ и выглядит следующим образом:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Обратная матрица A^{-1} по отношению к матрице A находится по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}.$$

Задача 1.3. Дана матрица $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Найти обратную матрицу по отношению к заданной.

Вычислим определитель матрицы A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -9 \end{vmatrix} = 5.$$

Матрица невырождена, следовательно, обратная матрица существует.

Найдем алгебраические дополнения элементов определителя.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9; \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1; \; A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \; A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2; \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \; A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Формируем союзную матрицу

$$A^* = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -12 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Определим присоединенную матрицу

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} по отношению к матрице A:

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -12 & 1 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{12}{5} & \frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы

Введем понятие *минора матрицы*. Рассмотрим некоторую матрицу A:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Выделим в этой матрице k произвольных строк и k произвольных столбцов $(k \le m;\ k \le n)$. Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы A, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется *минором* k-го порядка матрицы A.

Среди миноров различных порядков матрицы есть равные нулю и отличные от нуля.

Определение 1.15. *Рангом* матрицы A называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

Для определения ранга матрицы следует рассматривать все ее миноры наименьшего порядка и, если хоть один из них отличен от нуля, переходить к вычислению миноров более высокого порядка, включающих (окаймляющих) отличный от нуля минор предыдущего порядка. Такой подход к определению ранга матрицы называется методом окаймления (или методом окаймляющих миноров).

Задача 1.4. Методом окаймляющих миноров определить ранг матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим окаймление первого порядка, например, $D_1 = 9 \neq 0$. Затем перейдем к рассмотрению некоторого окаймления второго порядка.

Например, $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$.

Наконец, проанализируем окаймление третьего порядка

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, наивысший порядок минора, отличного от нуля, равен 2, следовательно, $r(A) = 2$.

Базисный минор матрицы

Определение 1.16. *Базисным минором* матрицы называется всякий, отличный от нуля минор этой матрицы, порядок которого равен рангу матрицы.

Теорема 1.2. ***(****Теорема о базисном миноре****).*** Базисные строки (базисные столбцы) матрицы линейно независимы.

Заметим, что строки (столбцы) матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одну из них можно представить как линейную комбинацию остальных.

Теорема 1.3. Число линейно независимых строк матрицы равно числу линейно независимых столбцов матрицы и равно рангу матрицы.

Теорема 1.4. (Необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя). Для того, чтобы определитель n-го порядка Δ был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были линейно зависимы.

Вычисление ранга матрицы, основанное на использовании его определения, является слишком громоздкой операцией, так как связано с вычислением большого числа миноров различных порядков.

На практике ранг матрицы находят с помощью элементарных преобразований.

Эквивалентность матриц

Определение 1.17. Две матрицы A и B называются эквивалентными, если их ранги равны, т.е. $r(A) = r(B)$.

Если матрицы A и B эквивалентны, то это обозначается так: $A \sim B$.

Теорема 1.5. Ранг матрицы не меняется при *элементарных преобразованиях*.

То есть *элементарные преобразования* – это такие преобразования, которые не приводят к изменению ранга матрицы. К ним относятся:

– транспонирование матрицы,

– перестановка параллельных рядов;

– вычеркивание ряда, все элементы которого равны нулю;

– умножение всех элементов какого-либо ряда на число, отличное от нуля;

– добавление к элементам какого-либо ряда соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число $\lambda \neq 0$.

Следствие теоремы 1.5. Если матрица A получена из матрицы B при помощи конечного числа элементарных преобразований, то матрицы A и B эквивалентны.

При вычислении ранга матрицы ее следует привести при помощи конечного числа элементарных преобразований к трапециевидной форме или к эквивалентной единичной матрице.

Определение 1.18. *Трапециевидной* будем называть такую форму представления матрицы, когда в окаймляющем миноре наибольшего порядка, отличном от нуля, все элементы, стоящие ниже диагональных, равны нулю.

Например:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

D_3

Здесь $D_3 \neq 0$, элементы матрицы a_{21}, a_{31}, a_{32} обращаются в нуль. Тогда форма представления такой матрицы будет трапециевидной.

Как правило, матрицы к трапециевидной форме приводят при помощи алгоритма Гаусса. Идея алгоритма Гаусса состоит в том, что, умножая элементы первой строки матрицы на соответствующие множители, добиваются, чтобы все элементы первого столбца, расположенные ниже элемента a_{11}, обратились в нуль. Затем, умножая элементы второго столбца на соответствующие множители, добиваются, чтобы все элементы второго столбца, расположенные ниже элемента a_{22}, обратились в нуль. Далее аналогично.

Задача 1.5. Определить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Для удобства применения алгоритма Гаусса поменяем местами первую и третью строки

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\end{bmatrix}.$$

Очевидно, что здесь $r(A)=2$. Однако, для приведения результата к более изящному виду можно далее продолжить преобразования над столбцами:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 9 & 7 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 9 & 7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & -5\\ 0 & 1 & 9 & 0\end{bmatrix}\sim$$
$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 9 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -11\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Тема 1.2. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\qquad(1.2)$$

Совокупность чисел $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, которые, будучи подставленными в систему (1.2) вместо неизвестных, обращают все уравнения СЛАУ в числовые тождества, называется *решением системы*.

Если система (1.2) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*.

Совместная система может обладать либо единственным решением, либо бесчисленным множеством решений.

Пусть A - матрица коэффициентов системы, $\overline{X}$ - вектор-столбец неизвестных, $\overline{B}$ - вектор-столбец свободных членов. Тогда в матричном виде система запишется в виде

$$A\overline{X} = \overline{B}$$

Если количество уравнений m равно количеству неизвестных n, система имеет квадратную матрицу A порядка n. Определитель $\Delta = \det A$ называется *определителем системы*.

Правило Крамера

Теорема 1.6.Если определитель системы $\Delta = \det A$ отличен от нуля (т. е. r(A) = n), то система совместна и имеет единственное решение, которое определяется по формулам:

$$x_j = \frac{\Delta_j(B)}{\Delta} \qquad (j = 1, 2, ..., n), \qquad (1.3)$$

где $\Delta_j(B)$ есть определитель, полученный из определителя системы Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Формулы (1.3) называются *формулами Крамера*.

Доказательство

Поскольку $\Delta \neq 0$, матрица A коэффициентов системы невырожденная и имеет обратную матрицу A^{-1}, причем A^{-1} является единственной.

Умножим левую и правую части системы AX = B на A^{-1} слева. Получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$, откуда $EX = A^{-1}B$ и, окончательно,

$$X = A^{-1}B \qquad (1.4)$$

Решение (1.4) – единственное решение СЛАУ в силу единственности существования обратной матрицы.

Запишем равенство (1.4) в координатной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1}) \\ \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \ldots + b_n A_{n2}) \\ \ldots \\ \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \ldots + b_n A_{nn}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1(B)}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2(B)}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n(B)}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Выражение $b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ...+ b_nA_{nj}$ есть разложение определителя $\Delta_j(B)$ по элементам j-го столбца (теорема Лапласа).

Таким образом, $x_j = \dfrac{\Delta_j(B)}{\Delta}$ (j = 1, 2, ..., n).

<u>Задача 1.6</u>. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение

Найдем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 * (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2-6) = 4$$

$\Delta \neq 0$, следовательно, система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера. Вычислим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 * (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6-10) = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1 * (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 5 = 8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 * (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5-9) = 4.$$

Тогда решение СЛАУ

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1.$$

Матричный метод

Для систем с невырожденной квадратной матрицей коэффициентов системы довольно часто используют матричный метод.

Итак, пусть система уравнений заданная своей матричной формой записи:

$$A \cdot X = B.$$

В соответствии с условием задачи матрица A есть невырожденной, тогда у нее существует обратная матрица A^{-1}, причем такая матрица будет единственной.

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B;$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B;$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B;$$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Последнее соотношение задает матричную форму решения систем линейных алгебраических уравнений размерностей $n \times n$ с невырожденной матрицей коэффициентов A.

<u>Задача 1.7.</u> Найти решение СЛАУ матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение

Вычислим определитель матрицы коэффициентов системы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то исходная система имеет единственное решение.

На следующем этапе необходимо найти обратную матрицу A^{-1} к матрице коэффициентов системы A.

Для этого найдем соответствующие алгебраические дополнения.

$$A_{11} = -1;\ \ A_{12} = 5;\ \ A_{13} = -6;$$

$$A_{21} = 2;\ \ A_{22} = -8;\ \ A_{23} = 6;$$

$$A_{31} = -1;\ \ A_{32} = 3;\ \ A_{33} = -2.$$

Присоединенная матрица будет иметь вид

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 5 & -8 & 3\\ -6 & 6 & -2\end{bmatrix}.$$

Обратная матрица определяется таким образом:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2}\\ 3 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

Непосредственно решение исходной системы найдем из соотношения:

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2}\\ 3 & -3 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 2\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 7\\ -8\end{bmatrix}.$$

Итак, $x_1=-1\ x_2=7$, $x_3=-8$.

Проверка:

$$\begin{cases}-1+7-8=-2\\ 4\cdot(-1)+2\cdot 7+(-8)=2\\ 9\cdot(-1)+3\cdot 7+(-8)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2 & \equiv & -2\\ 2 & \equiv & 2\\ 4 & \equiv & 4\end{cases}$$

СЛАУ решена верно.

Метод Гаусса

Метод Гаусса, его еще называют методом гауссовых исключений, состоит в том, что систему n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

относительно n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ сводят последовательными исключениями неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'x_3 + \ldots + a_{1n}'x_n = b_1' \\ x_2 + a_{23}'x_3 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ .... \\ x_n = b_n' \end{cases}$$

Процесс сведения исходной системы к эквивалентной форме называется прямым ходом метода Гаусса. Прямой ход метода Гаусса выполняется с помощью аппарата элементарных преобразований. Заметим, что в данном случае элементарные преобразования применяются только для строк исходной системы. С другой стороны, необходимо отметить, что, если в исходной системе матрица коэффициентов невырождена, то такую систему уравнений к треугольной форме сводят всегда.

Обратный ход метода Гаусса состоит непосредственно в определении корней системы уравнений, которые находят по рекуррентным соотношениями

$$x_n = b_n'; \quad x_i = b_i' - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}'x_k .$$

Для удобства вычислений элементарные преобразования исходной системы выполняют относительно ее матричной формы. Поэтому записывают расширенную матричную систему

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}.$$

Далее прямым ходом метода Гаусса сводят ее к виду:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & a_{13}' & \dots & a_{1n}' & | & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}' & \dots & a_{2n}' & | & b_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & | & b_m' \end{bmatrix}.$$

На основании такой матрицы записывают эквивалентную систему уравнений и, используя рекуррентные соотношения, определяют корни исходной системы. Проиллюстрируем применения аппарата метода Гаусса для конкретного примера.

<u>Задача 1.8.</u> Методом Гаусса решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \\ 9x_1 + 3x_2 + x_3 = -8 \end{cases}$$

Решение

Запишем расширенную матрицу коэффициентов системы и с помощью элементарных преобразований над строками сведем ее к треугольной форме.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 4 & 2 & 1 & | & -4 \\ 9 & 3 & 1 & | & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & -2 & -3 & | & 4 \\ 9 & 3 & 1 & | & -8 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & -2 & -3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, прямой ход метода Гаусса завершен. Для реализации обратного хода на основе последней матрицы запишем эквивалентную систему к заданной.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ -2x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

Реализуя обратный ход метода Гаусса, определяют непосредственно корни исходной системы. В самом деле, из последнего соотношения эквивалентной матрицы значит, что $x_3 = -2$. После подстановки x_3 в предпоследнее уравнение имеем

$$x_2 + \frac{2}{3} \cdot (-2) = -2\,; \quad x_2 = 1$$

В конце концов, из первого равенства имеем:

$$x_1 + 1 - 2 = -2\ ; \quad x_1 = -1.$$

Итак, исходная система имеет решение:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -2.$$

Тема 1.3. Общее исследование систем линейных алгебраических уравнений

При решении систем линейных алгебраических уравнений довольно часто может оказаться, что определитель матрицы коэффициентов системы превращается в нуль или число уравнений m не равняется числу неизвестных n, то есть $m \neq n$. В связи с отмеченным, необходимо заметить, что решение любой системы линейных алгебраических уравнений должно начинаться из выяснения вопроса о ее совместности. Итак, решению системы уравнений должны предшествовать исследования, которые проводятся по такой схеме:

1. Исследовать, является исходная система уравнений совместной или несовместной (то есть, имеет ли исходная система решения вообще).

2. Если исходная система совместная, то необходимо исследовать, имеет такая система единственное решение или их бесчисленное множество.

3. Если система совместная и имеет единственное решение, то определить его известными методами.

4. Если совместная система имеет бесчисленное множество решений, то необходимо описать всю совокупность решений.

Пусть задан общий вид системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.4)$$

Вопрос о совместности СЛАУ определяется теоремой Кронекера–Капелли. В отличие от теоремы Крамера, эта теорема не является конструктивной, поскольку она не дает соотношений для определения корней системы уравнений. Тем не менее, она имеет очень важное практическое значение.

Теорема Кронекера- Капелли. Система линейных алгебраических уравнений (1.4) совместная тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов систем уравнений равняется рангу расширенной матрицы: $r(A) = r(\overline{A})$.

Доказательство

Доказательство необходимых условий

Предположим, что система совместная, то есть существует, по крайней мере, одно решение $x_1 = l_1$, $x_2 = l_2$, …, $x_n = l_n$. Подставим эти значения в систему, которая представляется формулой (1.4):

$$A_1 l_1 + \mathrm{A}_2 l_2 + \ + \mathrm{A}_n l_n = \mathrm{B}\,. \tag{1.5}$$

Соотношение (1.5) означает, что столбец *B* есть линейной комбинацией столбцов A_1, A_2, …, A_n... Если исключить столбец *B* из расширенной матрицы, то ее ранг не изменится и $\overline{\mathrm{A}}$ превратится в *A*.

Таким образом, $r(A) = r(\overline{\mathrm{A}})$.

Доказательство достаточных условий

Пусть $r(A) = r(\overline{\mathrm{A}})$. Рассмотрим *r* базисных столбцов матрицы *A*; они будут базисными столбцами и для матрицы $\overline{\mathrm{A}}$. Пусть это будут столбцы A_1, A_2, …, A_r. В соответствии с теоремой о базисном миноре всякий столбец матрицы есть линейной комбинацией ее базисных столбцов. Это означает, что для столбца свободных членов *B* будет справедливой равенство

$$A_1 l_1 + \mathrm{A}_2 l_2 + \ + \mathrm{A}_r l_r = \mathrm{B}\ .$$

Теорема доказана.

Снова рассмотрим систему (1.4). Если $r(A) \neq r(\overline{\mathrm{A}})$, то такая система несовместная. Пусть $r(A) = r(\overline{\mathrm{A}}) = r$.

<u>Определение 1.19.</u> Рангом совместной системы линейных алгебраических уравнений называется ранг ее матрицы $r(A)$.

Предположим, что система (1.4) совместная и ранг ее равняется r.

Отделим в матрицы A системы (1.4) некоторый базисный минор M. Без ограничения общности соображений можно предположить, что он состоит из первых r строк и первых r столбцов матрицы A, то есть:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}. \qquad (1.6)$$

В расширенной матрице $\overline{A}$ базисными строками, которые отвечают этому минору, будут первые r строк. В соответствии с теоремой о базисном миноре всякая строка матрицы $\overline{A}$ есть линейной комбинацией ее базисных строк, то есть

$$(a_{i1}a_{i2}\dots a_{in}b)_i =$$
$$= l_1(a_{11}a_{12}\quad a_{1n}b_1) + \quad + l_r(a_{r1}a_{r2}\quad a_{rn}b_r) \qquad (1.7)$$

Помножим первое уравнение системы на l_1, второе на l_2, …, r-е на l_r и сложим их между собою. Причем отделим слагаемые, которые содержат x_1, x_2, …, x_r .

При этом получим:

$$x_1(l_1a_{11} + ... + l_ra_{r1}) + x_2(l_1a_{12} + ... + l_ra_{r2}) + ... + x_n(l_1a_{n2} +$$
$$+ ... + l_ra_{rn}) = l_1b_1 + ... + l_rb_r$$

В соответствии с (1.7) это эквивалентно

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i .$$

Таким образом, любое i-е уравнение системы (1.4) является линейной комбинацией первых r базисных уравнений. То есть любое i-е уравнение есть следствием базисных уравнений. Таким образом, система, которая складывается только из базисных уравнений, эквивалентная исходной системе (1.4). Эта система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_3 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{1.8}$$

Итак, вместо системы (1.5) можно решать систему (1.8), которая состоит только из линейно независимых (базисных) уравнений.

Сравним ранг СЛАУ r с количеством неизвестных. Очевидно, что возможно только два варианта: или $r = n$, или $r < n$. Рассмотрим их.

Вариант, когда $r = n$**.** Итак, если $r = n$, система (1.4) удовлетворяет условиям теоремы Крамера с $\Delta = M \neq 0$ и будет иметь единственное решение.

Вариант, когда $r < n$**.** В системе (1.8)предоставим неизвестным x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n произвольные числовые значения l_{r+1}, l_{r+2}, …, l_n и перенесем их в правую часть. В таком случае система (1.8) будет иметь вид:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1,r} + 1l_1 + \ldots + a_{1n}l_n) \\
a_{21}x_1 + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2,r} + 1l_1 + \ldots + a_{2n}l_n) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{r1}x_1 + a_{rr}x_r = b_r - (a_{r,r} + 1l_r + \ldots + a_{rn}l_n)
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

Систему (1.9) можно рассматривать как систему r уравнений с r неизвестными. Определитель системы $\Delta = M \neq 0$.

Таким образом, для каждого конкретного набора значений l_{r+1}, l_{r+2}, …, l_n система имеет единственное решение. Тем не менее разных наборов значений l_{r+1}, l_{r+2}, …, l_n может быть неисчислимое множество. Каждому такому набору отвечает один-единственный набор значений x_1, x_2, …, x_r. Итак, тогда система уравнений будет иметь бесчисленное множество решений.

Заметим, что при этом переменные x_1, x_2, …, x_r называют базисными переменными, а переменные x_{r+1}, x_{r+2}, …, x_n называют свободными переменными.

Приведенные соображения доказывают такие утверждения.

Утверждение 1.1. Система линейных алгебраических уравнений имеет одно- единственное решение, если ранг совместной системы r равняется числу неизвестных n $(r = n)$.

Утверждение 1.2. Система линейных алгебраических уравнений имеет бесчисленное множество решений, если ранг совместной системы r меньше числа неизвестных n $(r < n)$.

На практике процедуру исследования систем линейных алгебраических уравнений проводят следующим образом.

Пусть система уравнений задается соотношением (1.4). Дальнейшие исследования проводят с расширенной матрицей системы:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & | & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & | & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mn} & | & \beta_m \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что в данном случае имеет место соотношение $r < n$. Такая матрица с помощью гауссовых исключений сводится к ступенчатому виду.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{1,r+1} & \ldots & c_{1n} & | & b_1' \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{2,r+1} & \ldots & c_{2n} & | & b_2' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{r,r+1} & \ldots & c_{rn} & | & b_r' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда соответствующая эквивалентная система будет представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n = b_1' \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n = b_2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = b_r' \end{cases}$$

В таком случае задача исследования системы состоит в том, чтобы описать ее общее решение. Для этого необходимо базисные переменные выразить через свободные. Итак, имеем

$$\begin{cases} x_1 = b_1' - c_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n \\ x_2 = b_2' - c_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = b_r' - c_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{rn}x_n \end{cases}$$

Последнее соотношение и определяет общее решение системы. Положив свободные сменные равными нулю, $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 0$, …, $x_n = 0$ и вычислив значения базисных переменных, получают одно из частных решений исследуемой системы

$$x_1 = b_1';\quad x_2 = b_2';\ \ldots;\ x_r = b_r',$$
$$x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 0,\ \ldots,\ x_n = 0.$$

Непосредственно процесс исследования системы проиллюстрируем на примере.

Задача1.9. Выполнить общее исследование системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,\ = 1. \\ 5x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 \end{cases}$$

Решение

1. Выпишем расширенную матрицу системы и выполним соответствующие гауссовые исключения.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & | & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & | & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{7}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{14}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{7}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right].$$

2. На основании анализа матрицы

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{14}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{7}{11} & \frac{2}{11} \end{array}\right]$$

получим:

а) $r(A) = 2$; $r(A,\bar{\ }) = 2$. Таким образом, $r(A) = r(A,\bar{\ })$ и исходная система совместная;

б) $r = 2$; $n = 4$. Итак, исходная система будет иметь бесчисленное множество решений, и ее исследование будет состоять в том, чтобы описать это множество;

в) исходная система имеет две $(r = 2)$ базисные переменные и две $(n - r = 4 - 2 = 2)$ свободные переменные.

3. На основании матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{11} & -\frac{2}{11} & | & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & \frac{6}{11} & \frac{7}{11} & | & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

можно записать систему, эквивалентную исходной:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + \frac{14}{11}x_3 - \frac{2}{11}x_4 = \frac{1}{11} \\ x_2 + \frac{6}{11}x_3 + \frac{7}{11}x_4 = \frac{2}{11} \end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что за базисные переменные следует принять переменные x_1 и x_2, а свободными будут переменные x_3 и x_4.

4. Опишем общее решение исходной системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \frac{1}{11} - \frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 \\ x_2 = \frac{2}{11} - \frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 \end{aligned}\right\}$$

5. Проверку правильности найденного решения выполним по одному из базисных уравнений системы, например, по первому:

$$\frac{1}{11} - \frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 + \frac{10}{11} - \frac{30}{11}x_3 - \frac{35}{11}x_4 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \Rightarrow 1 \equiv 1$$

Итак, общее решение системы найдено верно.

6. Опишем некоторую совокупность частных решений. Для этого свободным переменным x_3, x_4 предоставим некоторые числовые значения и вычислим значения базисных переменных x_1, x_2 Результаты внесем в таблицу.

x_1	x_2	x_3	x_4
1/11	2/11	0	0
-3/11	-4/11	1	0
-1	1	1	1

Раздел 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 2.1. Векторы. Основные понятия и определения

В математике и ее приложениях встречаются различные величины. Некоторые из них (длина, площадь, объем, масса) полностью определяются числом. Такие величины называют скалярными. Для определения других величин одного числового значения недостаточно, необходимо еще указать и присущее им направление (к таким величинам относят силу, скорость, ускорение и т. д.). Такие величины называют векторными.

Определение 2.1. Отрезок прямой линии называют *направленным отрезком* или *вектором*, если указано, какой из его концов считают за начало, а какой за конец.

Графически векторы обозначают следующим образом:

Длину вектора обычно называют его *модулем* и обозначают $|\overline{a}|$, $|\overline{AB}|$.

Определение 2.2. Векторы, лежащие на параллельных прямых, называются ***коллинеарными***.

Определение 2.3. Векторы называются ***компланарными***, если они после сведения к общему началу лежат в одной плоскости.

Проекция вектора на ось

Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось OX употребляется в двух понятиях: геометрическом и алгебраическом.

Определение 2.4. *Векторной проекцией* вектора $\overline{AB}$ на ось OX называется вектор $\overline{A_1B_1}$, где A_1 и B_1 соответственно проекции точек начала и конца вектора (рис. 2.1).

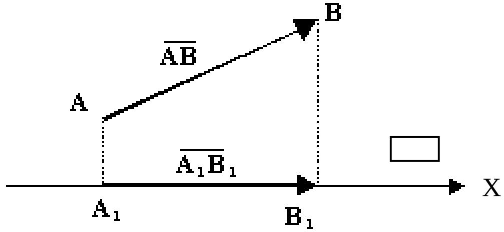

Рис. 2.1.

<u>Определение 2.5.</u> *Скалярной проекцией* вектора $\overline{AB}$ на ось OX называется длина вектора $\overline{A_1B_1}$, взятая со знаком плюс (если направления вектора $\overline{A_1B_1}$ и оси OX совпадают) или минус (если направления вектора $\overline{A_1B_1}$ и оси OX противоположны). В соответствии с приведенным определением имеем:

$$ПР_{OX}\,\overline{AB} = \begin{cases} \left|\overline{A_1B_1}\right|, \text{ если } \overline{A_1B_1} \uparrow\uparrow OX \\ -\left|\overline{A_1B_1}\right|, \text{ если } \overline{A_1B_1} \uparrow\downarrow OX \end{cases}.$$

Непосредственно процесс вычисления алгебраической проекции вектора на ось осуществляется путем применения теоремы 2.1.

<u>Теорема 2.1.</u> Проекция вектора $\overline{AB}$ на ось OX равна произведению модуля вектора $\overline{AB}$ на косинус угла между вектором $\overline{AB}$ и осью OX.

В соответствии с приведенной теоремой, имеем

$$ПР_{OX}\,\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos j\ .$$

Здесь φ - угол между вектором $\overline{AB}$ и осью OX.

<u>Теорема 2.2.</u> Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых на ту же ось. В соответствии с теоремой имеем

$$ПР_{OX}\left(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\right) = ПР_{OX}\,\overline{a} + ПР_{OX}\,\overline{b} + ПР_{OX}\,\overline{c}\,.$$

Линейная зависимость векторов

Применяя линейные операции над векторами $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$, можно составлять выражения вида:

$$l_1\overline{a}_1 + l_2\overline{a}_2 + l_3\overline{a}_3 + ... + l_n\overline{a}_n\,,$$

которые называются линейными комбинациями векторов, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$ - числа, называемые коэффициентами линейной комбинации.

Определение 2.6. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, тогда и только тогда, когда существуют действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$, не все равные нулю одновременно, для которых имеет место равенство:

$$l_1\overline{a}_1 + l_2\overline{a}_2 + l_3\overline{a}_3 + ... + l_n\overline{a}_n = 0$$

Определение 2.7. Векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если их линейная комбинация обращается в нуль только при равенстве нулю всех коэффициентов линейной комбинации.

Заметим, что совокупность векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ называют *системой векторов*.

Условия линейной зависимости векторов представим в виде следующих теорем.

Теорема 2.3. Система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда, по крайней мере, один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Теорема 2.4. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Теорема 2.5. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Тема 2.2. Векторный базис. Координаты вектора

Определение 2.8. Упорядоченная система линейно независимых векторов векторного пространства называется его *базисом*, если любой вектор этого пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Число векторов, которые образуют базис, называется размерностью пространства.

Отметим следующие фундаментальные утверждения.

Утверждение 2.1. Любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ образует базис в пространстве.

Утверждение 2.2. Любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, принадлежащих данной плоскости, образует базис на этой плоскости.

Геометрическая интерпретация векторного базиса в пространстве представлена на рис. 2.2.

Здесь $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - векторы, образующие базис в пространстве.

Вектор $\bar{a}$ - произвольный вектор пространства. При этом очевидно, что

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3 .$$

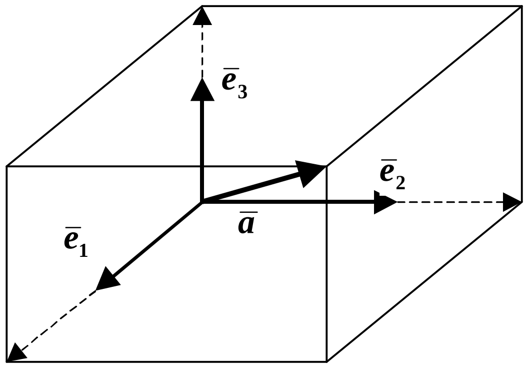

Рис. 2.2.

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - произвольный базис в пространстве. Тогда для любого вектора $\bar{a}$ существуют действительные числа X,Y,Z такие, что выполняется равенство:

$$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3 \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) принято называть разложением вектора $\bar{a}$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, а упорядоченную систему чисел x, y, z - координатами вектора $\bar{a}$ в этом базисе.

Теорема 2.6. Каждый вектор векторного пространства однозначно раскладывается по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Следствие теоремы 2.6. Равные векторы имеют равные соответствующие координаты в данном базисе, и, наоборот, если соответствующие координаты двух векторов в некотором базисе равны, то равны и сами векторы.

Арифметические операции над векторами, заданными своими координатами, выполняется в соответствии с теоремой 2.7.

Теорема 2.7. При сложении векторов их соответствующие координаты в произвольном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ складываются, а при умножении вектора на произвольное число α, каждая координата умножается на это число.

Таким образом, если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ представлены в некотором базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

$$\bar{a} = x_1\bar{e}_1 + y_1\bar{e}_2 + z_1\bar{e}_3,$$

$$\bar{b} = x_2\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + z_2\bar{e}_3,$$

то в соответствии с теоремой 2.7

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2)\bar{e}_1 + (y_1 \pm y_2)\bar{e}_2 + (z_1 \pm z_2)\bar{e}_3,$$

$$\alpha\bar{a} = (\alpha x_1)\bar{e}_1 + (\alpha y_1)\bar{e}_2 + (\alpha z_1)\bar{e}_3.$$

Аффинная система координат

Афинная система координат в пространстве определяется заданием базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ с общим началом в фиксированной точке O, которая называется *началом координат*.

Прямые линии, которые проходят через начало координат в направлении базисных векторов, называются *осями координат*. Оси, как правило, обозначают символами X, Y, Z и называют соответственно осями абсцисс, ординат, аппликат (Рис. 2.3).

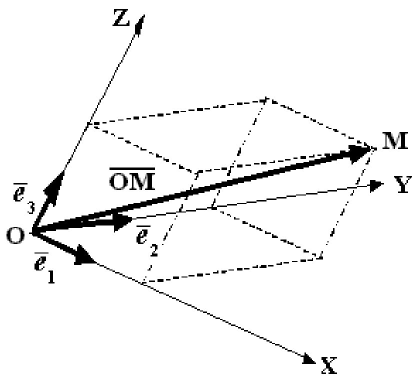

Рис. 2.3.

Вектор $\overline{OM}$, который соединяет начало координат с произвольной точкой M, называется радиус-вектором точки M.

Определение 2.9. *Аффинными координатами* точки M называют координаты его радиус-вектора $\overline{OM}$ в данном базисе.

При этом записывают $\overline{\mathrm{OM}} = \{\mathrm{x}, y, \mathrm{z}\}$ или $\overline{\mathrm{OM}} = (\mathrm{x}, y, z)$.

Декартова прямоугольная система координат (ДПСК)

Базис называют *ортонормированным*, если его векторы единичные и попарно-ортогональные.

Система координат, базис которой ортонормированный, называется *декартовой прямоугольной системой координат (ДПСК)*. Базисные векторы этой системы координат в пространстве обозначаются соответственно $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

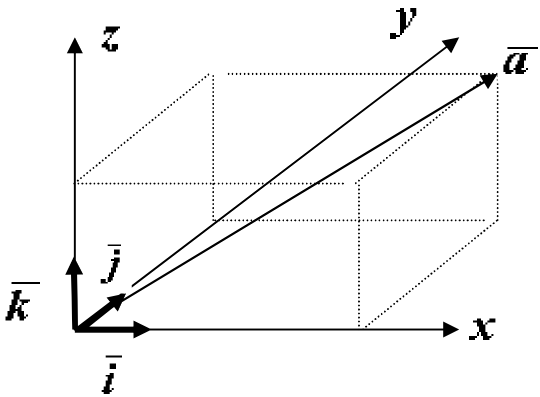

Рис. 2.4.

Разложение произвольного вектора $\bar{a}$ в ДПСК имеет вид:

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \text{ или } \bar{a}\{x, y, z\}, \text{ или } \bar{a} = (x; y; z).$$

В общем случае, *прямоугольными координатами* вектора $\bar{a}$ называются алгебраические проекции вектора $\bar{a}$ на оси координат.

Рассмотрим некоторые задачи.

Задача 2.1. Выяснить, будут ли векторы $\bar{x}_1 = (-3;1;5)$ и $\bar{x}_2 = (9;-3;15)$ линейно зависимыми.

Решение

Два вектора будут линейно зависимыми тогда и только тогда, когда существуют числа λ_1 и λ_2, хотя бы одно из которых не равно нулю, для которых справедливо равенство:

$$l_1\bar{x}_1 + l_2\bar{x}_2 = \bar{0}$$

Запишем последнее равенство в координатной форме

$$l_1\{-3; 1; 5\} + l_2\{9; -3; -15\} = \{0, 0, 0\}.$$

Выполняя операции умножения вектора на число и сложения векторов, получим:

$$\{-3l_1 + 9l_2;\ l_1 - 3l_2; 5l_1 - 15l_2\} = \{0, 0, 0\}.$$

Из последнего соотношения получаем систему:

$$\begin{cases} -3\lambda_1 + 9\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 - 15\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

При этом, имеем $\lambda_1 = 3\lambda_2$, или

$$3\lambda_2\bar{x}_1 + \lambda_2\bar{x}_2 = 0,$$

т.е.

$$\bar{x}_2 = -3\bar{x}_1.$$

Таким образом, векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ линейно зависимы.

<u>Задача 2.2.</u> Могут ли векторы $\bar{x}_1 = (2; -3; 1)$, $\bar{x}_2 = (3; -1; 5)$ и $\bar{x}_3 = (1; -4; 3)$ образовывать базис?

Решение

Векторы $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$ будут образовывать базис, если они линейно независимы. При этом имеем:

$$a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + a_3\bar{x}_3 = \bar{0}$$

при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Представляя линейную комбинацию заданных векторов в координатной форме, получим:

$$a_1\{2; -3; 1\} + a_2\{3; -1; 5\} + a_3\{1; -4; 3\} = \{0; 0; 0\},$$

Упрощая последнее выражение, придем к соотношению:

$$\{2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3;\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3;\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3\} = \{0;\ 0;\ 0\},$$

Для определения α_1, α_2 α_3 составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 & +3\alpha_2 & +\alpha_3 & =0 \\ -3\alpha_1 & -\alpha_2 & -4\alpha_3 & =0 \\ \alpha_1 & +5\alpha_2 & +3\alpha_3 & =0 \end{cases}$$

Определитель системы имеет вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 35 \neq 0$$

Следовательно, представленная однородная система уравнений имеет единственное нулевое решение:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Таким образом, исходная система векторов линейно независима, а, значит, образует базис в пространстве. Причем, этот базис будет аффинным.

<u>Задача 2.3.</u> Векторы $\bar{a} = (1; 0; 0), \bar{b} = (1; 1; 0), \bar{c} = (1; 1; 1)$ образуют базис в пространстве. Найти координаты вектора $\bar{d} = 2\bar{i} - \bar{k}$ в этом базисе.

Решение

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис в пространстве, то произвольный вектор $\bar{d}$ можно представить в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ следующим образом:

$$\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}.$$

При этом имеют

$$\{2; 0; -1\} = a\{1; 0; 0\} + b\{1; 1; 0\} + g\{1; 1; 1\}$$

или

$$\{2; 0; -1\} = \{a + b + g;\ b + g;\ g\}$$

Приравнивая соответствующие координаты векторов, получим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$\alpha = 2;\ \beta = 1;\ \gamma = -1 .$$

Таким образом, вектор $\overline{d}$ в исходном базисе имеет координаты: $\overline{d} = (2; 1; -1)$, а его разложение в базисе $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ записывается в виде:

$$\overline{d} = 2\overline{a} + \overline{b} - \overline{c} .$$

Выражение вектора через радиус-векторы

его начала и конца

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат задан произвольный вектор $\overline{AB}$. При этом точки его начала и конца имеют следующие координаты $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 2.5).

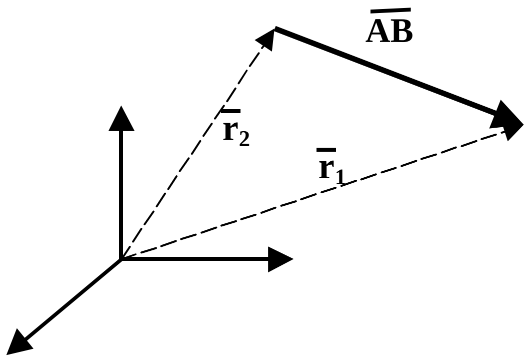

Рис. 2.5

Тогда $\overline{AB} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1$ или в координатной форме

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Вывод: Чтобы определить координаты вектора $\overline{AB}$, необходимо из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала.

Тема 2.3. Скалярное произведение векторов

Определение 2.10. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ обозначается $\bar{a} \cdot \bar{b}$ или $(\bar{a}, \bar{b})$. Таким образом, в соответствии с определением, имеем

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Теорема 2.8. Если два вектора заданы своими декартовыми прямоугольными координатами

$$\bar{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ и } \bar{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

то их скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат, т.е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{2.2}$$

Некоторые приложения скалярного произведения

а) Вычисление модуля вектора

Если положить, что $\bar{a} = \bar{b}$, то из соотношения (2.2) имеем

$$(\bar{a}, \bar{a}) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = |\bar{a}|^2,$$

откуда определяем модуль вектора $\bar{a}$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

б) Нахождение угла между векторами

Скалярным произведением двух векторов можно воспользоваться для вычисления угла между векторами:

$$\cos j = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Направляющие косинусы вектора

Обозначив через α, β, и γ углы между вектором $\bar{a}$ и векторами $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ соответственно, можно определить углы между заданным вектором и соответствующими осями координат. При этом:

$$\cos a = \frac{x_1}{\left|\bar{a}\right|};\ \cos b = \frac{y_1}{\left|\bar{a}\right|};\ \cos g = \frac{z_1}{\left|\bar{a}\right|}.$$

Для направляющих косинусов справедливо соотношение

$$\cos^2 a \in \cos^2 b + \cos^2 g = 1.$$

<u>Задача 2.4.</u> Даны координаты вершин треугольника $ABC: A(0;1;2),\ B(1;3;2),\ C(1;-1;-2)$. Средствами векторной алгебры найти длину стороны AB и внутренний угол А.

Решение

а) Определим длину стороны AB. Найдем координаты вектора $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \left((1-0);\ (3-1);\ (2-2)\right) = \left(1;\ 2;\ 0\right)$$

или

$$\overline{AB} = \bar{i} + 2\bar{j}.$$

Далее имеем:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5} \text{ (лин. ед.)}$$

б) Определим угол между сторонами AB и AC.

Задача сводится к определению угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = \left(1;\ 2;\ 0\right)\quad \overline{AC} = \left((1-0);\ (1-1);\ (-2-2)\right) = \left(1;\ -2;\ -4\right).$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + (-4)\cdot 0}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{21}} = -\frac{3}{\sqrt{105}}$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{105}}\right) \approx 1{,}868$$

Тема 2.4. Прямая на плоскости

Две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из которых указано положительное направление и масштаб, образуют прямоугольную декартову систему координат (рис. 2.6). :

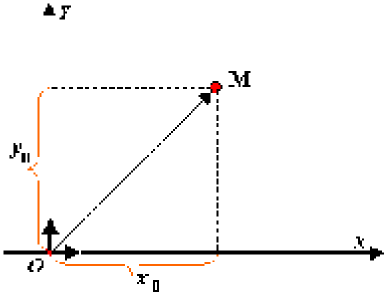

Рис. 2.6.

Точка O называется началом координат, ось OX - осью абсцисс, ось OY -осью ординат. Положение на плоскости любой точки M определяется двумя числами (координатами): x_0 и y_0 (рис.2.6).

<u>Теорема 2.9.</u> Расстояние d между точками $A(x_1;\, y_1)$ и $B(x_2;\, y_2)$ (рис.2.7) измеряется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

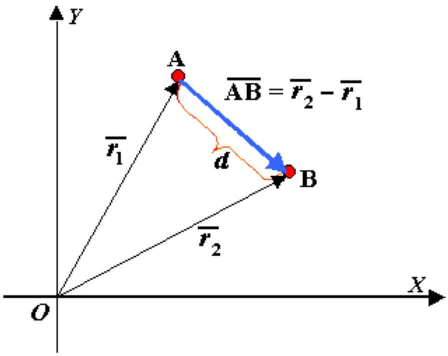

Рис. 2.7.

Теорема 2.10. Если точка $C(x_3;\, y_3)$ делит отрезок AB в отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$ (λ называется коэффициентом пропорциональности), то ее координаты находят так;

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Следствие В частном случае, когда отрезок делится пополам, $\lambda = 1$, получим так называемые формулы половинного деления:

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Теорема 2.11. Площадь треугольника S с известными вершинами A, B и C равна;

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \right|$$

В декартовом базисе прямая изображается уравнением первой степени с двумя неизвестными x и y

Рассмотрим различные формы задания уравнения прямой на плоскости.

Теорема 2.12. В прямоугольной системе координат OXY любая прямая задается уравнением первой степени, называемым ***общим уравнением прямой***

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B, C - постоянные коэффициенты, причем $A^2 + B^2 \neq 0$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$y = kx + b$$

Здесь параметры k и b имеют определенный геометрический смысл (рис 2.8).

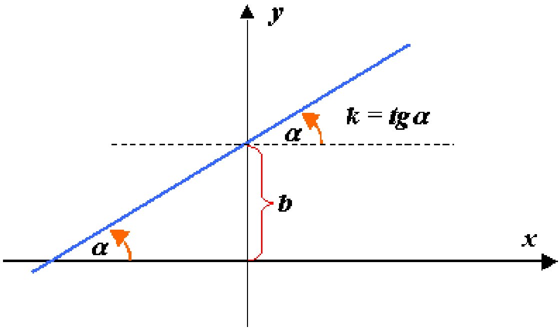

Рис. 2.8.

$k = tg\alpha$ и называется *угловым коэффициентом*.

α - угол, образованный прямой с положительным направлением OX. В качестве положительного направления измерения угла α принято направление против хода часовой стрелки (рис. 2.8).

b – отрезок, отсекаемый прямой на оси ординат.

Выполнив несложные алгебраические преобразования, можно от общего уравнения прямой перейти к уравнению прямой с угловым коэффициентом. При этом

$$k = -\frac{A}{B}, \qquad b = -\frac{C}{B}$$

Уравнение прямой в отрезка на осях выглядит так:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Здесь a и b- отрезки, отсекаемые прямой на осях абсцисс и ординат соответственно. Их связь с коэффициентами общего уравнения

$$a = -\frac{C}{A}, \qquad b = -\frac{C}{B}.$$

В этой форме можно представить уравнение прямой, не проходящей через начало координат, т.е. если $C \neq 0$.

***Нормальное уравнение прямой*:**

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0\,.$$

Геометрический смысл коэффициентов этого уравнения:

p - длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую; φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси OX (рис. 2.9.).

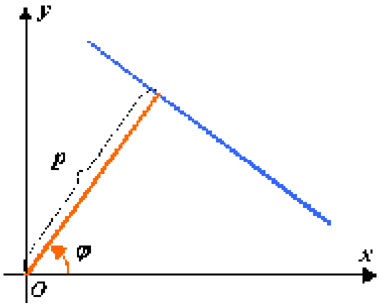

Рис. 2.9.

Чтобы перейти к этому виду уравнения прямой, необходимо умножить все члены общего уравнения на нормирующий множитель

$$m = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Знак μ выбирается таким образом, чтобы

$$\mu C < 0\,.$$

Уравнение пучка прямых описывает множество прямых, проходящих через точку $A(x_1; y_1)$ с известными координатами:

$$y - y_1 = k(x - x_1)\,.$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Угол между прямыми φ в зависимости от формы задания уравнений прямых может быть найден по формулам:

$$tg\,j = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \qquad . \qquad tg\,j = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Здесь угол φ измеряется от прямой с угловым коэффициентом k_1 до прямой с угловым коэффициентом k_2 (рис. 2.10.):

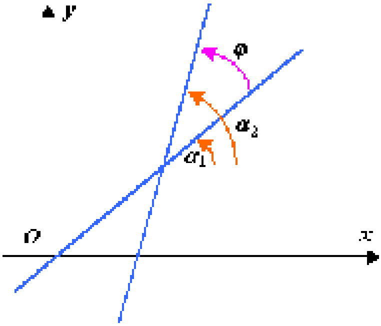

Рис. 2.10.

Из этих формул легко выводятся условия *параллельности*

$$k_1 = k_2 \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

и *перпендикулярности* прямых:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Координаты *точки пересечения* двух прямых определяются как решение системы, составленной из уравнений этих прямых.

Теорема 2.13. Расстояние d от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ (или $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$) определяется по формулам:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ или } d = |x_0\cos\varphi + y_0\sin\varphi - p|.$$

Задача 2.5. Дано общее уравнение прямой $2x - 3y + 18 = 0$.

Написать: а) уравнение с угловым коэффициентом; б) уравнение в отрезках; в) нормальное уравнение. Построить прямую.

Решение

а) Оставим член с y слева, а остальные перенесем в правую часть уравнения. Затем разделим обе части на коэффициент при y, т.е. на (-3). В результате получим уравнение с угловым коэффициентом

$$y = \frac{2}{3}x + 6.$$

б) Исходное уравнение разрешается относительно свободного члена, а затем его левая и правая часть делится на величину свободно члена.

$$\frac{x}{-9} + \frac{y}{6} = 1.$$

в) На первом этапе определяется нормирующий множитель

$$m = \frac{1}{-\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{-\sqrt{13}}.$$

Далее левая и правая части исходного уравнения делятся на нормирующий множитель и получают нормальное уравнение вида

$$\frac{-2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{18}{\sqrt{13}} = 0.$$

<u>Задача 2.6.</u> Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4;3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник, площадью, равной 3 (кв. ед.).

Решение

Очевидно, что таких прямых будет две, а треугольники образованы во второй и четвертой четвертях (рис. 2.11.).

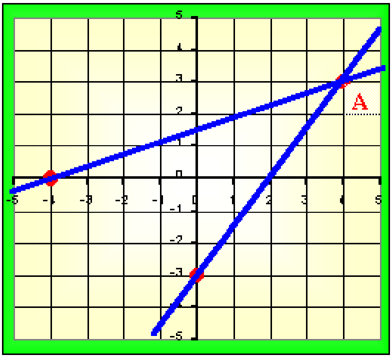

Рис. 2.11.

Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(4;3)$:

$$y-3=k(x-4)$$

Преобразуем его к уравнению в отрезках:

$$\frac{x}{\frac{4k-3}{k}}+\frac{y}{-4k+3}=1.$$

Таким образом, $a=\dfrac{4k-3}{k}$, $b=-4k+3$.

Так как a и b имеют разные знаки, то площадь указанных в условии задачи треугольников может быть найдена по формуле

$$S=\frac{1}{2}|ab|.$$

Отсюда $|ab|=2S$ или

$$\left|-\frac{(4k-3)^2}{k}\right|=6\Rightarrow 16k^2-30k+9=0.$$

Решив квадратное уравнение, найдем

$$k_1=\frac{3}{8},\quad k_2=\frac{3}{2}.$$

Тогда уравнения прямых будут иметь вид:

$$y-3=\frac{3}{8}(x-4) \quad и \quad y-3=\frac{3}{2}(x-4)$$

Задача 2.7. Дан треугольник с вершинами в точках $A(-2;0)$, $B(2;4)$ и $C(4;0)$. Написать уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD. Найти длины медианы AE и высоты AD, внутренний угол треугольника при вершине A, площадь треугольника ABC.

Решение

Построим треугольник с указанными вершинами и отметим все перечисленные элементы (рис. 2.12.).

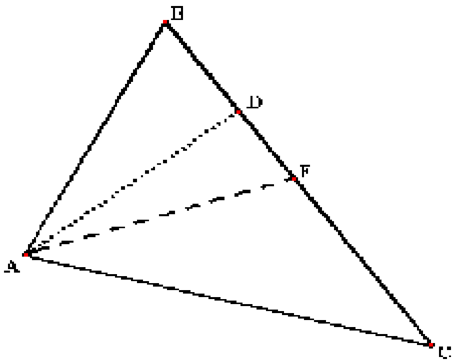

Рис. 2.12

Уравнения сторон треугольника получим, используя уравнения прямой, проходящей через две точки.

$$AB: \ \frac{y-0}{4-0}=\frac{x+2}{2+2},$$

$$\frac{y}{4}=\frac{x+2}{4},$$

$$x-y+2=0.$$

$$BC: \quad \frac{y-4}{0-4}=\frac{x-2}{4-2},$$

$$\frac{y-4}{-4}=\frac{x-2}{2},$$

$$2x+y-8=0.$$

$$AC: \frac{y-0}{0-0}=\frac{x+2}{4+2},$$

$$\frac{y}{2}=\frac{x+2}{6},$$

$$y=0.$$

Уравнение AC можно было бы записать и без таких выкладок, учитывая, что обе точки лежат на оси OX .

Для нахождения уравнения медианы AE предварительно определим координаты точки E как середины отрезка BC :

$$x=\frac{2+4}{2}=3,$$

$$y=\frac{4+0}{2}=2,$$

$$E(3;2).$$

Тогда уравнение медианы AE будет иметь вид

$$\frac{y-0}{2-0}=\frac{x+2}{3+2},$$

$$\frac{y}{2}=\frac{x+2}{5},$$

$$2x-5y+4=0.$$

Длину AE определим как расстояние между точками A и E :

$$d=\sqrt{(2+3)^2+(2-0)^2}=\sqrt{29} \text{ (лин. ед.).}$$

Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через вершину A :

$$y=k(x+2).$$

Так как высота AD перпендикулярна стороне треугольника BC, то их угловые коэффициенты связаны так:

$$k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}}.$$

Из уравнения BC легко найти $k_{BC} = -2$. Тогда $k_{AD} = \frac{1}{2}$ и уравнение высоты AD будет

$$y = \frac{1}{2}(x + 2) \text{ или}$$

$$x - 2y + 2 = 0.$$

Длину высоты AD определим как расстояние от точки A до прямой BC:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2\cdot(-2) + 1\cdot 0 - 8|}{\sqrt{4+1}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \text{ (лин. ед.)}$$

Так как мы установили общие уравнения прямых AB и AC, то воспользуемся соответствующей формулой для определения угла при вершине A треугольника ABC.

$$tg\alpha = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{-1}{-1} = 1,$$

$$\alpha = 45°.$$

Площадь треугольника ABC равна

$$S = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left| -4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|-4\cdot 6| = 12 \text{ (кв. ед.)}$$

Задача 2.8. Найти точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника, вершины которого $A(-4; 2)$, $B(2; -5)$ и $C(5; 0)$.

Решение

Строим треугольник, указываем точки пересечения его медиан (E) и высот (F) (рис. 2.13.).

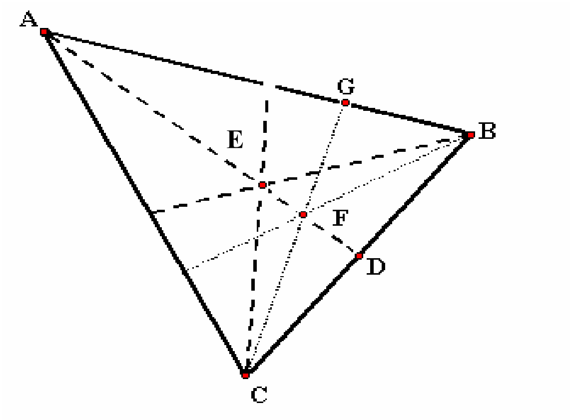

Рис.2.13.

Определим координаты точки D как координаты середины отрезка BC, воспользовавшись формулами половинного деления

$$x = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2},$$

$$y = \frac{-5+0}{2} = -\frac{5}{2},$$

$$D\left(\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right).$$

Для определения координат точки пересечения медиан E воспользуемся свойством этой точки, согласно которому она делит медиану AD в отношении $2:1$, считая от вершины, т.е. $\lambda = \frac{AE}{ED} = 2$. Тогда для точки E

$$x=\frac{-4+2\cdot\frac{7}{2}}{1+2}=1,$$

$$y=\frac{2+2\left(-\frac{5}{2}\right)}{1+2}=-1.$$

$$E(1;1).$$

Треугольник ABC является равнобедренным, так как длины сторон AB и AC равны:

$$d_1=\sqrt{(2+4)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{36+49}=\sqrt{85}\ \text{(лин. ед.)}$$

$$d_2=\sqrt{(5+4)^2+(0-2)^2}=\sqrt{81+4}=\sqrt{85}\ \text{(лин. ед.)}$$

Следовательно, медиана AD будет и высотой. Поэтому уравнение высоты AD определим как уравнение прямой, проходящей через точки A и D:

$$\frac{y-2}{-\frac{5}{2}-2}=\frac{x+4}{\frac{7}{2}+4},$$

$$\frac{y-2}{-\frac{9}{2}}=\frac{x+4}{\frac{15}{2}},$$

$$3x+5y+2=0.$$

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку C может быть записано как

$$y=k(x-5).$$

Уравнение стороны AB как уравнение прямой, проходящей через известные точки A и B:

$$\frac{y-2}{-5-2}=\frac{x+4}{2+4},$$

$$\frac{y-2}{-7}=\frac{x+4}{6},$$

$$7x+6y+16=0(AB)\textit{или}$$

$$y=-\frac{7}{6}x-\frac{8}{3},$$

отсюда $k_{AB}=-\frac{7}{6}$.

Так как высота CG перпендикулярна AB, то ее угловой коэффициент $k_{CG}=-\frac{1}{k_1}=\frac{6}{7}$ и уравнение CG будет

$$y=\frac{6}{7}(x-5) \text{ или } 6x-7y-30=0.$$

Координаты точки F пересечения высот CG и AD определим из решения системы, составленной из уравнений высот:

$$\begin{cases} 3x+5y+2=0, \\ 6x-7y-30=0. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x=\frac{8}{3}, y=-2$. Таким образом, точка пересечения высот $F\left(\frac{8}{3};-2\right)$.

Раздел 3. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тема 3.1. Понятие функции

В зависимости от условий протекания физических процессов одни величины принимают постоянные значения и называются константами, другие - изменяются в определенных условиях и называются переменными.

Внимательное изучение окружающей среды показывает, что физические величины зависимы друг от друга, т. е. изменение одних величин влечет за собой изменение других.

Математический анализ занимается изучением количественных соотношений взаимно изменяющихся величин, отвлекаясь от их конкретного физического смысла. Одним из основных понятий математического анализа есть понятие функции.

Рассмотрим элементы множества $x \in X$ и элементы множества $y \in Y$ (рис. 3.1.).

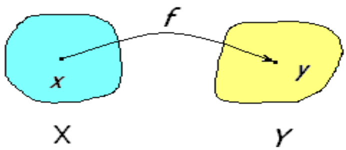

Рис. 3.1

Если устанавливается некоторое соответствие между элементами множеств X и Y в виде правила f, то тем самым отмечают, что определяется функция $y = f(x)$.

Определение 3.1. Соответствие f, которое связывает с каждым элементом x не пустого множества X некоторый, вполне определенный, элемент y непустого множества Y, называется *функцией* или отображением X в Y.

Символически отображение X в Y записывается следующим образом:

$$f : X \to Y.$$

При этом множество X называется областью определения (существования) функции и обозначается $D(f)$.

В свою очередь, множество Y называется областью значений функции и обозначается $E(f)$.

Кроме того, необходимо отметить, что элементы множества X называют независимыми переменными или аргументами, элементы множества Y называют зависимыми переменными.

Способы задания функции

Функция может задаваться следующими основными способами: табличным, графическим, аналитическим.

Если на основании экспериментальных данных составляют таблицы, в которых содержатся значения функции и соответствующие им значения аргумента, то такой способ задания функции называют табличным.

В то же время, если некоторые исследования результата эксперимента выводят на регистратор (осциллограф, самописец и т. д.), то отмечают, что функция задается графически.

Наиболее распространенным есть аналитический способ задания функции, т.е. способ, при котором с помощью формулы связывают независимую и зависимую переменные. При этом существенную роль играет область определения функции:

$$y = x^2 \qquad\qquad y = x^2$$

и

$$x \in R^1 \qquad\qquad x \in [0;+\infty)$$

разные, хотя они и задаются одинаковыми аналитическими соотношениями.

Если задают только формулу функции $y = f(x)$, то считают, что область определения этой функции совпадает с множеством тех значений переменной x, для которых выражение $f(x)$ имеет смысл. В этой связи особую роль играет проблема нахождения области определения функции.

Задача 3.1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\frac{3x-1}{2}$$

Решение

Первое слагаемое принимает действительные значения при $1-2x \ge 0$, а второе при $-1 \le (3x-1)/2 \le 1$. Таким образом, для нахождения области определения заданной функции необходимо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 1-2x \ge 0, \\ (3x-1)/2 \le 1, \\ (3x-1)/2 \ge -1. \end{cases}$$

В результате решения такой системы получают $x \le 1/2;\ x \le 1;\ x \ge -1/3$. Следовательно, область определения функции есть отрезок $[-1/3;\ 1/2]$.

Простейшие преобразования графиков функций

Построение графиков функций можно существенно упростить, если пользоваться известными графиками основных элементарных функций. Основными элементарными функциями называются следующие функции:

1) степенная функция $y = x^{\alpha}$ где $\alpha \in R^1$;

2) показательная функция $y = a^x$ где a - любое положительное число, отличное от единицы: $a > 0$ и $a \ne 1$;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, где a - любое положительное число, отличное от единицы: $a > 0$ и $a \ne 1$;

4) тригонометрические функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tgx$; $y = ctgx$; $y = \sec x$; $y = \operatorname{cosec} x$.

5)обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = arctgx$; $y = arcctgx$.

Элементарными функциями называются функции, получающиеся из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций, примененных конечное число раз.

Простые геометрические преобразования также позволяют упростить процесс построения графика функций. Эти преобразования основываются на следующих утверждениях:

1. График функции $y = f(x + a)$ есть график $y = f(x)$, сдвинутый (при $a > 0$ влево, при $a < 0$ вправо) на $|a|$ единиц параллельно оси Ох.

2. График функции $y = f(x) + b$ есть график $y = f(x)$, сдвинутый (при $b > 0$ вверх, при $b < 0$ вниз) на $| b |$ единиц параллельно оси Оу.

3. График функции $y = mf(x)$ $(m \neq 0)$ есть график $y = f(x)$, растянутый (при $m > 1$) в m раз или сжатый (при $0 < m < 1$) вдоль оси Оу. При $-\infty < m < 0$ график функции $y = mf(x)$ есть зеркальное отображение графика $y = -mf(x)$ от оси О x.

4. График функции $y = f(kx)$ есть график $y = f(x)$, сжатый (при $k > 1$) в k раз или растянутый (при $0 < k < 1$) вдоль оси Ох. При $-\infty < k < 0$ график функции $y = f(kx)$ есть зеркальное отображение графика $y = f(-kx)$ от оси Оу.

Тема 3.2. Предел числовой последовательности

Числовые последовательности

В математическом анализе переменная величина рассматривается как множество чисел, расположенных в определенном порядке (упорядоченное числовое множество).

Простейшим примером переменной величины есть *числовая последовательность*, т. е. такая последовательность, когда каждому натуральному числу n ставится в соответствии число x_n. Тогда отмечают, что задана числовая последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ или $\{x_n\}$.

Определение 3.2. Последовательностью действительных чисел называется функция, которая определена на множестве всех натуральных чисел.

Символически определение 3.2 можно представить в виде

$$f : N \to R^1$$

Общий член последовательности x_n является функцией натурального аргумента n, т. е. $x = f(n)$.

Функцию $f(n)$ можно задавать как аналитически, так и любым другим способом. Например, если $x_n = \frac{1}{n}$, то последовательность $\{x_n\}$ представляется в виде:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого её члена.

Числовые последовательности могут быть как сходящимися, так и расходящимися. Сходящиеся последовательности всегда имеют предел.

<u>Определение 3.3.</u> Число a называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$, если для любого наперед заданного $E > 0$, каким бы малым оно ни было, можно указать (существует) такой номер N, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < E$.

То обстоятельство, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, который равен числу a, символически записывается следующим образом:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \qquad \text{или} \qquad x_n \to a \text{ при } n \to \infty$$

Краткую форму записи определения 3.3 можно представить в виде

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n \left| \underline{\underline{def}} \right| \begin{array}{l} \forall E > 0, \exists N \equiv N(E) \\ (n > N) \Rightarrow |x_n - a| < E \end{array}$$

Из определения предела числовой последовательности следует, что если последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом число a, то члены последовательности при всех $n > N$ удовлетворяет неравенству

$$-E < x_n - a < E$$

Интервал $(a - E, a + E)$ называют «E - окрестностью» точки a.

Принимая во внимание отмеченное, понятие предела числовой последовательности можно сформулировать с точки зрения его геометрической интерпретации.

<u>Определение 3.4.</u> Число a есть предел последовательности $\{x_n\}$, если какая бы ни была E - окрестность точки a, начиная с некоторого номера N все значения x_n будут попадать в эту окрестность, т. е. за пределами интервала $(a-E, a+E)$ остается только вполне определенное число членов последовательности.

<u>Задача 3.2.</u> Показать, что при $n \to \infty$ последовательность

$$3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots, 2+\frac{1}{n}, \ldots'$$

имеет пределом число 2.

Здесь общий член последовательности записывается в виде $x_n = 2 + \dfrac{1}{n}$. Возьмем произвольное число $E > 0$ и определим N так, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство $\left|\left(2+\dfrac{1}{n}\right)-2\right| < E$, то есть здесь $\dfrac{1}{n} < E$. Последнее неравенство справедливо для $n > \dfrac{1}{E}$. В таком случае для N можно взять целую часть $\dfrac{1}{E}$, т. е. $N = \inf\left(\dfrac{1}{E}\right)$. Тогда для любых $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\left(2-\frac{1}{n}\right)-2\right| < E.$$

Последнее означает, что предел заданной числовой последовательности будет равен 2, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right) = 2.$$

Допустим, что $E = 0{,}01$, тогда $N = 100$. За n можно взять, например, число 200, тогда $x_{200} = 2 - \frac{1}{200}$ и

$$\left| \left(2 - \frac{1}{200} \right) - 2 \right| < \frac{1}{100}.$$

Последнее и доказывает, что число 2 будет пределом заданной числовой последовательности. Очевидно, что от величины E зависит то число членов последовательности, которое не попадает в E-окрестность точки a.

Бесконечно малые, бесконечно большие. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими

Определение 3.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого числа $M > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|x_n| > M$.

Тот факт, что последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, символически записывается следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

Рассмотрим последовательности

$$\{x_n\} = \{n^2\}, \qquad \text{при } n \to \infty, \qquad x_n \to \infty;$$

$$\{x_n\} = \left\{\ln \frac{1}{n}\right\}, \qquad \text{при } n \to \infty, \qquad x_n \to -\infty$$

Таким образом, представленные последовательности будут бесконечно большими. Такие последовательности называются расходящимися.

Определение 3.6. Последовательность называется *бесконечно малой* или *нуль - последовательностью*, если выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Теорема 3.1. Алгебраическая сумма двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Теорема 3.2. Произведение ограниченной последовательности и бесконечно малой есть последовательность бесконечно малая.

Непосредственно связь между бесконечно малыми и бесконечно большими устанавливают следующие утверждения.

Утверждение 3.1. Величина, обратная к бесконечно большой, есть бесконечно малая, т.е.

если $x_n \to \infty$, то $\dfrac{1}{x_n} \to 0$.

Утверждение 3.2. Величина, обратная к бесконечно малой, есть бесконечно большая, т.е. если $a_n \to 0$, *то* $\dfrac{1}{a_n} \to \infty$.

Практическое вычисление пределов числовых последовательностей основывается на следующих теоремах.

Теорема 3.3 Последовательность может иметь не более одного предела (теорема единственности предела числовой последовательности).

Теорема 3.4. Алгебраическая сумма двух сходящихся последовательностей есть последовательность сходящаяся, и ее предел равен сумме пределов слагаемых последовательностей.

Согласно теореме имеем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

Теорема 3.5. Произведение двух сходящихся последовательностей есть последовательность сходящаяся, и ее предел равен произведению пределов заданных последовательностей, мо есть

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Теорема 3.6. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходящиеся, т.е. $x_n \to a$, $y_n \to b$ и $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots, n\ldots$, а также $b \neq 0$, то последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ также будет сходящейся и ее предел равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, то есть.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{a}{b},\ b\neq 0.$$

Неопределенности

При рассмотрении теорем о пределах числовых последовательностей не рассматривались последовательности, имеющие бесконечные пределы, а также не рассматривался случай, когда при определении предела частного, предел последовательности в знаменателе равен нулю.

При этом, если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ бесконечно большие одного знака или одна последовательность бесконечно большая, а другая ограничена, то их сумма $\{x_n\}+\{y_n\}$ будет бесконечно большой последовательностью. Этот результат следует непосредственно из определения бесконечно большой. В то же время, если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ бесконечно большие разных знаков, то о последовательности $\{x_n\}+\{y_n\}$ ничего конкретного сказать нельзя. Тогда отмечают, что имеет место *неопределенность*.

Рассмотрим некоторые примеры

1) $x_n = n^2 + n$,

$y_n = -n^2,\qquad x_n + y_n \to \infty$

2) $x_n = n^2$

$y_n = -n^2 + 5,\qquad x_n + y_n \to 5$

3) $x_n = n^2$

$y_n = -n^2 + \frac{1}{n},\qquad x_n + y_n \to 0$

Приведенные примеры иллюстрируют то обстоятельство, что сумма бесконечно больших разного знака может сходиться к любому числу. В таком случае при рассмотрении указанного типа примеров отмечают, что имеет место неопределенность типа $\{\infty-\infty\}$.

Неопределенности могут быть и другого типа:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty} \text{ и т.д.}$$

Раскрыть неопределенность означает, что в каждом конкретном случае, в зависимости от вида заданных последовательностей, решить вопрос относительно их предела.

Задача 3.3. Найти пределы числовых последовательностей

Решение

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)$

Здесь имеет место неопределенность типа $\{\infty-\infty\}$. Разделив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=0.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n-8}{2n^2+2n+10}$.

Здесь имеет место неопределенность типа $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Раскрыть такую неопределенность можно, если вынести в числителе и знаменателе наивысшую степень n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}-\frac{8}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{8}{n^2}}{2+\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}}=\frac{3}{2}.$$

Тема 3.3. Предел функции

Ранее рассматривался предел числовой последовательности, аргументами которой были целые положительные числа. В данном разделе математического анализа рассматривается предел функции произвольного действительного аргумента. При этом рассматривается предел функции в точке $x=a$ или при $x\to a$.

<u>Определение 3.7.</u> Число A называется пределом функции $f(x)$ при x стремящемуся к a (или в точке a) если для любого числа $E > 0$, каким бы малым оно ни было, можно указать число $d(E) > 0$, что для всех $x \neq a$, которые удовлетворяют условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < E$.

То обстоятельство, что функция $f(x)$ имеет своим пределом число A при $x \to a$ символически записывают следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Понятие предела функции можно сформулировать на основании его геометрической интерпретации.

<u>Определение 3.8.</u> Функция $f(x)$ имеет в точке a пределом число A, если для произвольной последовательности значений аргумента $\{x_n\} \in D(f)$, которая сходится к a, соответствующая последовательность значений функций $f(x_n)$ при $n = 1,2,3,\ldots$, стремится к A.

Решение задач по определению пределов функций существенно упрощается, если пользоваться основными теоремами о пределах функций. Рассмотрим некоторые из них.

<u>Теорема 3.7.</u> Функция не может иметь двух разных пределов в одной точке.

<u>Теорема 3.8.</u> Предел постоянной равен постоянной, т. е $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

<u>Теорема 3.9.</u> Предел алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме пределов этих функций, если они существуют и конечны, т.е.

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} \varphi(x)$$

<u>Теорема 3.10.</u> Предел произведения функций равен произведению их пределов, если они существуют и конечны, т.е.

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} \varphi(x)$$

<u>Следствие теоремы 3.10.</u> Постоянный множитель можно выносить за знак предела функции, т.е.

$$\lim_{x \to a}\left[Cf(x)\right] = C\lim_{x \to a} f(x)$$

Теорема 3.11. Предел частного двух функций равен частному их пределов, если они существуют и предел знаменателя отличается от нуля, т.е.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}$$

Односторонние пределы функций

Отметим, что в определениях предела функции никаких условий на способ стремления x к a не накладывалось. В этой связи имеют следующие основные понятия.

Определение 3.9. Если значения функции $f(x)$ стремятся к числу b_1 по мере стремления x к a со стороны меньших значений, то число b_1 называется левосторонним пределом функции в точке a, т. е.

$$b_1 = \lim_{x \to a-0} f(x)$$

Определение 3.10. Если значения функции $f(x)$ стремятся к числу b_2 по мере стремления x к a со стороны больших значений, то число b_2 называется правосторонним пределом функции в точке a, т. е.

$$b_2 = \lim_{x \to a+0} f(x)$$

Задача 3.4. Определить левосторонний и правосторонний пределы функции $f(x) = e^{\frac{1}{x-a}}$ при $x \to a$.

Решение

Проанализируем показатель степени функции $f(x)$. При этом имеют два варианта.

а) Если $x \to a - 0$, то $\dfrac{1}{x-a} \to -\infty$ при этом $\lim\limits_{x \to a-0} e^{\frac{1}{x-a}} = 0$.

б) Если $x \to a+0$,то $\frac{1}{x-a} \to \infty$ при этом $\lim\limits_{x \to a+0} e^{\frac{1}{x-a}} = \infty$.

Тема 3.4. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

Предел $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ четная, график ее представлен на рис. 3.2.

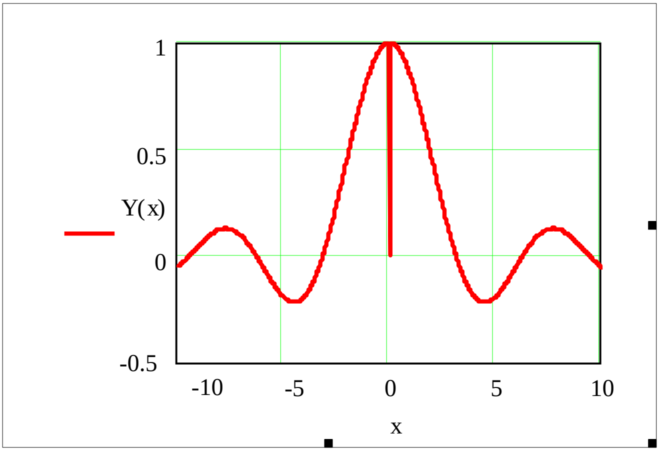

Рис. 3.2

Очевидно, что при $x \to 0$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ отличается неопределенностью $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Если x есть радианная мера угла, то $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Задача 3.5. Найти пределы функций.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 2x}$

Приведенная задача сводится к первому замечательному пределу. При этом имеем.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{7 \cdot \sin 7x}{7x} \cdot \frac{2x}{2\sin 2x} \right] = \frac{7}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x}$.

Как и в предыдущем примере, здесь неопределенность типа $\left\{ \dfrac{0}{0} \right\}$ раскрывается путем применения первого замечательного предела

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1.$$

Второй замечательный предел

Числовая последовательность $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ возрастает, но остается ограниченной. Всякая возрастающая, но ограниченная последовательность имеет предел. Предел, к которому стремится $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, при $n \to \infty$ впервые определил Непер, обозначается он через e, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e является иррациональным, кроме того, оно трансцендентно и равно e=2,71828.

Функция $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ имеет пределом число e не только при целочисленных значениях n, но и тогда, когда n стремится к бесконечности, пробегая числовую прямую непрерывно. Чтобы отметить это обстоятельство, заменим n на x имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Последнее соотношение и определяет выражение для второго замечательного предела. Такой предел, выраженный через бесконечно малые, имеет вид $\lim\limits_{x\to 0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=e$

Задача 3.6. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{-x}{3}}\right]^{-3}=e^{-3}$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2+1}=$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1}\right]=e$$

Предел отношения многочленов при стремлении аргумента к бесконечности

Пусть $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$,

$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$ - некоторые многочлены.

При этом $a_0\neq 0;\ b_0\neq 0$. Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\frac{x^n\cdot\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\cdot\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}\right)}=$$

$$=x^{n-m}\frac{\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)}{\left(b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_m}{x^m}\right)}=\frac{a_0}{b_0}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}0, & \textit{если} \quad n<m,\\ \frac{a_0}{b_0}, & \textit{если} \quad n=m,\\ \infty, & \textit{если} \quad n>m\end{cases}$$

<u>Задача 3.7.</u>Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+7x+8}{5x^2+8x-10}=\frac{4}{5}$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+10}{3x^4+5x-3}=0$.

Раздел 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 4.1. Производная функции

Определение 4.1 ***Производной*** *функции* $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю, если этот предел существует и конечен:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ или } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Для обозначения производной могут использоваться следующие эквивалентные символы:

$$y';\ y'_x;\ \frac{dy}{dx};\ f'(x);\ f'_x;\ \frac{df(x)}{dx}.$$

Операция отыскания производной называется ***дифференцированием*** функции. Числовое значение производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ обозначается $f'(x_0)$.

Теорема 4.1 Если: функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она ***непрерывна*** в этой точке.

Обратное утверждение не всегда верно (исключение составляют угловые точки, а также точки возврата и перегиба с вертикальной касательный).

Геометрический смысл производной: производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x; f(x))$ (рис. 4.1.):

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{j \to a} tgj = tga\ .$$

Механический *смысл* производной: производная есть скорость изменения функции $f(x)$ в точке x.

Пусть C, n - постоянные; $u = u(x)$; $\nu = \nu(x)$; $f = f[u(x)]$ - некоторые дифференцируемые функции, причем $f(u)$ - сложная функция по независимому аргументу x, а u является промежуточной функцией.

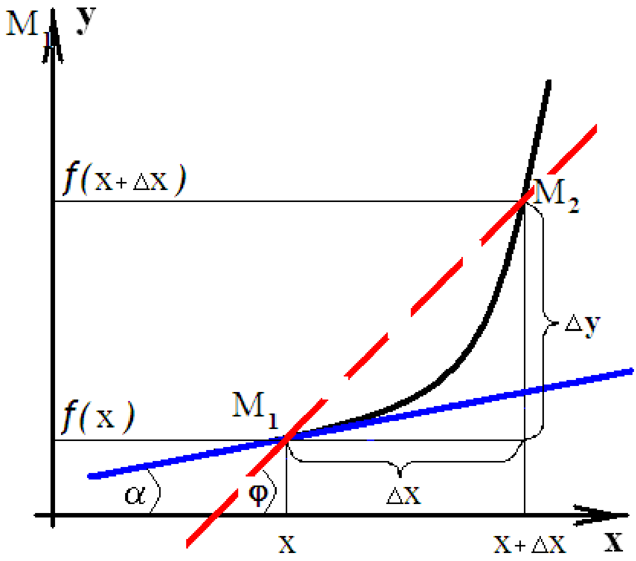

Рис. 4.1

Основные правила дифференцирования

1. $C' = 0$
2. $(Cu)' = Cu'$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
4. $(uv)' = u'v + uv'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
6. $(f[u(x)])'_x = f'_x \cdot u'_x$

Основные формулы дифференцирования

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$

2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

10. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

3. $\left(\dfrac{C}{u}\right)' = -\dfrac{Cu'}{u^2}$

11. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

4. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$

12. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

5. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

13. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

6. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

14. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

7. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$

15. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

16. $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1}u' + u^n \cdot \ln u \cdot n'$

Если функция y задана неявно, т.е. уравнение $F(x;\, y) = 0$ не разрешено относительно y, обе части этого уравнения дифференцируют по x, а затем находят y'.

Если функция задана параметрически в виде

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \text{то} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Производной n*-го порядка* от функции y называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Эта производная может обозначаться так

$$y^{(n)};\ \frac{d^n y}{dx^n};\ f^{(n)}(x).$$

Для параметрически заданной функции производная n-го порядка находится как

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y^{(n-1)}\right)_t'}{x_t'}.$$

Задача 4.1. Найти производную функции $y=-2x^2+4x-5$, исходя из ее определения.

Решение

По определению $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Поэтому дадим аргументу x приращение Δx, вычислим приращение функции Δy и найдем предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$y+\Delta y = -2(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) - 5.$$

$$\Delta y = -4x\Delta x - 2\Delta x^2 + 4\Delta x.$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -4x+4.$$

Задача 4.2. Найти производные функций:

а) $y = x\cdot 2^{x^2+2}$;

б) $y = \ln \mathrm{tg}\,\dfrac{e^{2\sin x}}{4}$;

в) $y = x^2\cdot e^{x^2}\cdot \ln x$;

г) $y = e^{|x|}$;

д) $y = \dfrac{x^x}{e^x}(x\cdot\ln x - x - 1)$.

Решение

а) $y' = 2^{x^2+2} + x2^{x^2+2}\cdot\ln 2\cdot 2x = 2^{x^2+2}\left(1+2x^2\ln 2\right)$;

б) $y' = \dfrac{1}{tg\dfrac{e^{2\sin x}}{4}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{e^{2\sin x}}{4}}\cdot\dfrac{1}{4}e^{2\sin x}\cdot 2\cos x = \dfrac{e^{2\sin x}\cos x}{\sin\dfrac{e^{2\sin x}}{2}}$;

в) $y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)' \ln x + x^2 e^{x^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} \cdot 2x\right) \ln x + xe^{x^2} =$

$+ xe^{x^2}\left(2x^2 \ln x + 2\ln x + 1\right);$

г) По определению модуля

$$y = e^{|x|} = \begin{cases} e^x, & \text{если } x \ge 0 \\ e^{-x}, & \text{если } x < 0 \end{cases}.$$

Тогда

$$y' = (e^{|x|})' = \begin{cases} e^x, & \text{если } x \ge 0 \\ -e^{-x}, & \text{если } x < 0 \end{cases}.$$

д) Предварительно прологарифмируем обе части равенства, а затем продифференцируем их и домножим на y:

$$\ln y = x \ln x + \ln\left(x \ln x - x - 1\right) - x$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 + \frac{\ln x + 1 - 1}{x \ln x - x - 1} - 1 = \frac{x \ln x\left(\ln x - 1\right)}{x \ln x - x - 1}$$

$$y' = \frac{x^x}{e^x}\left(x \ln x - 1 - 1\right) \cdot \frac{x \ln x\left(\ln x - 1\right)}{x \ln x - x - 1} = \frac{x^{x+1} \ln x\left(\ln x - 1\right)}{e^x}$$

Задача 4.3. Найти вторую производную неявно заданной функции

$$\frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$$

Решение

Введем новую переменную $u = \dfrac{y}{x}$. Тогда уравнение имеет вид:

$$u + e^u - u^{\frac{1}{3}}$$

Дифференцируем обе части уравнения:

$$u' + e^u \cdot u - \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot u' = 0$$

$$u'\left(1 + e^u - \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}}\right) = 0$$

Отсюда $u' = 0$.
Но

$$u' = \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{y'x - y}{x^2}$$

Тогда

$$\frac{y'x - y}{x^2} = 0$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

Так как $y'' = (y')'$ то

$$y'' = \frac{y'x - y}{x^2}$$

Задача 4.4. Найти производную n-го порядка от параметрически заданной функции:

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$$

Решение

Для определения производной n-го порядка надо последовательно найти n-1 предыдущую производную.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{1}{t}} = -t^{-1};$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{1}{t}} = t^{-1};$$

$$y'''_{xxx} = \frac{\left(y''_{xx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = -t^{-1};$$

Очевидно, что

$$y^{(n)} = (-1)^n \cdot t^{-1}$$

Тема 4.2. Дифференциал функции одной переменной

Определение 4.2. *Дифференциалом функции* $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента.

Определение 4.3. *Дифференциалом аргумента* называется приращение этого аргумента: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции определяется по формуле

$$dy = y'dx$$

Геометрический смысл дифференциала функции в точке $M(x,\ y)$: он численно равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке.

Дифференциал функции используется, для приближенных вычислений:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x .$$

Дифференциал n -го порядка определяется как

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right).$$

Задача 4.5. Сравнить приращение Δy и дифференциал dx функции $y = x^2 - 2x$ при $x = 3$ и $\Delta x = 0{,}01$.

Решение

Дав аргументу x приращение Δx, получим приращение функции Δy:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x)$$

Отсюда

$$\Delta y = \left(x + \Delta x^2 - 2(x + \Delta x) - (x^2 - 2x) = (2x + 2)\Delta x + \Delta x^2\right).$$

По определению дифференциала

$$dy = y'dx = (2x - 2)dx.$$

При заданных $x = 3$, $\Delta x = 0{,}01$, а также учитывая, что $dx = \Delta x$, получим:

$$\Delta y = (2 \cdot 3 - 2) \cdot 0{,}01 + 0{,}01^2 = 0{,}0401\,,$$

$$dy = (2 \cdot 3 - 2) \cdot 0{,}01 = 0{,}04$$

Задача 4.6. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{15{,}9}$.

Решение

Если приращение аргумента Δx мало по абсолютной величине, то для приближенных, вычислений можно воспользоваться формулой

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x\,.$$

В примере $x = 16$, $\Delta x = -0{,}1$. Тогда

$$\sqrt[4]{15{,}9} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4}(16)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-0{,}1) = 2 - \frac{1}{320} = 1{,}96875$$

Тема 4.3. Приложение дифференциального исчисления для исследования функций

Определение 4.4. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* при $x = a$, если она определена в некоторой окрестности a и

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

В противном случае функция $f(x)$ в точке a имеет ***разрыв***.

Различают следующие виды точек разрыва.

Определение 4.5. ***Разрыв I рода*** - когда существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. В свою очередь, среди таких точек выделяют точки ***устранимого*** разрыва, если односторонние пределы одинаковы (функцию $f(x)$ доопределяют: $f(a)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$), и ***неустранимого***, если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

<u>Определение 4.6.</u> ***Разрыв II рода*** - когда хотя бы один из односторонних пределов не существует.

<u>Теорема 4.2.</u> Если при нахождении пределов возникает неопределенность типа $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, целесообразно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

если последний существует.

Правило можно применять неоднократно до устранения неопределенности.

<u>Определение 4.7.</u> Точки, в которых функция $f(x)$ достигает минимального или максимального значений, называется точками ***экстремума***.

Для того, чтобы в точке x_0 функция $f(x)$ принимала экстремальное значение, должны выполняться два условия существования экстремума -необходимое и достаточное.

<u>Теорема 4.3.</u> Необходимое условие: $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует. Такие точки x_0 называются критическими, точками I рода.

<u>Теорема 4.4.</u> Достаточное условие:

а) Производная $f'(x)$ слева и справа от критической точки x_0 имеет разные знаки. При смене знака производной с «+» на«-» в. точке x_0 функция $f(x)$ достигает максимума; с «-» на «+» - минимума.

б) Вторая производная $f''(x)\neq 0$. Точка x_0 будет точкой максимума, если $f''(x_0)<0$, и точкой минимума, если $f''(x_0)>0$.

в) Если условие б) не выполняется, то определяется первая, отличная от нуля производная $f^{(n)}(x_0)$. При этом точка x_0 будет точкой экстремума, если n-четное, а именно: максимума при

$f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимума при $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если n - нечетное, то экстремума в точке x_0 не существует.

При нахождении $f(x)_{\min}$ и $f(x)_{\max}$ на отрезке $[a, b]$ следует дополнительно рассмотреть значение функции и на границах отрезка.

Теорема 4.5. Функция $f(x)$ возрастает на интервалах, для которых $f'(x) > 0$, и убывает, если $f'(x) < 0$.

Определение 4.8. График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым (вогнутым)*** вверх на интервале $[a, b]$, если он расположен ниже (выше) касательной, проведенной в любой точке этого интервала.

Определение 4.9. Точкой ***перегиба*** x_0 называется точка, отделяющая выпуклую часть графика функции $f(x)$ от вогнутой или наоборот. В точке x_0 должны выполняться два условия перегиба - необходимое и достаточное.

Теорема 4.6. ***Необходимое условие***: $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. В этом: случае точка x_0 называется *критической точкой II рода*.

Теорема4.7. ***Достаточное условие***: $f''(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет различные знаки.

Теорема 4.8. Функция $f(x)$ выпукла на интервале, где $f''(x_0) < 0$ и вогнута в обратном случае.

Определение 4.10. Прямая l называется ***асимптотой*** кривой $y = f(x)$, если расстояние точки $M(x; y)$ кривой от прямой l стремится к нулю при неограниченном удалении указанной точки от начала координат.

Различают два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Прямая $y = b$ является ***горизонтальной*** *асимптотой* кривой $y = f(x)$ если существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = kx + b$ является ***наклонной*** *асимптотой* кривой $f(x)$, если существуют пределы

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx \right] \text{ или}$$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - kx \right]$$

Построение графиков функций по характерным точкам может осуществляться в следующей последовательности:

1. Найти область определения функции.
2. Определить точки пересечения с осями координат.
3. Исследовать функцию на симметрию (четность, нечетность), периодичность.
4. Исследовать функцию на непрерывность. Классифицировать точки разрыва, если последние существуют.
5. Исследовать функцию на экстремум, определить интервалы возрастания и убывания.
6. Исследовать функцию на перегибы, определить интервалы выпуклости, вогнутости.
7. Найти асимптоты графика функции.
8. Построить график функции.

<u>Задача 4.7.</u> Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

Решение

Используя определение модуля, можно записать

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1, & \text{если } x > 0, \\ \dfrac{-x}{x} = -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ $f(x)$ терпит разрыв. Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{x} = 1.$$

Так как функция $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет конечные несовпадающие пределы, то эта точка является точкой неустранимого разрыва I рода.

Задача 4.8. Исследовать и построить по характерным точкам график функции $y = xe^{-x}$.

Решение

1. Областью определения данной функции является множество вещественных чисел.
2. Так как при $x = 0$ $y = 0$ также, то график функции пересекает координатные оси в начале координат.
3. $f(-x) = -xe^{x}$. Так как $f(-x) \neq -f(x)$ и $f(-x) \neq f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной, а, следовательно, не имеет симметрии ни относительно начала координат, ни относительно оси Oy. Экспоненциальная функция не является периодической функцией.
4. Указанная функция является непрерывной на всей числовой оси.
5. Найдем критические точки I рода.

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

Из условия $y' = 0$ найдем единственное решение $x = 1$. Так как при переходе через эту точку производная y' меняет знак с «+» на «-», то $x = 1$ является точкой максимума.

$$y_{\max}(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Интервал возрастания функции: $(-\infty;\ 1)$.

Интервал убывания функции: $(1;\ \infty)$.

6. Критические точки II рода определяются по второй производной.

$$y'' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(x-2).$$

Из $y'' = 0$ определяем критическую точку $x = 2$.

Так как при переходе через эту точку y'' меняет знак с «-» на «+», то $x = 2$ будет точкой перегиба.

Ее координаты равны $y(2) = 2e^{-2} = \dfrac{2}{e^2}$

Интервал выпуклости функции: $(-\infty;\ 2)$.

Интервал вогнутости функции: $(2;\ \infty)$.

7. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = ae^{-a} \neq \infty$, то вертикальной асимптоты не существует.

Горизонтальные асимптоты найдем из условий:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{-\infty}{0}\right] = -\infty.$$

Следовательно, при неограниченном возрастании x ось Ox является горизонтальной: асимптотой При неограниченном убывании x таковой не будет.

Так как при $x \to \infty$ есть горизонтальная асимптота, то наклонной здесь не будет. Для интервала $(-\infty;\ 0)$ определим угловой коэффициент наклонной асимптоты из условия

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty.$$

Следовательно, здесь нет и наклонной асимптоты.

8. Наносим на координатную плоскость xOy характерные точки и строим график функции $y = xe^{-x}$ (рис.4.2).

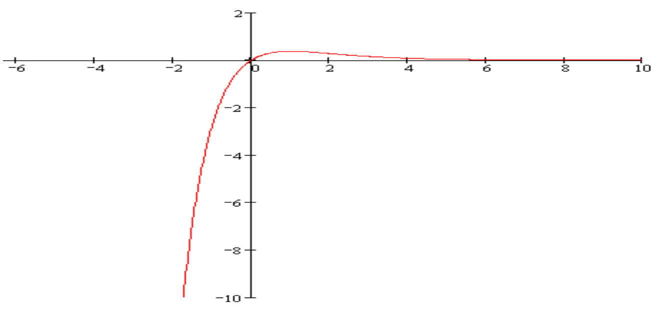

Рис.4.2

Раздел 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Тема 5.1. Дифференцирование функции двух независимых переменных

Определение 5.1. Переменная z называется функцией двух независимых переменных (аргументов) x и y, если каждой паре значений $(x;\ y)$ из множества D соответствует одно определенное значение z.

Функция двух переменных, обозначается так

$$z = z(x, y),\ z = f(x, y) \text{ и т.п.}$$

Область D называется областью определения (существования) функции z. Аналогично определяются функции любого числа аргументов $u = u(x, y, z, \ldots t)$. Поэтому в дальнейшем будем, как правило, рассматривать, не нарушая общности, функции двух независимых переменных.

Определение 5.2. ***Частной производной*** функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной, например x, называется производная

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

вычисленная при постоянном значении другого аргумента - y.

Поэтому частные производные находят по правилам дифференцирования функции одной переменной, считая остальные переменные константами. Можно использовать различные обозначения, частной производной:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x},\ f'_x(x,\ y).$$

Аналогично определяется частная производная по переменной y.

Определение 5.3. ***Полным приращением*** функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется величина

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

где $\Delta x,\ \Delta y$ - приращения аргументов.

Определение 5.4. Главная, линейная относительно Δx и Δy, часть полного приращения функции называется ***полным дифференциалом*** dz. Так как при малых приращениях $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy .$$

Для дифференцирования сложных функций (т.е. функций, зависящих от промежуточных аргументов) используют следующие формулы:

Если $z = f(x, y)$ а $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} .$$

Если $z = f(x, y)$ а $y = \varphi(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} .$$

Если $z = f(x, y)$ а $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial h} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial h}.$$

Функции нескольких переменных могут иметь частные производные и дифференциалы высших порядков.

Определение 5.5. *Частными производными* n *-го порядка* от функции $z = f(x, y)$ называются производные от ее частных производных $(n-1)$-го порядка. Так, частные производные второго порядка обозначаются так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y); \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y).$$

Две последние частные производные называются ***смешанными*** и для непрерывных функций $f(x, y)$ они совпадают. Дифференциалы высших порядков могут быть найдены по следующей символической формуле

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z .$$

В частности, для второго и третьего порядков получим такие зависимости:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2;$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3 .$$

Определение 5.6. *Производной функции* $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ *в **направлении** вектора* $l = \overline{MM_1}$ называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{MM_1 \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{MM_1} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos a + \frac{\partial z}{\partial y} \cos b ,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ - направляющие косинусы вектора l .

Определение 5.7. ***Градиентом*** функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ называется вектор, выходящий из указанной точки и имеющий своими координатами частные производные функции z:

$$\overline{gradZ} = \frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j} .$$

Градиент указывает направление наибольшего роста функции в данной точке.

Существует зависимость

$$\frac{\partial z}{\partial l} = np_l \overline{gradZ} .$$

Тема 5.2. Исследование функций двух независимых переменных

Для определения экстремальных точек $M_0(x_0;\ y_0)$ функции $z = f(x, y)$ проверяют выполнение двух условий существования экстремума.

<u>Теорема 5.1.</u> ***Необходимое условие***: $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$ и $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$, или обе частные производные не существуют. Тем самым определяются критические точки $M_0(x_0;\ y_0)$.

<u>Теорема 5.2.</u> ***Достаточное условие***. Обозначим $A = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$,

$B = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$, $\Delta = AC - B^2$.

Тогда:

- если $\Delta > 0$, то в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ существует экстремум, а именно: максимум при $A < 0$ и минимум при $A > 0$;
- если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ экстремума нет;
- если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование в этой точке.

<u>Задача 5.1.</u> Найти область определения, а также частные производные и дифференциал второго порядка функции $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 1\right)$.

Решение

Область определения данной функции ограничены условием $x^2 + y^2 - 1 > 0$ или $x^2 + y^2 > 1$, т.е. представляет собой множество точек плоскости, лежащих вне единичного круга.

Далее последовательно находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 - 1}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\left(y^2-x^2-1\right)}{\left(x^2+y^2-1\right)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2\left(x^2-y^2-1\right)}{\left(x^2+y^2-1\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2-2\right)^2};$$

$$d^2z=\frac{2}{\left(x^2+y^2-1\right)^2}\left[\left(x^2+y^2-1\right)dx^2-4xydxdy\ +\left(x^2+y^2-1\right)dy^2\right].$$

<u>Задача 5.2</u> Найти:

а) $\frac{dz}{dt}$, если $z=x^y,\ x=\ln t,\ y=\sin t$;

б) $\frac{dz}{dx}$, и $\frac{dz}{dy}$, если $z=u^2\ln \nu,\ u=\frac{y}{x},\ \nu=x^2+y^2$;

в) dz, если $z=f(u,\nu),\ u=\cos(xy),\ \nu=x^5-7y$.

Решение

а) $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=yx^{y-1}\frac{1}{t}+x^y\ln x\cos t=$$

$$=\frac{\sin t}{t}(\ln t)^{\sin t-1}+(\ln t)^{\sin t}\ln(\ln t)\cos t.$$

б) $$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial x}=2u\ln n\cdot\left(\frac{y}{x^2}\right)+\frac{u^2}{n}2y=$$

$$=-\frac{2y^2}{x^3}\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2y^3}{x^2\left(x^2+y^2\right)}.$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial y}=2u\ln n\cdot\frac{1}{x}+\frac{u^2}{n}2y=$$

$$=-\frac{2y^2}{x^2}\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{2y^3}{x^2\left(x^2+y^2\right)}$$

в) $$dz=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial f}{\partial \nu}\cdot d\nu$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy = -y \sin(xy) dx - x \sin(xy) dy$$

$$d\nu = \frac{\partial \nu}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \nu}{\partial y} \cdot dy = 5x^4 dx - 7dy$$

$$dz = -f_u'(u, \nu) \sin(xy)(ydx + xdy) + f_\nu'(u, \nu)\left(5x^4 dx - 7dy\right) =$$

$$= \left(5x^4 f_u'(u, \nu) - y \sin(xy) f_u'(u, \nu)\right) dx - \left(7 f_u'(u, \nu) + \sin(x, y) f_u'(u, \nu)\right) dy \; .$$

<u>Задача 5.3</u> Найти градиент и производную по направлению вектора $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$ функции $u = x^2 + 2xy^3 + 10z^2 - 1$ в точке $M(-1;2;1)$.

Решение

По определению

$$\overline{gradu}\Big|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \right)\Bigg|_M$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}\Bigg|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right)\Bigg|_M$$

Предварительно найдем значение частных производных в точке M и направляющие косинусы вектора: $\bar{a}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Bigg|_M = \left(2x + 2y^3\right)\Big|_M = 14; \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Bigg|_M = 6xy^2\Big|_M = -24;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Bigg|_M = 20z\Big|_M = 20$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3; \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{a} = \frac{2}{3};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{a} = -\frac{2}{3}; \quad \cos g = \frac{a_z}{a} = \frac{1}{3};$$

$$\overline{gradU}\Big|_M = 14\bar{i} - 24\bar{j} + 20\bar{k} \, ,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial a}\right|_M = 14 \cdot \frac{2}{3} + (-24) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 20 \cdot \frac{1}{3} = 32.$$

<u>Задача 5.4</u> Определить размеры прямоугольного параллелепипеда с диагональю a, имеющего максимальный объем.

Решение

Пусть x, y и z - длины ребер параллелепипеда. Тогда его объем

$$V = xyz\ .$$

Так как $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, то $z - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ и $V = xy\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Очевидно, что $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $x^2 + y^2 > a^2$.

Множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих этим требованиям, можно изобразить так (рис.5.1.):

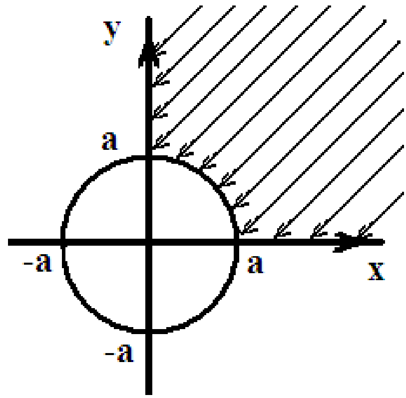

Рис. 5.1.

Для нахождения точек экстремума приравняем к нулю частные производные функции V:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{y\left(a^2 - 2x^2 - y^2\right)}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{x\left(a^2 - 2y^2 - x^2\right)}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} a^2 - 2x^2 - y^2 = 0, \\ a^2 - 2y^2 - x^2 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + 2y^2 = a^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 = a^2, \\ 3y^2 = a^2. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm \dfrac{a}{\sqrt{3},} \\ y = \pm \dfrac{a}{\sqrt{3}.} \end{cases}$$

Итак, имеем 4 критические точки:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_1 = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_2 = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}; \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_3 = -\dfrac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}; \quad \begin{cases} x_4 = -\dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ y_4 = -\dfrac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Условию задачи удовлетворяет только первая точка $M\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}; \dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$.

Проверим выполнение в этой точке достаточного условия существования экстремума.

$$A = \left.\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}\right|_M = \left.\frac{xy\left(-3a^2 + 2x^2 + 3y^2\right)}{\left(a^2 - x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_M = -\frac{4a}{\sqrt{3}};$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 n}{\partial x \partial y}\right|_M = \left.\frac{\left(a^2 - 2x^2 - 3y^2\right)\left(a^2 - x^2 - y^2\right) + \left(a^2 - 2x^2 - y^2\right)}{\left(a^2 - x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_M = -\frac{2a}{\sqrt{3}};$$

$$C = \left.\frac{\partial^2 n}{\partial y^2}\right|_M = \left.\frac{xy\left(-3a^2 + 3x^2 + 2y^2\right)}{\left(a^2 - x^2 - y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right|_M = -\frac{4a}{\sqrt{3}}.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 4a^2 > 0$$

Следовательно, в точке M существует экстремум, а именно максимум $(A > 0)$.

Зная x и y, найдем z:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Значит, $x = y = z$.

Итак, изо всех прямоугольных параллелепипедов с фиксированной диагональю максимальный объем имеет куб с ребром, равным $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Раздел 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 6.1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение 6.1 Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на $[a, b]$, если во всех точках отрезка выполняется равенство

$$F'(x) = f(x)$$

Теорема 6.1 Если $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она будет иметь бесконечное множество первообразных $F(x) + C$, отличающихся друг от друга только константой C.

Определение 6.2 Совокупность всех первообразных функций $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Общепринятые обозначения:

$f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

x - переменная интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла называется *интегрированием* функции.

Основные свойства неопределенного интеграла

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \qquad \int Cf(x)dx = C\int f(x)dx,$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx,$$

$$\int dF(x)dx = F(x) + C,$$

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = j(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$

Таблица основных интегралов

$$\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1 \qquad \int e^u du = e^u + C$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \qquad \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C \qquad \int \cos u du = \sin u + C$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\operatorname{cosec} u - \operatorname{ctg} u\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{p}{4}\right)\right| = \ln\left|\sec u + tgu\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \qquad \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$$

$$\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln \cos u + C \qquad \int \operatorname{ctg} u\,du = \ln \sin u + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C,\ a > 0,$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C,\ a > 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + l}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + l}\right| + C.$$

Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, по частям, заменой переменных.

Непосредственное интегрирование заключается в представлении исходного интеграла в виде алгебраической суммы табличных интегралов.

Теорема 6.2. При интегрировании по частям используют формулу

$$\int u\,d\nu = u\nu - \int \nu\,du\ ,$$

где $u = \varphi(x)$, $\nu = \psi(x)$ - дифференцируемые функции. Метод можно применять, если $\int \nu\,du$ легче найти, чем исходный. Учитывая то, что интегрирование является более сложной операцией, чем дифференцирование, в подынтегральном выражении за $d\nu$ следует брать легко интегрируемые выражения, например $e^x dx, \sin x dx, \sec^2 x dx$ и т.д. В качестве u обычно берут такие функции как $\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ и т.д.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух типов:

- $x = \varphi(t)$ где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция по аргументу t:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\ ;$$

- $u = \psi(x)$, где u - новая переменная:

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx = \int f(u)du\ .$$

При интегрировании рациональных дробей, выполняют их преобразование к так называемым ***простейшим (элементарным)*** дробям, интегрирование которых известно. Это дроби четырех видов:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2b-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{A}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^n} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot I_n\ ,$$

где A, B, p, q - вещественные числа; n - целое число большее единицы; квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней; интеграл $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ определяется $(n-1)$-кратным применением рекуррентной формулы

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Особой нужды запоминать эти формулы нет, так как они приводятся к табличным интегралам путем выделения в числителе дроби производной знаменателя, а в знаменателе дроби - полного квадрата.

Итак, интегрирование рациональных дробей произвлдят в следующей последовательности:

1. Выделяют целую часть (если дробь неправильная).

2. Раскладывают знаменатель правильной дроби на линейные и квадратичные множители.
3. Раскладывают правильную дробь на простейшие дроби.
4. Интегрируют простейшие дроби.

Требует пояснения третий пункт этого плана. Каждому линейному или квадратичному множителю в знаменателе правильной дроби соответствуют такие простейшие дроби:

$$\frac{1}{(x-a)^n} \to \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^m} \to \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_m+C_m}{(x^2+px+q)^m},$$

где $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_m, C_1, C_2, ..., C_m$ - неопределенные коэффициенты.

Таким образом, правильная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена алгебраической суммой простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} +$$

$$+ \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m} + \dots$$

Для нахождения значений неопределенных, коэффициентов в правой части вышеприведенного равенства, простейшие дроби приводят к общему знаменателю, приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях х в левой и правой частях и решают полученную систему линейных уравнений.

Неопределенные коэффициенты могут быть найдены и другим способом: придавая переменной x в тождестве произвольные числовые значения столько раз, сколько коэффициентов надо определить. При этом вычисления значительно упрощаются, если в качестве значений x брать значения корней знаменателя подынтегральной дроби.

Для интегрирования тригонометрических функций используются те или иные подстановки, приводящие их к рациональным функциям. Рассмотрим способы интегрирования для нескольких конкретных видов подынтегральных тригонометрических функций.

1. Интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx ,$$

где R - рациональная функция, рационализируется с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки***

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t .$$

Тогда $x = 2\operatorname{arctg} t$; $dx = \dfrac{2dt}{14t^2}$; $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Недостатком этой подстановки может быть необходимость решения рациональных уравнений высоких степеней при нахождении корней знаменателя. Поэтому для некоторых частных случаев используют такие подстановки:

а) Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, т.е. подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, делают подстановку $\sin x = t$. Тогда $x = \arcsin t$, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

б) Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, т.е. функция нечетна относительно $\sin x$, полагают $\cos x = t$, далее $x = \arccos t$, $dt = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

в) Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, т.е. функция четна одновременно относительно $\sin x$ и $\cos x$, используют подстановку

$$\operatorname{tg} x = t;\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1-t^2},\ \ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} .$$

2. Интеграл вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

определяется с помощью таких подстановок:
а) при нечетном m : $\cos x = t$;
б) при нечетном n : $\sin x = t$.

в) При четных m и n понижается степень, тригонометрических, функций путем использования формул:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x; \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

3. Интегралы вида

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx ,$$

$$\int \sin mx \cdot \sin nx dx ,$$

$$\int \cos mx \cdot \cos nx dx .$$

находятся с использованием формул

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)].$$

4. Интегралы вида

$$\int \mathrm{tg}^m x dx ,$$

$$\int \mathrm{ctg}^m x dx$$

находят с помощью замен

$$\mathrm{tg}^2 x = \sec x^2 - 1, \quad \mathrm{ctg}^2 x = \mathrm{cosec}\, x^2 - 1 .$$

При интегрировании иррациональных функций последние тем или иным путем сводятся к рациональным или табличным. Универсального метода решения нет. Поэтому рассмотрим методы интегрирования для нескольких видов иррациональности.

1. Интеграл вида

$$\int R\left[x,(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}},(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}},\ldots\right]dx,$$

где R - рациональная функция; a,b - вещественные числа; $m_1,n_1,m_2,n_2\ldots$ - целые числа, сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $ax+b=t^2$ где S наименьшее общее кратное чисел $n_1,n_2,\ldots$.

2. Интеграл вида

$$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

приводятся к табличным выделением в числителе производной подынтегрального квадратного трехчлена, а под радикалом - полного квадрата.

3. Интеграл вида

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

приводятся к интегралу предшествующего вида подстановкой $x-\alpha=\dfrac{1}{t}$.

4. Для перечисленных ниже видов иррациональностей используются так называемые ***тригонометрические подстановки***, приводящие к интегралам от тригонометрических функции $\sin x$ и $\cos x$.

а) $\int R\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

Подстановка $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$

б) $\int R\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$

Подстановка $x=a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x=a\,\mathrm{ctg}\,t$.

в) $\int R\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$

Подстановка $x=a\sec t$ или $x=a\,\mathrm{cosec}\,t$.

<u>Задача 6.1</u> Найти интегралы

а) $\int\left(x^2+2\right)^2dx$; б) $\int x^2\cos x dx$; в) $\int\dfrac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$.

Решение

а) Возводим подынтегральную функцию в квадрат и раскладываем интеграл на ряд табличных:

$$\int\left(x^2+2\right)^2dx=\int\left(x^4+4x^2+4\right)dx=\int x^4dx+4\int x^2dx+4\int dx=$$

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}+4x+C$$

б) Подынтегральная функция представляет собой произведение двух функций. Поэтому дважды применим метод интегрирования по частям.

$$\int x^2\cos xdx=\begin{Bmatrix}u=x^2;\ dn=\cos xdx\\ du=2dx;n=\sin x\end{Bmatrix}=x^2\sin x-2\int x\sin xdx=$$

$$=\begin{Bmatrix}u=x;\ dn=\sin xdx\\ du=dx;n=-\cos x\end{Bmatrix}=x^2\sin x-2\left[-x\cos x+\int\cos xdx\right]=$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

в) Введем новую переменную $t^2=x-1$. Так как $x=t^2+1,\ dx=2tdt$, получим

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}=\int\frac{\left(t^2+1\right)^3\cdot 2tdt}{t}=2\int\left(t^6+3t^4+3t^2+1\right)dt=$$

$$=2t\left(\frac{t^6}{7}+3\frac{t^4}{5}+3\frac{t^2}{3}+1\right)+C=$$

$$=2\sqrt{x-1}\left(\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right)+C$$

Задача 6.2. Проинтегрировать алгебраические дроби:

а) $\int \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$; б) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$; в) $\int \frac{xdx}{\left(x^2+2x^2+2\right)^2}$.

Решение

а) Разложим знаменатель дроби на множители, решив биквадратное уравнение $x^4+5x^2+4=0$. Получим $x^4+5x^2+4=\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)$.

Для разложения исходной дроби на простейшие используем метод неопределенных коэффициентов,

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)}=$$

$$=\frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(4A+C)x+4B+D}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}.$$

Приравниваем коэффициенты при равных степенях x в правой и левой частях этого равенства:

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=0, \\ 4A+C=0, \\ 4B+D=1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} A=0, \\ B=\frac{1}{3}, \\ C=0, \\ D=-\frac{1}{3}. \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^4+5x^2+4}=\frac{1}{3\left(x^2+1\right)}-\frac{1}{3\left(x^2+4\right)}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^4+5x^2+4}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

б) В этом примере корень знаменателя $x=0$ является кратным кратности 2. Поэтому в разложении дроби на простейшие ему будут соответствовать две дроби:

$$\frac{1}{x^4-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}=$$

$$=\frac{Ax(x+1)(x-1)+B(x+1)(x-1)+Cx^2(x+1)+Dx^2(x-1)}{x^2(x+1)(x-1)}$$

Это равенство должно соблюдаться для любых значений x. Вычисления облегчаются, если в качестве таковых взять значения корней знаменателя:

$x=0:\qquad -B=1;\qquad B=-1;$

$x=1:\qquad 2C=1;\qquad C=\frac{1}{2};$

$x=-1:\qquad -2D=1;\qquad D=-\frac{1}{2};$

$x=2:\qquad 6A-3B+12C+4D=1;\qquad A=0.$

$$\begin{cases} A=0, \\ B=1, \\ C=\frac{1}{2}, \\ D=-\frac{1}{2}. \end{cases} \qquad и\ \frac{1}{x^4-x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$$

$$\int\frac{dx}{x^4-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

в) Выделим в числителе дроби производную квадратного трехчлена, а в самом трехчлене - полный квадрат.

$$\int\frac{xdx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\int\frac{(2x+2)\cdot\frac{1}{2}-1}{\left((x+1)^2+1\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+2x+2\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}-$$

$$-\int\frac{dx}{\left((x+1)^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2\left(x^2+2x+2\right)}-\int\frac{d(x+1)}{\left((x+1)^2+1\right)^2}$$

Для нахождения последнего интеграла используем рекуррентную формулу:

$$I_2=\int\frac{d(x+1)}{\left((x+1)^2+1\right)^2}=\begin{Bmatrix}t=x+1\\ a=1\\ n=2\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{(x+1)+1}+\frac{1}{2}I_1=$$

$$=\frac{x+1}{2\left((x+1)^2+1\right)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)$$

Итак,

$$\int\frac{xdx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=-\frac{1}{2\left(x^2+2x+2\right)}-\frac{x+1}{2\left(x^2+2x+2\right)}-$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+C=-\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)\right]+C.$$

<u>Задача 6.3.</u> Проинтегрировать тригонометрические функции

а) $\int\frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x}$; б) $\int\sin 3x\sin xdx$; в) $\int tg^3 xdx$.

Решение

а) $$\int\frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x}=\int\frac{\cos^2 x\cdot\cos xdx}{\sin^2 x}=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x)}{\sin^2 x}=$$

$$=\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}-\int d\sin x=-\frac{1}{\sin x}-\sin x+C.$$

б) $$\int\sin 3x\sin xdx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 4x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}(2\sin 2x-\sin 4x)+C.$$

в)

$$\int tg^3 xdx\int tgx(\sec^2 x-1)dx=\int tgxd(tgx)-\int tgxdx=\frac{tg^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$$

<u>Задача 6.4.</u> Проинтегрировать

а) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$; б) $\int \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$; в) $\int \sqrt{3+2x-x^2dx}$.

Решение

а) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \left\{\begin{aligned} x &= t^6 \\ dx &= 6t^5dt \end{aligned}\right\} = \int \frac{6t^5dt}{t^2+t^3} = 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x}\,6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C$$

б) $$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}} = \left\{\begin{aligned} x+1 &= \frac{1}{t} \\ dx &= -\frac{dt}{t^2} \end{aligned}\right\} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$$

$$-\ln\left|t + \sqrt{t^2+1}\right| + C = -\ln\left|\frac{1}{x+1} + \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}+1}\right| + C =$$

$$= -\ln\frac{1+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C$$

в) $$\int\sqrt{3+2x-x^2dx} = \int\sqrt{2^2-(x-1)^2}\,dx = \left\{\begin{aligned} x-1 &= 2\sin t \\ dx &= 2\cos t dt \end{aligned}\right\} =$$

$$= 4\int\cos^2 t dt = 2\int(1+\cos 2t)dt = 2(t+\sin t\cos t) + C =$$

$$= 2\left(\arcsin\frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)\sqrt{3+2x+x^2}}{4}\right) + C$$

Тема 6.2. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разделим этот отрезок на n произвольных частей

$$a = x_0 < x_1 < x_2 ... < x_n = b$$

Для каждого элементарного отрезка $[x_{i-1,} x_i]$ определим его длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и значение функции $f(x_i)$ в произвольной точке $\xi_i \in [x_{i-1,} x_i]$ (рис. 6.1.).

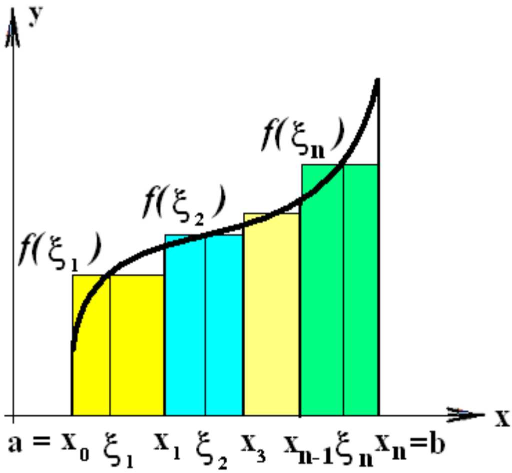

Рис. 6.1.

Определение 6.3. ***Интегральной суммой*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется сумма вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Определение 6.4. *Определенным интегралом* функции $f(x)$ на этом отрезке называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta_i x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*.

Геометрический смысл определенного интеграла: ***это площадь криволинейной трапеции***, т.е. фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис.6.1):

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Теорема 6.3.</u> *Достаточным условием* существования определенного интеграла на отрезке $[a, b]$ является непрерывность функции $f(x)$ на этом отрезке.

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ где } c \in [a, b]$$

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx,$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \text{ где } C \text{ - постоянная.}$$

Для нахождения значения определенного интеграла используется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла выглядит так

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

При замене переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \ ,$$

где новые значения пределов интегрирования α и β определяются из соотношений $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, а функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

Если $f(x)$ - четная функция, то $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Если $f(x)$ - нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx =x = 2\int_0^a f(x)dx$.

Определенный интеграл используется для нахождения объема тела, образованного вращением дуги кривой $y = f(x),\ x \in [x_1, x_2]$, вокруг оси OX:

$$V_x = p\int_{x_1}^{x_2} f^2(x)dx$$

или кривой $x = j(y),\ y \in [y_1, y_2],$ вокруг OY:

$$y = p\int_{y_1}^{y_2} j^2(y)dy$$

<u>Задача 6.5.</u> Вычислить:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\cos x} \sin x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 5x + 6)\sin 3x dx$; в) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$.

Решение

$$a)\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt[3]{\cos x}\sin xdx=-\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^{\frac{1}{3}}xd(\cos x)=-\frac{3}{4}\cos^{\frac{4}{3}}x\Big|_0^{\frac{p}{2}}=$$

$$=-\frac{3}{4}\left(\cos^{\frac{4}{3}}\frac{p}{2}-\cos^{\frac{4}{3}}0\right)=\frac{3}{4}$$

б) Интегрируем по частям:

$$\int_0^{\frac{p}{2}}\left(x^2+5x+6\right)\sin 3xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x^2-5x+6, dv=\sin 3xdx \\ du=\left(2x+5\right)dx, v=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cos 3x\left(x^2-5x+6\right)\Big|_0^{\frac{p}{2}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{p}{2}}\left(2x-5\right)\cos 3xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=2x-5, dv=\cos 3xdx \\ du=2dx, v=\dfrac{1}{3}\sin 3x\end{matrix}\right\}=2+$$

$$+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin 3x\left(2x-5\right)\Big|_0^{\frac{p}{2}}-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{p}{2}}\sin 3xdx\right]=$$

$$=2+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(-p+5\right)+\frac{2}{9}\cos 3x\Big|_0^{\frac{p}{2}}\right]=\frac{67}{27}-\frac{p}{9}$$

в) $$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1} = \left\{ \begin{aligned} & x = t^2 \\ & dx = 2tdt \\ & a = \sqrt{4} = 2 \\ & b = \sqrt{9} = 3 \end{aligned} \right\} = \int_2^3 \frac{2tdt}{t-1} = 2\int_2^3 \frac{t-1+1}{t-1} =$$

$$= 2\int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = 2\left[t\Big|_2^3 + \ln(t-1)\Big|_2^3\right] = 2(1+\ln 2)$$

Задача 6.6. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

Решение

Для определения границ интегрирования решим систему

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 4 - x^2 \end{cases},$$

откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ (рис. 6.2).

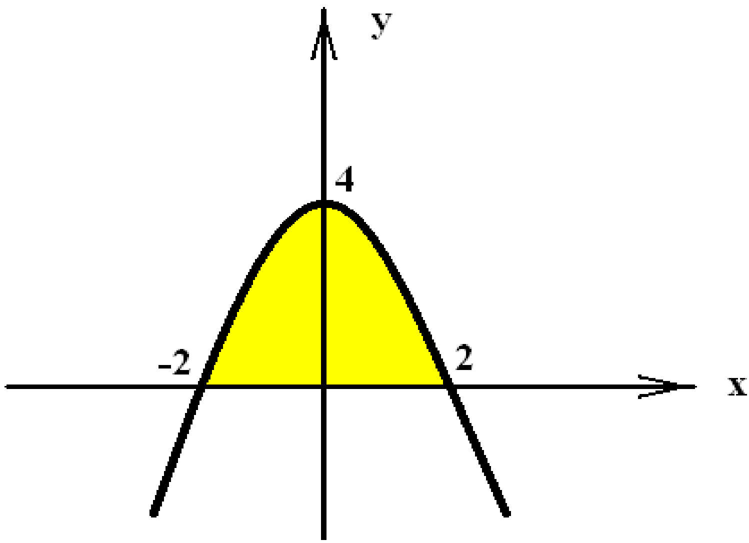

Рис. 6.2

Тогда

$$S=\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=2\int\limits_{0}^{2}\left(4-x^2\right)dx=2\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}\ \text{(кв. ед.)}$$

Задача 6.7. Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оу фигуры, ограниченной линиями $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $y=\pm b$.

Решение

Из уравнения гиперболы определяем

$$x^2=a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

Тогда объем тела, образованного вращением части гиперболы вокруг оси Оу в пределах от $y=-b$ до $y=b$, равен

$$V_y=p\int\limits_{-b}^{b}a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)dy=2pa^2\int\limits_{0}^{b}\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)dy=$$

$$=2pa^2\left(y+\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b=\frac{8pa^2b}{3}\left(\text{куб.ед.}\right)$$

Тема 6.3. Несобственные интегралы

Определение 6.5. Несобственными интегралами называются интегралы с бесконечными пределами или интегралы от неограниченных функций.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Определение 6.6. *Предел интеграла* $I(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ *при неограниченном возрастании x называется несобственным интегралом от функции* $f(x)$.

Такой интеграл обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Несобственными интегралами с бесконечными пределами также являются интегралы вида

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Если преедел интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ при $x\to\infty$ существует и конечен, то он называется сходящимся, в противном случае такой интеграл называется расходящимся.

Заметим, что при $f(x)\rangle 0$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ геометрически можно трактовать как площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Правила исследования таких интегралов дает теорема.

Теорема 6.4. Если первообразная F(x) для функции $f(x)$ имеет конечный предел при $x\to\infty$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^x f(x)dx$ сходится и вычисляется при помощи формулы Ньютона-Лейбница, если первообразная F(x) для функции $f(x)$ не имеет конечный предел при $x\to\infty$, то несобственный интеграл является расходящимся.

Задача 6.8 Вычислить несобственный интеграл или показать, что он расходится

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, б) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$, в) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$, г) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$

Решение

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^a = 0 + 1 = 1$

б) $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{a\to\infty} \ln|x|\Big|_1^a = \infty - 0 = \infty$ интеграл расходится,

в) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to\infty}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^a = 2(\infty - 1) = \infty$ - интеграл расходится

г) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{1-n}\left(a^{1-n} - 1\right)$

Как показано в пунктах б) и в) при $n \le 1$ интеграл расходится. Если $n > 1$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}.$$

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Известно, что необходимым условием интегрируемости функции на отрезке $[a,b]$ есть ее ограниченность. Однако, встречаются задачи, которые приводят к рассмотрению интеграла от функций, которые являются ограниченными практически на всем отрезке и только в окрестности некоторой точки являются неограничены. Интегралы от неограниченных функций также называются несобственными.

<u>Определение 6.7</u>. Несобственным интегралом $\int_a^b f(x)dx$ где $f(b-0)=\infty$ от функции $f(x)$ неограниченной в промежутке $[a,b)$ называется предел интеграла $\int_a^x f(x)dx$ при $x \to b-0$.

Итак, в соответствии с определением имеют

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b-0}\int_a^x f(x)dx\text{, где } f(b-0)=\infty .$$

Правила исследования таких интегралов дает теорема.

<u>Теорема 6.5.</u> Если первообразная F(x) для функции $f(x)$ имеет левосторонний предел в точке $x=b$, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ($f(b-0)=\infty$) сходится и вычисляется при помощи формулы Ньютона-Лейбница, если первообразная F(x) для функции $f(x)$ не имеет конечный предел, то такой несобственный интеграл является расходящимся.

<u>Задача 6.9</u> Вычислить несобственный интеграл или показать, что он расходится

а) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$.

Решение

а) $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0+0}(\ln x)\Big|_a^1 = \infty$ интеграл расходится.

б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-2x)}{\sqrt{1-2x}} = \lim_{b\to\frac{1}{2}-0}[-\sqrt{1-2x}]_0^b = 1$.

Раздел 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение 7.1. *Дифференциальным уравнением* называется соотношение, содержащее неизвестную функцию под знаком производной или дифференциала.

Если искомая функция есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Если такая функция есть функцией многих независимых переменных, то такое дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных*.

Порядок дифференциального уравнения определяется порядком высшей производной, входящей в уравнение.

В общем виде дифференциальное уравнение n-го порядка можно записать следующим образом

$$F\left(x, y, y^1, \ldots y^{(n)}\right) = 0$$

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = y(x)$, при подстановке которой в уравнение оно обращается в тождество.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется его *интегрированием*.

Общим решением дифференциального уравнения п-го порядка называется решение вида $y = y\left(x, c_1 c_2, \ldots c_n\right)$. Геометрически общее решение выражается множеством (или семейством) интегральных кривых.

Решения, полученные из общего при определенных значениях произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots c_n$, называются *частными решениями*, график частного решения представляет собой интегральную кривую.

Задача отыскания из общего решения его некоторого частного называется *задачей Коши*.

Тема 7.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 8.2. *Дифференциальным уравнением первого* порядка называется соотношение, связующее независимую переменную, неизвестную функцию и ее производную.

В общем виде дифференциальное уравнение первого порядка записывается следующим образом

$$F(x, y, y') = 0 \tag{7.1}$$

Здесь функция может явно зависеть или не зависеть от x или y, но она непременно должна зависеть от y'.

Если уравнение (7.1) разрешено относительно y', то получают уравнение вида

$$y' = f(x, y)$$

которое называется *уравнением, разрешенным относительно производной*. Следует отметить, что дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, всегда можно записать в так называемой *дифференциальной форме:*

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Решение дифференциального уравнения 1-го порядка, содержащее произвольную постоянную, называется общим его решением, т. е. в таком случае решение можно записать в виде функции

$$y = f(x, j)$$

Рассмотрим основные типы дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ *называется уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно представить в виде

$$y' = \varphi(x) \cdot \psi(y) \tag{7.2}$$

т. е. если его правая часть есть произведением двух функций, одна из которых не зависит от x, а другая от y. Предположим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывны на интервалах $a < x < b$, $c < y < d$ и что функция $\psi(y) \neq 0$. Тогда уравнение (8.2) можно представить в виде

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx .$$

Очевидно, что при этом переменные разделяются и имеют

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + c$$

или

$$k(y) = \mathrm{d}(x) + c$$

Последние соотношения охватывают все решения дифференциального уравнения (7.2) в области

$$\{a < x < b; \;\; c < y < d\}.$$

<u>Задача 7.1.</u> Проинтегрировать уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

Здесь $j(x) = x;\; y(y) = (y^2 + 1);\; y^2 + 1 \neq 0$.

Тогда

$\dfrac{dy}{1+y^2} = xdx$ или $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \int xdx$

После интегрирования имеем

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + c$$

или

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \qquad (7.3)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{x_0^2}{2} + c < \frac{\pi}{2}$$

Задавая любые значения (начальные) x_0 и y_0 из соотношения (7.3) можно определить c и, следовательно, выделить частное решение. Найдем частное решение исходного уравнения при, например, следующих начальных условиях $y(1) = 0$. Тогда

$$\operatorname{arctg} y_0 = \frac{x_0^2}{2} + c;$$

$$c = \operatorname{arctg} y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

Следовательно,

$$y = \mathrm{tg}\left(\frac{x^2}{2} + \mathrm{arctg}\ y_0 - \frac{x_0^2}{2}\right)$$

или

$$y = \mathrm{tg}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

Однородные уравнения

Функция $f(x, y)$ для которой выполняется условие

$$f(tx,ty) = t^n \cdot f(x,y)$$

называется однородной функцией n -й степени.

Например, функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$ - однородная функция третьей степени.

Определение 7.3. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если его правая часть $f(x, y)$ есть однородная функция нулевой степени относительно своих аргументов.

Однородным будет всякое уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ - однородные функции одинаковой степени.

Утверждение 7.1. Выполняя замену переменных $t = y/x$ $(y = tx)$, однородное уравнение приводят к уравнению с разделяющимися переменными.

При этом $y' = t'x + t$ или через дифференциальную форму $dy = xdt + tdx$.

Доказательство утверждения 7.1. Рассмотрим уравнение вида $y' = f(x, y)$. Применяя замену $y = tx$ правую часть такого уравнения можно записать в виде

$$f(x, y) = f(x, tx) = f\left(1; \frac{y}{x}\right)$$

т.е.

$$f(x, y) = j\left(\frac{y}{x}, y\right).$$

Последнее соотношение показывает, что правая часть исходного уравнения фактически зависит от одного аргумента - отношения y/x , т.е.

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Вводя новую неизвестную функцию t с помощью подставки $y = tx$, получим

$$t'x + t = \varphi(t)$$

или

$$t' = \frac{\varphi(t) - t}{x}$$

Однако, последнее уравнение и есть уравнением с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции t Общий интеграл такого уравнения имеет вид

$$\int \frac{dt}{j(t) - t} = \int \frac{dx}{x} + c$$

Заменяя в этом соотношении вспомогательную функцию t ее выражением через x и y, находят общий интеграл исходного уравнения в области переменных x , y .

<u>Задача 7.2.</u> Проинтегрировать уравнение

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0 .$$

Данное уравнение относится к однородному типу, поскольку коэффициенты при dx и dy являются однородными функциями второй степени.

Полагая $y = tx$, $dy = xdt + tdx$, имеем

$$(x^2 - t^2x^2)dx + 2x^2t(xdt + tdx) = 0$$

или

$$(1 + t^2)dx + 2xtdt = 0$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dx}{x} + \frac{2t}{1 + t^2}dt = 0 ,$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2t}{1+t^2}dt = 0,$$
$$\ln|x| + \ln\left|1+t^2\right| = \ln c,$$
$$x\left(1+t^2\right) = c$$

Учитывая, что $t = y/x$, имеем

$$x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = c$$
$$x^2 + y^2 = c.$$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Определение 7.4. Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7.4}$$

где $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ называется *уравнением в полных дифференциалах*.

Заметим, что левая часть такого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$.

В общем случае, уравнение (7.4) можно представить в виде

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{7.5}$$

Вместо уравнения (7.5) можно рассматривать уравнение

$$du(x,y) = 0,$$

решение которого есть общим интегралом уравнения (7.4). Таким образом, для решения уравнения (7.4) необходимо найти функцию $u(x,y)$. В соответствии с определением уравнения (7.4), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= P(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= Q(x,y) \end{aligned} \tag{7.6}$$

Функцию $u(x,y)$ будем отыскивать, как функцию, удовлетворяющую одному из этих условий (7.6):

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\varphi(y)$$

где φ - произвольная функция, не зависящая от x.

Функция $\varphi(y)$ определяется так, чтобы выполнялось второе условие выражения (7.6)

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)$$

$$\int\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)=Q(x,y) \tag{7.7}$$

Из выражения (7.7) и определяется функция $\varphi(y)$. Подставляя ее в выражение для $u(x,y)$ и получают общий интеграл исходного уравнения.

Задача 7.3. Проинтегрировать уравнение

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$$

Здесь $\frac{\partial P}{\partial y}=12xy$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy$.

Следовательно, данное уравнение относится к типу дифференциальных уравнений в полных дифференциалах. Функцию $u(x,y)$ будем отыскивать в виде

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y);$$

$$u(x,y)=\int\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\varphi(y)$$

$$u(x,y)=x^3+3x^2y^2+c(y); \qquad \varphi(y)=c(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+c'(y).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3.$$

Тогда $6x^2y+c'(y)=6x^2y+4y^3$;

$$c'(y)=4y^3; \qquad c(y)=\int 4y^3dy; \qquad c(y)=y^4+c.$$

$u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c$

$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c = 0$

В ряде случаев условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ может не выполняться.

Тогда такие уравнения к рассматриваемому типу приводятся умножением на так называемый интегрирующий множитель, который, в общем случае, является функцией только x или y.

Если у некоторого уравнения существует интегрирующий множитель, зависящий только от x, то он определяется по формуле

$$\mu = e\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx$$

где отношение $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ должно быть только функцией x.

Аналогично, интегрирующий множитель, зависящий только от y, определяется по формуле

$$\mu = e - \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy$$

где отношение $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ должно быть только функцией y.

Отсутствие в приведенных соотношениях, в первом случае переменной y, а во втором - переменной x, являются признаком существования интегрирующего множителя для данного уравнения.

<u>Задача 7.4.</u> Привести данное уравнение к уравнению в полных дифференциалах.

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x .$$

Рассмотрим отношение:

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1$$

$$\mu = e^{\int dx}, \qquad \mu = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} .$$

$$\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)e^x dx + (x^2 + y^2)e^x dy = 0$$

Тема 7.2. Линейные дифференциальные уравнения

Определение 7.5. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *линейным*, если оно линейно относительно искомой функции y, ее производной y' и не содержит произведения искомой функции и ее производной.

Общий вид линейного дифференциального уравнения представляется следующим соотношением:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{7.8}$$

Если в соотношении (7.8) правая часть $Q(x) \equiv 0$, то такое уравнение называется *линейным однородным*. В случае, когда правая часть $Q(x) \neq 0$, то такое уравнение называется *линейным неоднородным*.

Покажем, что уравнение (7.8) интегрируется в квадратурах.

На первом этапе рассмотрим линейное однородное уравнение.

$$y' + P(x)y = 0$$

Такое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Действительно,

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx ;$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|c| ;$$

$$y_{0,0} = c \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

Последнее соотношение и определяет общее решение линейного однородного уравнения.

Для отыскания общего решения линейного неоднородного уравнения применяется метод вариации производной постоянной. Идея метода состоит в том, что общее решение линейного неоднородного уравнения в том же виде, что и решение соответствующего однородного уравнения, однако произвольная постоянная c заменяется некоторой функцией $c(x)$, подлежащей определению. Итак, имеем:

$$y(x) = c(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} \tag{7.9}$$

$$y'(x) = c'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} - c(x)\cdot P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Подставляя в соотношение (7.8) выражения, соответствующие $y(x)$ и $y'(x)$, получим

$$c'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

или

$$\frac{dc(x)}{dx} = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$c(x) = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + c_1$$

Подставляя последнее выражение в соотношение (7.9), получают общий интеграл линейного неоднородного уравнения.

$$y(x) = \left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + c_1\right]\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения определяется двумя квадратурами: общего решения линейного однородного уравнения и частного решения линейного неоднородного уравнения.

Задача 7.5. Проинтегрировать уравнение $y' - 2xy = (x+1)e^{x^2}$

Здесь $P(x) = -2x$; $\quad Q(x) = (x+1)e^{x^2}$.

Таким образом, исходное уравнение относится к типу линейных неоднородных дифференциальных уравнений.

На первом этапе найдем общее решение линейного однородного уравнения.

$$y' - 2xy = 0;$$
$$y' = 2xy;$$
$$\frac{dy}{y} = 2xdx;$$
$$\ln|y| = x^2 + \ln|c|; \qquad y_{0,0} = ce^{x^2}$$

На втором этапе определим общее решение линейного неоднородного уравнения, которое отыскивают в виде-

$$y = c(x) \cdot e^{x^2},$$

где $c(x)$ - функция, подлежащая определению.

Итак, имеем:

$$y' = c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \cdot 2x \cdot e^{x^2}$$

Подставляя соотношения для y и y' в исходное линейное неоднородное уравнение получим:

$$c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \cdot 2x \cdot e^{x^2} - 2x \cdot c(x) \cdot e^{x^2} = (x+1)e^{x^2}$$
$$c'(x) = (x+1);$$
$$c(x) = \int (x+1)dcx + c_1;$$
$$c(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + c_1.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$y_{0,н} = \left[\frac{(x+1)^2}{2} + c_1\right] \cdot e^{x^2}.$$

Уравнение Бернулли

Так называется уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^m \tag{7.10}$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$.

При $m = 0$ уравнение (7.10) превращается в линейное неоднородное уравнение, при $m = 1$ такое уравнение превращается в линейное однородное.

Утверждение 7.2. При помощи подстановки $y^{1-m} = z$, где z - новая неизвестная функция, уравнение Бернулли преобразуется к линейному относительно переменной z.

При выполнении такого рода подстановки, имеем, если $y^{1-m} = z$, то

$$(1-m)y^{-m} \cdot y' = z'; \quad y' = z'y^m \frac{1}{m-1}.$$

Тогда, после подстановки выражений для переменных y и y' в соотношение (8.10), получают

$$z' + (1-m)P(x)z = (1-m)Q(x)$$

или

$$z' + P_1(x)z = Q_1(x) \tag{8.11}$$

Последнее уравнение относится к типу линейных неоднородных уравнений и может быть проинтегрировано в квадратурах. Тогда таким свойством будет обладать и уравнение Бернулли. Уравнение (7.11) можно проинтегрировать методом вариации производной постоянной

Задача 7.6. Проинтегрировать уравнение

$$y' + xy = x^3 y^3$$

Здесь $m = 3$ и данное уравнение будет относиться к типу уравнений Бернулли. Для его решения применяем подстановку

$$y^{-2} = z; \qquad y = zy^3; \qquad y' = -\frac{1}{2y^{-3}} \cdot z'$$

После подстановки соотношений для y и y' в исходное уравнение, получим

$$z' - 2xz = -2x^3.$$

Решая такое уравнение методом вариации произвольной постоянной, получим

$$z = (x^2 + 1) + c \cdot e^{x^2}$$

Возвращаясь к исходным переменным, имеем совокупность решений заданного уравнения

$$\begin{cases} y^{-2} = \left(x^2+1\right) + c \cdot e^{x^2}; \\ y = 0. \end{cases}$$

Тема 7.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид линейного однородного дифференциального уравнения II порядка с постоянными коэффициентами представляется следующим образом:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (7.12)$$

Определение 7.6. Любое решение дифференциального уравнения (7.12), представленное в виде $y = f(x)$ называется *частным решением*.

Определение 8.7. Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения II порядка на интервале $(a; b)$ называется совокупность его двух частных решений линейного однородного уравнения определенных и линейно-независимых на интервале $(a; b)$.

Следствие определения 7.7. Для того, чтобы система двух частных решений линейного однородного уравнения II порядка была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы составленный для нее определитель Вронского отличался от нуля по крайней мере в одной точке интервала $(a; b)$.

Определение 7.8. Определитель вида

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* для дифференциального уравнения II порядка.

Теорема 7.1. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейнозависимы на интервале $(a; b)$, то определитель Вронского превращается в нуль.

С помощью фундаментальной системы решений дифференциального уравнения II-го порядка можно решить вопрос о структуре общего интеграла однородного дифференциального уравнения II-го порядка.

Теорема 7.2. Если y_1, y_2 - фундаментальная система решений линейного однородного уравнения II-го порядка на интервале $(a; b)$, то линейная комбинация этих решений

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

есть общее решение дифференциального уравнения в заданной области.

Примечание. Из теоремы следует, что для того, чтобы получить общее решение, необходимо найти два линейно-независимых частных решения и взять их линейную комбинацию. Например, для уравнения $y'' - y' = 0$, частными решениями будут функции вида $y_1 = e^{x}$, $y_2 = e^{-x}$. Следует иметь в виду, что эти решения на всей действительной оси будут линейно-независимыми, поскольку

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x}{}_{1} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 .$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения вида $y'' - y' = 0$ будет записано в виде

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} .$$

Частные решения дифференциального уравнения (7.12) отыскиваются в виде

$$y = e^{kx} \tag{7.13}$$

Выбор решения уравнения (8.12) в виде (8.13) основан на том, что функция $y = e^{kx}$ определена для всех $x \in (-\infty; +\infty)$, имеет производную любого порядка и нигде не обращается в нуль.

После подстановки (7.13) в (7.12) имеем

$$e^{kx}\left(k^2 + a_1 k + a_2\right) = 0 .$$

Поскольку $e^{kx} \neq 0$, то решение (8.13) будет удовлетворять уравнению (7.12), если

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \tag{7.14}$$

Такое уравнение принято называть *характеристическим уравнением*, корни его определяются из соотношения

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} .$$

При решении характеристического уравнения (7.14) возможны следующие варианты:

1. Корни характеристического уравнения действительные и различные.

При этом $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$ и общее решение линейного однородного уравнения представляется следующим образом:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}.$$

2. Корни характеристического уравнения действительны и равны между собой.

Итак, здесь имеют $k_1 = k_2 = k$.

Тогда одно частное решение записывается в виде $y_1 = e^{kx}$, а другое $y_2 = xe^{kx}$.

При этом нетрудно проверить, что система решений $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ будет фундаментальной. Таким образом, здесь общее решение исходного уравнения записывается в виде $y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$ или $y = e^{kx}(c_1 + c_2 x)$.

3. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные. При этом, имеют следующее решение характеристического уравнения (8.14):

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \text{ здесь } i = \sqrt{-1},$$

тогда $y_1 = e^{ax} \cos bx$, $y_2 = e^{ax} \sin bx$ и общий интеграл дифференциального уравнения представляют в виде

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx).$$

Задача 7.7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Характеристическое уравнение здесь имеет вид

$$k^2 + 2k + 1 = 0.$$

Его решения будут определяться следующим образом:

$$k_1 = k_2 = -1.$$

В таком случае фундаментальная система решений будет выражаться следующими функциями

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^{-x}$$

и общий интеграл исходного уравнения будет иметь вид

$$y = e^{-x}\left(c_1 + c_2 x\right).$$

Задача 7.8. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения $y'' + 16y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 0;\ y'(0) = 4$.

Характеристическое уравнение здесь имеет вид

$$k^2 + 16 = 0;$$

Тогда

$$k_{1,2} = \pm 4i.$$

В таком случае

$$y_1 = e^{0x} \cdot \cos 4x;\ y_2 = e^{0x} \sin 4x.$$

Общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x.$$

Далее решим задачу Коши.

Используя условие $y(0) = 0$, определим значение c_1.

$$0 = c_1 1 + 0; \quad c_1 = 0.$$

Используя условие $y'(0) = 4$ определим c_2

$$y' = -4c_1 \sin 4x + 4c_2 \cos 4x.$$

$$4 = -4 \cdot 0 + 4c_2; \quad c_2 = 1.$$

Итак, решение задачи Коши при заданных начальных условиях имеет вид:

$$y = \sin 4x.$$

Тема 7.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II-го порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами записывается следующим образом:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \tag{7.15}$$

здесь a_1, a_2 -постоянные, $f(x) \neq 0$.

Структура общего решения уравнения (7.15) может определяться на основе теоремы 7.3.

Теорема 7.3. Общим решением дифференциального уравнения (7.15) при постоянных коэффициентах a_1, a_2 и непрерывной функции $f(x)$ есть сумма общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения, т.е.

$$y(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i y_i + \tilde{y} \qquad (7.16)$$

Общее решение уравнения (7.15) можно определить при помощи теоремы 7.4.

Теорема 7.4. Общее решение линейного неоднородного уравнения (7.15) в некоторой области может быть найдено в квадратурах, если известно общее уравнение соответствующего однородного уравнения.

В общем случае, задача подбора частного решения вызывает определенные трудности, в связи с чем представляет интерес *метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)*. Этот метод позволяет найти общее решение линейного неоднородного уравнения в квадратурах по известной фундаментальной системе решений соответствующего однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Идея метода состоит в следующем. Пусть известна фундаментальная система решения y_1, y_2 соответствующего однородного уравнения. Тогда общее решение неоднородного уравнения отыскивают в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i(x) y_i \qquad (7.17)$$

где $c_i(x)$- неизвестные функции.

Такие функции для дифференциального уравнения второго порядка определяются из решения следующей системы:

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (8.17)$$

Таким образом, для решения неоднородного дифференциального уравнения II порядка необходимо:

1) решить однородное дифференциальное уравнение и записать его общее решение;

2) записать общее решение неоднородного уравнения в форме общего решения однородного уравнения, однако с переменными коэффициентами;

3) построить систему (7.16) и решить ее;

4) решение системы (7.18) подставить в выражение (8.17) и получить при этом общий интеграл линейного неоднородного уравнения.

<u>Задача 7.9.</u> Методом вариации произвольной постоянной проинтегрировать уравнение

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

На первом этапе составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 1 = 0 .$$

Решение такого уравнения имеет вид:

$$k_{1,2} = \pm i .$$

Фундаментальная система решений общего однородного уравнения представляется функциями:

$$y_1 = \cos x; \quad y_2 = \sin x .$$

Тогда общее решение линейного однородного уравнения записывается в виде

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x .$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения представляется соотношением

$$y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x .$$

Функции $c_1(x)$, $c_2(x)$ находим из системы

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2' \sin x = 0, \\ -c_1'(x)\sin x + c_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Решая такую систему, имеем

$$c_1(x) = \ln|\cos x| + c_1'; \quad c_2(x) = x + c_2'.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y = \left(\ln|\cos x| + c_1'\right)\cos x + \left(x + c_2'\right)\sin x \ .$$

Определение частного решения линейного неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов

Вновь рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение II-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad (7.15)$$

Это уравнение, как было показано ранее, всегда можно проинтегрировать в квадратурах методом вариации произвольной постоянной.

Однако, необходимо отметить, что в ряде случаев, уравнение (7.15) можно проинтегрировать без квадратур, чисто алгебраическими методами. Оказывается, что если функция $f(x)$ - правая часть уравнения (7.15) - имеет специальный вид, то частное решение линейного неоднородного уравнения может быть определено методом неопределенных коэффициентов.

Теорема 7.5. Если правая часть уравнения (7.15) имеет вид

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x} \ ,$$

где $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m$ - многочлен степени m, то его частное решение можно отыскать в виде

$$\breve{y} = x^r e^{ax} \cdot Q(x),$$

где $Q(x)$ - некоторый многочлен степени m, r - число, которое показывает, сколько раз α есть корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Задача 7.10. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - y = xe^{2x} \ .$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0.$$

Здесь $k_1 = 1; \quad k_2 = -1$.

Тогда $y_{00} = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$.

Поскольку $\alpha = 2$ а>2 не есть корнем характеристического уравнения, то $r = 0$ и имеем:

$$\tilde{y} = (Ax + B)e^{2x}.$$

Определим $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$

$$\tilde{y}' = Ae^{2x} + 2e^{2x}(Ax + B),$$

$$\tilde{y}'' = 2Ae^{2x} + 4e^{2x}(Ax + B) + 2e^{2x} \cdot A.$$

Подставляя выражение для $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$ в исходное уравнение, имеем

$$4A + 4Ax + 4B - Ax - B \equiv x.$$

$$\begin{array}{r|l} x & 3A = 1; \\ x^0 & 4A + 3B = 0. \end{array}$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{4}{9}.$$

Частное решение линейного неоднородного уравнения записывается следующим образом

$$\tilde{y} = \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^{2x}.$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения представляется соотношением

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{9}\right)e^{2x}.$$

<u>Задача 7.11.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + y = 3e^{x}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k + 1 = 0.$$

Здесь $k_1 = k_2 = 1$.

Тогда

$$y_{00} = c_1 e^x + c_2 x e^x .$$

Подберем частное решение. Поскольку $\alpha = 1$ есть двукратным корнем характеристического уравнения, то имеем $r = 2$.

Частное решение исходного уравнения имеем в виде

$$\tilde{y} = x^2 \cdot A \cdot e^x .$$

Определим $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$.

$$\tilde{y}' = 2x \cdot Ae^x + x^2 Ae^x .$$

$$\tilde{y}'' = 2Ae^x + 2xAe^x + 2xAe^x + x^2 Ae^x .$$

После подстановки $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$ и $\tilde{y}''$, y' и y'' в исходное уравнение, имеем:

$$A = \frac{2}{3}.$$

Таким образом:

$$\tilde{y} = \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot e^x .$$

В свою очередь, общее решение линейного неоднородного уравнения записывается в виде

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{3}{2} x^2 e^x .$$

<u>Теорема 7.6.</u> Если правая часть уравнения (7.15) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \left[P_1(x) \cos\beta x + P_2(x) \sin \beta x \right],$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$ - многочлены степени соответственно m_1 и m_2 то его частное решение можно отыскать в виде

$$\tilde{y} = x' e^{\alpha x} \cdot \left[Q_1(x) \cos\beta x + Q_2(x) \sin \beta x \right].$$

Здесь $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ - многочлены степени не выше m, где m - большая из степеней m_1, m_2; r - число, которое показывает, сколько раз $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения.

<u>Задача 7.12.</u> Определить общее решение уравнения

$$y'' - y = 3e^{2x}\cos x.$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 1 = 0.$$

Здесь $k_1 = 1;\ k_2 = -1$.

Тогда

$$y_{00} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Частное решение исходного уравнения будем отыскивать в виде

$$\hat{y} = x^r e^{ax} \cdot \left[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\right].$$

Здесь $\alpha = 2;\ \beta = 1;\ \alpha + i\beta = 2 + i$, значит, $r = 0$.

Тогда

$$\hat{y} = e^{2x}\left[A\cos x + B\sin x\right].$$

При этом

$$\hat{y}' = e^{2x}\left(A\cos x + B\sin x\right) + e^{2x}\left(-A\sin x + B\cos x\right).$$

$$y'' = \left[(4b + 3a)\cos x + (-4a + 3b)\sin x\right]e^{2x}.$$

Подставляя y'' и y в исходное уравнение, имеем

$$(3A + 4B)\cos x + (-4A + 3B)\sin x - A\cos x - B\sin x = 3\cos x.$$

$$\begin{array}{r|l} \cos x & 2A + 4B = 3 \\ \sin x & -4A + 2B = 0 \end{array}$$

$$A = \frac{3}{10}, \qquad B = \frac{6}{10}.$$

$$\hat{y} = e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{6}{10}\sin x\right)$$

Общее решение исходного уравнения выражается зависимостью

$$\hat{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{2x}\left(\frac{3}{10}\cos x + \frac{6}{10}\sin x\right).$$

Раздел 8. РЯДЫ

Понятие бесконечного ряда и его суммы относится к основным понятиям математического анализа. Бесконечные ряды применяются во многих теоретических исследованиях математического анализа, а также в разнообразных приложениях.

Тема 8.1. Числовые ряды

Определение 8.1. *Числовым рядом* называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{8.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - действительные или комплексные числа, они называются *членами ряда*.

Определение 8.2. Член ряда, выраженный в виде функции его n-ного номера $a_n = f(n)$, называется *общим членом ряда*.

Ряд считается заданным, если указан способ определения его любого члена.

Ряд (8.1) часто записывают в следующем виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots ,$$

имеющий общий член $a_n = \frac{1}{n}$, компактно записывается следующим образом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} . \tag{8.2}$$

Ряд (8.2) называется *гармоническим*.

Определение 8.3. Сумма $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ первых n членов ряда называется частной суммой этого ряда.

Определение 8.4. Суммой ряда S называется предел частной суммы S_n ряда при условии, что n произвольным способом неограниченно возрастает по натуральным числам, т.е.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n .$$

Числовой ряд, имеющий сумму, называется *сходящимся*, а ряд, не имеющий суммы, называется *расходящимся*.

Гармонический ряд является расходящимся рядом, а ряд, составленный из членов любой убывающей прогрессии $a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... \quad (|q| < 1)$, является сходящимся рядом, т.к. имеет сумму $\dfrac{a}{1-q}$. В случае, когда $|q| > 1$ ряд будет расходящимся, т.к. его частная сумма S_n не имеет предела при $n \to \infty$, являясь бесконечно большой величиной.

При исследовании рядов возникает основная проблема, которая состоит в установлении факта в сходимости или расходимости ряда. Для решения этой задачи существует ряд теорем и признаков. Рассмотрим основные теоремы о сходящихся числовых рядах.

Теорема 8.1. Если сходится ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...,$$

то сходится и ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + ... + a_{m+n} + ...,$$

получаемый из данного ряда отбрасыванием первых m членов.

Теорема 8.2. Если сходится ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...,$$

и суммой его является число S то сходится и ряд

$$da_1 + da_2 + ... + da_n + ...,$$

при чем сумма его равна dS.

Теорема 8.3. Если ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...,$$

сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ т - е - при $n \to \infty$ общий член сходящегося ряда равен нулю.

Теорему 8.3. часто называют *необходимым признаком* сходимости ряда, и, следовательно, если $\lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Рассмотрим важнейшие признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами.

<u>Первый признак сравнения.</u> Пусть даны два ряда с положительными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (8.2)$$

и

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_n, \qquad (8.3)$$

причем каждый член ряда (8.2) не превосходит соответствующего члена ряда (8.3), т.е. $u_n \le \nu_n \quad (n = 1,2,3,\ldots)$.

Тогда, если сходится ряд (8.3), то сходится и ряд (8.2); если расходится ряд (8.2), то расходится и ряд (8.3).

<u>Второй признак сравнения.</u> Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\nu_n} = k$, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu_n$, то оба ряда одновременно сходятся или одновременно расходятся.

За<u>дача 8.1.</u> Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \ldots + \ldots$$

Данный ряд получен из гармонического отбрасыванием первых десяти членов. Следовательно, он расходится.

<u>Задача 8.2.</u> Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{11} + \ldots$$

Здесь $a_n = \dfrac{1}{3n-1}$. Сравним данный ряд с гармоническим, у которого

$$u_n = \frac{1}{n}: \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\nu_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, принимая во внимание второй признак сравнения, данный ряд расходится.

<u>Задача 8.3.</u> Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+$$

сравним данный ряд с гармоническим, т.к. $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, то в соответствии с первым признаком сравнения исходный ряд расходится.

Признак Коши. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ с неотрицательными членами существует такое число $q<1$, что для всех достаточно больших n выполняется условие $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, то ряд сходится, если $q>1$, то ряд расходится.

Задача 8.4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$.

Здесь $a_n=\frac{1}{n^n}$. Воспользовавшись признаком Коши, имеем

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1.$$

Таким образом, исходный ряд сходится.

Признак Даламбера. Если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$, то этот ряд сходится при $D<1$ и расходится при $D>1$ 0.

Задача 8.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}$.

Здесь $a_n=\frac{n}{4^n}$, а $a_{n+1}=\frac{n+1}{4^{n+1}}$.

Воспользуемся признаком Даламбера

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n+1)}{4n^{n+1}\cdot n}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}<1.$$

Таким образом, исходный ряд сходится.

Следует отметить, что доказательство признака Коши и Даламбера основано на сравнении заданных рядов с рядом геометрической прогрессии. В этой связи эти признаки "не чувствительны" к рядам, сходящимся "медленнее", чем геометрическая прогрессия. Для таких рядов применяют более сильные признаки, в частности, интегральный признак.

Интегральный признак сходимости рядов с положительными членами. Если функция $\varphi(x)$ при $x \geq 1$ - непрерывная, положительная и монотонно убывающая на промежутке $[1;\, +\infty]$, то ряд

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(n) + \ldots ,$$

т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$, и интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} \varphi(x)dx$ ведут себя одинаково в отношении сходимости.

Задача 8.6. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \ldots \ .$$

Воспользуемся признаком Даламбера, при этом имеем

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 .$$

Признак Даламбера не позволяет установить факт сходимости. Воспользуемся интегральным признаком. При этом

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} \text{ и } \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_{1}^{\infty} = 1 .$$

Таким образом, исходный ряд сходится.

Знакопеременные ряды

Знакопеременными называются ряды, члены которых могут иметь любые знаки, например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(n+1)$.

В частности, если положительные и отрицательные члены ряда следуют друг за другом поочередно, то такой знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*.

Знакочередующие ряды

Знакочередующий ряд, члены которого являются положительными, можно представить в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} \cdot a_n + \ldots ,$$

где $a_n > 0$; $n = 1,2,3,\ldots$

Для исследования сходимости знакочередующихся рядов применяют признак Лейбница.

<u>Признак Лейбница.</u> Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов убывают, а общий член стремится к нулю, т. е. если выполняются следующие два условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 \ldots$ и 2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Достаточно важный класс сходящихся рядов образуют так называемые абсолютно сходящиеся ряды. При этом членами таких рядов могут быть любые действительные числа.

<u>Определение 8.5.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

<u>Теорема 8.4.</u> Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Данная теорема утверждает, что если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.

Необходимо отметить, что:

1) для знакопостоянных рядов понятие сходимости и абсолютной сходимости совпадают;

2) ряд называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Рассмотрим признаки Даламбера и Коши для произвольных знакопеременных рядов.

Признак Даламбера. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, при $\rho > 1$ ряд будет расходящимся, при $\rho = 1$ признак не решает вопроса о сходимости ряда.

Задача 8.7. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \ldots$$

Здесь за каждыми двумя положительными членами ряда следует два отрицательных. Для исследования сходимости такого ряда воспользуемся признаком Даламбера.

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n-1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 .$$

Исходный ряд сходится по признаку Даламбера.

Задача 8.8. Исследовать ряд на абсолютную сходимость

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \ldots$$

Здесь $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Для такого ряда выполняются следующие условия:

а) $\frac{1}{2} > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{2^3} > \frac{1}{2^4} > \frac{1}{2^5} > \ldots$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$. Следовательно, исходный ряд сходится в соответствии с признаком Лейбница.

Исследуем заданный ряд на абсолютную сходимость. Для этого составим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right|$ из абсолютных величин:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots$$

Такой ряд представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, которая всегда сходится. Таким образом, исходный ряд сходится абсолютно.

Задача 8.9. Исследовать сходимость ряда

$$1-1+1-1+1-\ldots$$

Здесь $a_n \nrightarrow 0$, следовательно ряд расходящийся, так как не выполняется необходимое условие сходимости.

Тема 8.2. Функциональные ряды

Пусть задана следующая последовательность функций $\{u_n(x)\}$, т. е.

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

которая определена на некотором множестве. Если члены такой последовательности соединить знаком плюс, то получают выражение

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ \ldots\ +u_n(x)+\ldots \tag{8.4}$$

или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Такие выражения называют *функциональными рядами*, а функция $u_n(x)$ называется *общим членом* ряда.

Частными суммами ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции вида

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x). \quad n=1,2,3,\ldots$$

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся* при $x=x_0$ или в точке (x_0), если в этой точке сходится последовательность его частных сумм:

$$S_1(x_0),\ S_2(x_0), S_n(x_0),\ \ldots$$

Другими словами, можно отметить, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится при $x = x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$, обозначим его через $f(x_0)$, называется суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0.

Определение 8.6. Совокупность всех значений x, для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, называется областью сходимости этого ряда.

Пусть $\lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$ на отрезке тогда $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на рассматриваемом отрезке. В этом случае отмечают, что функция $f(x)$ разлагается в ряд на отрезке $[a; b]$.

Как было показано, сходимость функционального ряда на отрезке $[a; b]$ означает, что для любого значения x отрезка $[a; b]$ соответствующий числовой ряд сходится. В этой связи для исследования на сходимость функциональных рядов можно использовать признаки сходимости числовых рядов.

Задача 8.10. Найти область сходимости ряда

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Компактно этот ряд можно представить следующим образом

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n .$$

Этот ряд сходится для всех $x \in (-1;\ 1)$. Действительно, для каждого $x \in (-1;\ 1)$ сумма ряда равна $\frac{1}{1-x}$ (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Таким образом, в интервале $(-1; 1)$ исходный ряд определяет функцию

$$S(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + \ldots$$

Тема 8.3. Степенные ряды. Радиус сходимости. Теорема Абеля

Степенные ряды широко применяются в математике особенно при решении разнообразных задач, связанных с приближенными значениями функций, интегралов и т.д.

Определение 8.7. Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad . \qquad (8.5)$$

В более общем виде степенной ряд задается соотношением

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (8.6)$$

или в компактной форме $\sum a_n (x - x_0)^n$, где x_0 - некоторая постоянная величина.

Если речь идет о ряде (8.5), то говорят, что он расположен по степеням x, в тоже время ряд (8.6) расположен по степеням $(x - x_0)$. Следует отметить, что ряд (8.6) всегда можно свести к виду (8.5), в связи с чем обычно принимают, что когда не обуславливают степенной ряд, то, имеет в виду ряд (8.5). Если ряд (8.5) сходится при $x = x_1$, то отмечают, что степенной ряд сходится в точке x_1.

Определение 8.8. Множество всех точек x, в которых степенной ряд сходится, называется областью сходимости степенного ряда.

Степенной ряд всегда сходится при $x = 0$ или $x = x_0$. В связи с этим можно утверждать, что область сходимости степенного ряда будет содержать по крайней мере одну точку. Дальнейшие сведения о виде *области сходимости* степенного ряда получают из теоремы Абеля.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится в некоторой точке $x = x_1$, то он сходится (и притом абсолютно) внутри окружности с центром в x_0 и радиусом $\rho < |x_1 - x_0|$, то есть радиусом меньше, чем расстояние от x_1

до x_0 .

Применяя теорему Абеля, легко можно установить, что для степенного ряда (8.5) возможно три варианта:

1) степенной ряд расходится во всех точках, кроме x_0 .

Например:

$$1^1 x + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + 4^4 x^4 + \ldots + n^n x^n + \ldots \quad .$$

Такие степенные ряды практического значения не имеют;

2) степенной ряд сходится во всех точках $x \in R^1$.

Например:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Сумма такого ряда равна функции e^x ;

3) степенной ряд сходится в одних точках, а в других - расходится.

Например:

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

При $x \le 1$ ряд сходится, при $x > 1$ ряд расходится. Следовательно, областью сходимости ряда будет отрезок $[-1;\ 1]$.

Определение 8.9. Число $R > 0$ такое, что ряд (9.6) сходится для всех значений x, которые удовлетворяют условию $|x - x_0| < R$, и расходится для всех x , удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| > R$, называется радиусом сходимости ряда.

Радиус сходимости степенных рядов можно отыскивать, руководствуясь следующими теоремами.

Теорема 8.5. Если у степенного ряда последовательность $\left\{ \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \right\}$ имеет конечный или бесконечный пределы, то для сходимости ряда справедлива формула $R = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Теорема 8.6. Если последовательность $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ имеет конечный предел, то для радиуса сходимости справедливо соотношение

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Задача 9.11. Найти радиус сходимости степенного ряда,

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \ldots (-1)\frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Для данного ряда имеем $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Тогда $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$

Исходный ряд сходится во всех точках $x \in (-\infty, \infty)$.

Задача 8.12. Найти радиус и область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

Здесь $a_n = \dfrac{1}{n+2}$. При этом $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|n+3|}{|n+2|} = 1$.

Таким образом, ряд сходится в интервале $(-1;1)$.

Рассмотрим область сходимости ряда. Для этого исследуем сходимость ряда на границах интервала $(-1;1)$.

Если $x = -1$, имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+2}$.

Такой ряд сходится по признаку Лейбница.

Если $x = 1$, то имеем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+2}$. Такой ряд будет расходящимся.

Таким образом, исходный ряд имеет область сходимости на промежутке $[-1;1]$.

Задача 8.13. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$.

Здесь $a_n = \frac{1}{3^n}$. Тогда радиус сходимости ряда определим из соотношения:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}} = 3.$$

Ряд сходится в интервале $(-3;3)$.

Задача 8.14. Исследовать сходимость ряда

$$(x-2)+\frac{1}{2^n}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots+\ldots$$

В данном случае имеют

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Тогда

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = 1.$$

Таким образом, ряд сходится, если $-1 < x-2 < 1$, т.е. $1 < x < 3$.

Выполним исследование сходимости ряда на границах интервала.

При $x = 3$, имеем ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\ldots$$

Этот ряд является сходящимся.

При $x = 1$, имеем

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...$$

Этот ряд является абсолютно сходящимся.

Таким образом, исходный ряд сходится в области $1 \le x \le 3$.

Тема 8.4. Разложение функции в степенные ряды

Любая функция, бесконечно дифференцируемая в заданном интервале, может быть разложена в этом интервале в сходящийся к ней бесконечный степенной ряд.

Пусть функция $f(x)$ есть суммой степенного ряда по степеням разности $(x-a)$, который сходится в некотором интервале:

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+...$$

Тогда в интервале сходимости ряд можно почленно дифференцировать любое число раз:

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+...+na_n(x-a)^{n-1}+...$$

$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+3\cdot a_4(x-a)^2+...+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}+...$$

.

.

.

$$f^n(x)=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot a_n+2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot(n+1)a_{n+1}(x-a)^{n-2}+...$$

В приведенных соотношениях принимая $x=a$, получим

$$f(a)=a_0;\;\; f'(a)=a_1;\;\; f''(a)=2!\,a_2;$$

$$f'''(a)=3!\,a_3;\quad \dots \quad f^{(n)}(a)=n!\,a_n\,.$$

Подставляя полученные выражения коэффициентов в ряд для $f(x)$, получим

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n...$$

Полученный ряд называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ по степеням $(x-a)$.

При $a=0$ получают ряд по степеням x, который называется *рядом Маклорена* функции $f(x)$.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Разность между функцией $f(x)$ и частной суммой $S_n(x)$ ряда Тейлора функции $f(x)$ называют *остаточным членом* ряда Тейлора и обозначают $R_n(x)$, т. е.

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x).$$

Остаточный член ряда Тейлора определяется следующим образом

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

Здесь $\xi = a + \theta(x - x_0)$.

Теорема 8.7. Для того, чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к ней в некотором интервале, необходимо и достаточно, чтобы в заданном интервале сходился бы к нулю остаточный член этого ряда.

Вывод: Задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд сводится, по существу, к определению x, при которых $R_n(x) \to 0$.

Ряды Тейлора некоторых элементарных функций

1. Ряд Тейлора для функции e^x сходится к e^x для любого $x \in R^1$ т. е.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad x \in R^1.$$

или

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad -\infty < x < \infty.$$

2. Ряд Тейлора функции $\sin x$ сходится к $\sin x$ для $x \in R^1$, т.е.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

или

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Здесь имеем $f(x) = \sin x$, тогда

$$f'(x) = \cos x; \quad f''(x) = -\sin x; \quad f'''(x) = -\cos x; \ \ldots$$

Для $x = 0$ получим

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 1; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = -1; \quad f^{iv}(0) = 0; \ \ldots$$

Таким образом,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \ldots$$

3. Ряд Тейлора для функции $\cos x$ сходится $\cos x$ для всех $x \in R^1$, т.е.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R^1$$

В данном случае имеем

$$f(x) = \cos x; \ f'(x) = -\sin x; \ f''(x) = -\cos x; \ f'''(x) = \sin x; \ldots .$$

Для $x = 0$, имеем

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = 0; \quad f''(0) = -1; \quad f'''(0) = 0; \quad \ldots$$

Таким образом,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6} + \ldots + \ldots \ .$$

4. В отличие от рассмотренных функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, для которых ряды Тейлора в точке $x = a = 0$ сходятся для любого $x \in R^1$ соответствующий ряд Тейлора для функции $\ln(1+x)$ сходится только на интервале $(-1; 1)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}; \ \ x \in (-1; 1).$$

Или

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \ldots$$

Задача 8.15. Разложить в ряд Маклорена функцию

$f(x) = 2^x$.

Здесь имеем:

$$f(x) = 2^x; \qquad\qquad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2; \qquad\qquad f'(0) = \ln 2;$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2; \qquad\qquad f''(0) = \ln^2 2;$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 2^x \cdot \ln 2; \qquad\qquad f^{(n)}(0) = \ln^n 2 .$$

Поскольку $0 < \ln 2 < 1$, то для фиксированного x имеет место неравенство $\left| f(x) < 2^x \right|$ при любом n. Таким образом, имеем:

$$2^x = 1 + \ln 2 \cdot x + \frac{\ln^2 2x}{2!} + \frac{\ln^3 3x}{3!} + \ldots \qquad -\infty < x < \infty$$

<u>Задача 8.16.</u> Составить для функции $f(x) = \dfrac{1}{5 - x}$ ряд Тейлора, расположенного по степеням $(x - 2)$.

Здесь

$$f(2) = \frac{1}{3}; \qquad f'(2) = \left. \frac{1}{(5 - x)^2} \right|_{x = 2} = \frac{1}{3^2} \; ;$$

$$f''(2) = \left. \frac{1 \cdot 2}{(5 - x)^3} \right|_{x = 2} = \frac{1 \cdot 2}{3^3} \; ; \qquad f^{(n)}(2) = \left. \frac{n!}{(5 - x)^{n+1}} \right|_{x = 2} = \frac{n!}{3^{n+1}} \; .$$

Искомый ряд будет иметь вид

$$\frac{1}{5 - x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}(x - 2) + \frac{1}{3^3}(x - 2)^2 + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}}(x - 2)^n + \ldots$$

Приложения степенных рядов

Степенные ряды находят применение в различных вопросах как приближенных вычислений, так и в приближенных методах анализа. С помощью степенных рядов составляют таблицы значений функций, решают дифференциальные уравнения, вычисляют приближенные значения определенных интегралов, определяют предел функции и т.д.

Рассмотрим некоторые примеры.

Задача 8.17. Пусть необходимо найти следующий предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}.$$

Здесь имеет место неопределенность $\frac{0}{0}$. Заменим e^x и $\sin x$ их разложением в степенные ряды:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}+\ldots}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}}=2.$$

Задача 8.18. Необходимо вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}dx$.

Такие интегралы называются неберущимися, т. к. первообразную нельзя представить в квадратурах. В связи с отмеченным эту задачу можно решить приближенными методами с помощью формул прямоугольников, трапеций или парабол.

Здесь рассмотрим способ вычисления интегралов с помощью рядов.

Для представленной задачи разложим подынтегральную функцию в степенной ряд. Поскольку

$$e^{t} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^{2}}{2!} + \ldots + \frac{t^{n}}{n!} + \ldots$$

при любом t то, подставляя вместо t значение переменной t^2 получим

$$e^{-x} = 1 - \frac{x^{2}}{1!} + \frac{x^{4}}{2!} - \frac{x^{6}}{3!} + \ldots + (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

В таком случае, имеют

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-x^{2}} dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^{2}}{1!} + \frac{x^{4}}{2!} - \frac{x^{6}}{3!} + \frac{x^{8}}{4!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^{3}}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^{5}}{5} - \frac{x^{7}}{3!7} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{9}}{9} + \ldots \right) \Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{3}} + \frac{1}{2!5} \cdot \frac{1}{2^{5}} - \frac{1}{3!7} \cdot \frac{1}{2^{7}} + \ldots$$

Получили знакопеременный ряд, который удовлетворяет условиям сходимости Лейбница. Таким образом, ошибка от замены суммы ряда его частной суммой по абсолютной величине будет меньше абсолютной величины первого из отбрасываемого его члена. В частном случае, положив, что интеграл равен сумме первых двух слагаемых, вносят ошибку, меньшую чем

$$\frac{1}{2!5} \cdot \frac{1}{2^{5}} < 0{,}003 .$$

Отсюда следует, что ограничиваясь только двумя слагаемыми, получают приближенное значение с точностью до $0{,}01$:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-x^{2}} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{3}}, \text{ или } \int_{0}^{\frac{1}{2}} e^{-x^{2}} dx \approx 0{,}46 .$$

ЛИТЕРАТУРА ОСНОВНАЯ

1. ***Барковський В. В, Барковська Н. В.*** Математика для економістів: Вища математика. - К.: Національна академія управління, 1997.

2. ***Карасев А. И. и др.*** Курс высшей математики для экономических вузов. -М.: Высшая школа, 1982.

3. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. - М.: Физмат, 1975.

4. Курош А.Р. Курс высшей алгебры М.: Наука, 1988.

5. Пискунов И. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука. 1989.

6. Берман Н. И. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Высшая школа, 1980.

7. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М.: Наука. 1989.

8. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Математика для економістів: Теорія ймовірностей та математична статистика. - К.: Національна академія управління, 1997.

9. *Гнедепко Б. В.* Курс теории вероятностей М.: Наука. 1958.

10. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. Под ред. Свешникова А. А.-М.: Наука. 1970.

11. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1998.

12. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа. 1999.

13. *Дегтярев Ю.И.* Исследование операций (учебное пособие для студентов вузов). - М.: Высшая школа, 1979.

14. *Зайченко Ю. Н.* Исследование операций. - К.: Вища школа. 1985.

15. *Зайченко Ю. Я., Шумилова С. А.* Исследование операций (сборник задач). - К.: Виша школа, 1984.

16. ***Кузнецов А. В., Холод Н. И.*** Математическое программирование. -Минск: Вышейшая школа. 1984.
17. Вища математика. (Стислий зміст лекцій, методичні вказівки для виконання вправ, контрольні та індивідуальні завдання). Для студентів фінансово-економічного факультету очної та заочної форм навчання. // Укл.: Г.Г. Швачич, О.Г. Холод, В.І. Христян. - Дніпропетровськ: Академія управління, бізнесу і права, 1996.
18. Методичні вказівки та індивідуальні завдання для вивчення дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізаї" //Укл.: Г.Г. Швачич, О.Г. Холод. -Дніпропетровськ: Академія управління, бізнесу і права. 1995.
19.***ШвачичГ.Г.*** Лінійна алгебра в розрахунках середовища MATHCAD: Підручник: ДАУБП, 2000. – 236 с.
20. ***Швачич Г.Г.*** MATHCAD в інженерних та економічних розрахунках: Навчальний посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ-ІПК МК, 2000. – 72 с.
21. ***Швачич Г.Г.*** Сучасні інформаційні технології в математиці для економістів: Підручник.- К.: Центр навчальної літератури, 2003.- 368 с.

ЛИТЕРАТУРА ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. ***Дубовик В. Я., Юрик І. І.*** Вища математика. - Київ: Вища школа, 1993.
2. ***Данко Н. Е.*** и др. Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высшая школа. 1974.
3. ***Каплан И. А.*** Практические занятия по высшей математике. - Харьков.: Изд. ХГУ, 1970.
4. ***Вентцель Е. С.*** Исследование операций. - М.: Наука. 1980.
5. ***Мину М.*** Математическое программирование. - М.: Наука, 1990,

ЛИТЕРАТУРА СПРАВОЧНАЯ

1. ***Корн Г., Корн Т.*** Справочник по математике. - М.: Наука, 1980.
2. ***Прудников А. П.*** и др. Интегралы и ряды. - т. 1-3 -М.: Наука, 1986.
3. ***Камке Э.*** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971.
4. ***Градштейн И.С., Рыжик И. М.*** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- М.: Наука. 1971.

Учебное издание

Швачич Геннадий Григорьевич
Дук Александр Николаевич
Холод Елена Григорьевна
Шмукин Александр Александрович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Тем. план 2005, поз. 156

Подписано к печати 14.01.05. Формат 60×84 **1/16.** Бумага типогр. Печать плоская. Уч.-изд. л. 10,0. Усл. печ. л. 9,88. Тираж 450 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины
49600, Днепропетровськ-5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ