МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Г.М. БАРТЕНЕВ, А.Н. ДУК, Е.Г. ТКАЧЕНКО,
В.В. ТОЛСТОЙ, Н.В. ЦЕЛУЙКО

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Раздел “ Математическое программирование ”

Часть 4

Утверждено на заседании Ученого совета академии
в качестве конспекта лекций. Протокол №15 от 27.12.2010

Днепропетровск НМетАУ 2011

УДК 005.3:658.518(07)

Высшая математика. Часть 4. Раздел «Математическое программирование»: Конспект лекций / Г.М. Бартенев, А.Н. Дук, У. Г. Ткаченко и др. – Днепропетровск: НМетАУ, 2011. – 66 с.

Содержит теоретический материал по указанному разделу дисциплин «Высшая математика» и «Математика для экономистов», излагаемый в соответствии с государственными образовательными профессиональными программами.

Предназначен для студентов экономических специальностей, а также для студентов с проблемами здоровья.

Ответственный за выпуск Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенты: А.А. Ивлев, канд. техн. наук, доц. (ГВУЗ)

К.У. Чуднов, канд. техн. наук, доц. (НМетАУ)

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

4.1. Основные понятия и постановка общей задачи линейного программирования

Математическим программированием называется наука, разрабатывающая и практически внедряющая методы оптимального планирования и наиболее эффективного управления различными экономическими структурами.

Типичными задачами математического программирования являются линейное, нелинейное и динамическое программирование.

Первая постановка задачи линейного программирования в виде оптимального плана перевозок, минимизирующего суммарный пробег, относится к 1930 году. Резко возрос интерес к решению подобных задач у американцев во время второй мировой войны, в связи с широкомасштабными поставками по ленд-лизу. В итоге, в 1949 году Данцигом был опубликован основной метод решения задач линейного программирования – когда целевая функция и ограничения, накладываемые на значения переменных, линейны, - симплексный метод.

Одновременно с развитием линейного программирования рассматривались и более сложные задачи нелинейного программирования, в которых целевая функция или ограничения нелинейны. Так как задачи такого класса достаточно сложны, то в настоящее время разработаны методы решения узкого класса задач.

Как правило, экономические задачи имеют нелинейный характер и их часто аппроксимируют задачами линейного программирования только потому, что последние хорошо изучены и для них разработаны алгоритмы решения.

Целью динамического программирования является отыскание оптимального решения многоэтапных задач, т.е. задач линейного и нелинейного программирования, в которых процесс зависит от времени и необходимо учитывать его поэтапное развитие.

В дальнейшем, при изучении дисциплины, мы будем рассматривать задачи только линейного программирования.

Общей задачей линейного программирования (ОЗЛП), заданной в *произвольной* форме записи, называют задачу, в которой требуется оптимизировать (максимизировать или минимизировать) линейную функцию

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow opt, \tag{4.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;, \quad i = \overline{1,s}; \tag{4.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;, \quad i = \overline{s+1,m}; \tag{4.3}$$

$$x_j \ge 0 \quad , \quad j = \overline{1,n}, \tag{4.4}$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные.

Функция F называется *целевой функцией* или *линейной формой* ЗЛП.

Условия (4.2 – 4.4) называются *ограничениями задачи*.

В задачах линейного программирования функция (4.1) и левые части ограничений (4.2 – 4.4) являются линейными.

ЗЛП могут быть представлены в различных формах записи, среди которых чаще всего используются следующие.

ЗЛП, заданной в *симметричной* форме записи, называют задачу, в которой требуется найти максимум функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max; \tag{4.5}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;, \quad i = \overline{1,m} \quad ; \tag{4.6}$$

$$x_j \ge 0 \quad , \quad j = \overline{1,n}. \tag{4.7}$$

ЗЛП, заданной в *канонической* (*основной*) форме записи, называют задачу, в которой требуется найти оптимальное значение функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to opt; \tag{4.8}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;, \quad i = \overline{1,m} \quad ; \tag{4.9}$$

$$x_j \ge 0 \quad , \quad j = \overline{1,n}. \tag{4.10}$$

Если ищут минимум функции (4.8), то ЗЛП задана в *первой канонической* форме.

Если ищут максимум функции (4.8), то говорят, что ЗЛП задана во *второй канонической* форме

Набор чисел $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям ЗЛП (4.2), (4.3), (4.6), (4.9), называются ее *планом*.

Так как не каждая система ограничений имеет решение, то не каждая ЗЛП имеет план.

Всякое неотрицательное решение ЗЛП называется *допустимым*.

Допустимый план $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, доставляющий линейной форме (4.1), (4.5), (4.8) экстремум, называется *оптимальным*.

ЗЛП может иметь и не один оптимальный план.

Указанные формы записи ЗЛП являются эквивалентными, т.е. любая из них с помощью несложных преобразований может быть приведена к другой форме. При выполнении этих преобразований необходимо уметь решать такие задачи.

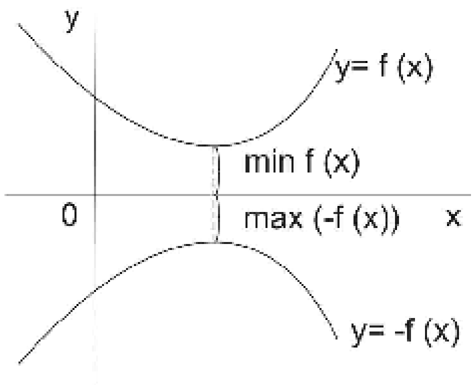
1. Минимизацию целевой функции F сводить к максимизации, и наоборот.

2. Переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам, и наоборот.

Первая задача легко решается, если учесть, что

$$\min f(x) = -\max(-f(x)).$$

Этому равенству на плоскости можно дать вполне очевидную геометрическую интерпретацию.



Таким образом, задача минимизации функции $f(x)$ сводится к максимизации противоположной функции $-f(x)$. У найденного максимального значения функции $-f(x)$ нужно поменять знак на противоположный – это и будет минимальное значение функции $f(x)$.

Решение второй задачи основывается на таком соображении.

Если в исходной ЗЛП ограничения-неравенства имеют вид "$\le$", то их легко свести к ограничениям-равенствам добавлением к левой части дополнительной (балансовой) неотрицательной переменной.

Если ограничения-неравенства имеют вид $"\geq"$, то они преобразуются к ограничениям-равенствам вычитанием из левой части дополнительной неотрицательной переменной.

Переход от ограничений-равенств к ограничениям-неравенствам осуществляется выделением некоторого базиса неотрицательных переменных с последующим его отбрасыванием.

Если на переменную x_i не наложено условие неотрицательности, то ее заменяют парой неотрицательных переменных, приняв

$$x_i = x_i' - x_i'' \text{, где } x_i' \geq 0,\ x_i'' \geq 0 .$$

<u>Пример 4.1.1.</u> Привести к первой канонической форме ЗЛП:

$$F = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow max \ ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \ ; \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \ ; \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \ ; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 ; \quad x_2 \geq 0 .$$

<u>Решение</u>

В первой канонической форме ищется минимум целевой функции при ограничениях-равенствах. Поэтому необходимо преобразовать ограничения-неравенства введением балансовых переменных, взятых с соответствующим знаком. Наконец, заменим переменную x_3, на которую не наложено неотрицательности парой неотрицательных переменных x_3' и x_3'' , а именно $x_3 = x_3' - x_3''$.

В результате получим:

$$F_1 = -F = -x_1 - 2x_2 - x_3' + x_3'' \rightarrow min \ ;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' = 1 \ ; \\ x_1 + x_2 - x_3' + x_3'' + x_4 = 1 \ ; \\ x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' - x_5 = 2 \ ; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 ;\ x_2 \geq 0 ;\ x_3' \geq 0 ;\ x_3'' \geq 0 ;\ x_4 \geq 0 ;\ x_5 \geq 0 .$$

<u>Пример 4.1.2.</u> Привести ЗЛП к симметричной форме:

$$F = 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \to max\ ;$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5\ ; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10\ ; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0\ ; \quad j = \overline{1,4}\ .$$

<u>Решение</u>

Исключим из ограничений-равенств сначала x_1, а затем x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5\ ; & \left|\times(-2)\right) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10\ . \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0\ ; \\ 5x_1 + 7x_3 - x_4 = 25\ . \end{cases} \tag{4.11}$$

Отсюда
$$\begin{cases} x_1 = 5 - \dfrac{7}{5}x_3 + \dfrac{1}{5}x_4\ ; \\ x_2 = -\dfrac{1}{5}x_3 + \dfrac{3}{5}x_4 . \end{cases}$$

Подставляем эти значения в целевую функцию для исключения x_1 и x_2:

$$F = 10 - 4x_3 + 4x_4 \to max\ .$$

Учитывая неотрицательность x_1 и x_2, систему (4.11) можно представить в виде:

$$\begin{cases} x_3 - 3x_4 \leq 0\ ; \\ 7x_3 - x_4 \leq 25\ . \end{cases}$$

Тогда ЗЛП в симметричной форме будет выглядеть так:

$$F = 10 - 4x_3 + 4x_4 \to max\ ;$$
$$\begin{cases} x_3 - 3x_4 \leq 0\ ; \\ 7x_3 - x_4 \leq 25\ ; \end{cases}$$
$$x_3 \geq 0\ ; \quad x_4 \geq 0\ .$$

Решим теперь эту задачу с помощью модифицированных жордановых исключений.

Составим таблицу МЖИ, а затем в ограничениях-равенствах выделим некоторый базис, опустив который получим эквивалентную систему ограничений-неравенств.

У нас
$$\begin{cases} 0 = 5 - (x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4)\ ; \\ 0 = 10 - (2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4)\ . \end{cases}$$

Тогда

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
0 =	5	1	-2	1	1
0 =	10	2	1	3	-1
F =	0	-2	-1	1	-3

↓

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
x_1 =	5	-2	1	1
0 =	0	5	1	-3
F =	10	-5	3	-1

↓

	1	$-x_3$	$-x_4$
x_1 =	5	7/5	-1/5
x_2 =	0	1/5	-3/5
F =	10	4	-4

Последней таблице соответствует следующая ЗЛП:

$$F = 10 - 4x_3 + 4x_4 \to max \ ;$$
$$\begin{cases} x_1 = 5 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4; \\ x_2 = -\frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ ; \quad j = \overline{1,4} \ .$$

Для того, чтобы иметь дело с целочисленными коэффициентами, домножим ограничения-равенства на 5 и перенесем все члены с x_j в левую сторону. Тогда получим

$$F = 10 - 4x_3 + 4x_4 \to max \ ;$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_3 - x_4 = 25; \\ 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ ; \quad j = \overline{1,4}.$$

Учитывая, что $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, опускаем их в ограничениях-равенствах, что приводит к ограничениям-неравенствам, т.е. симметричной форме записи ЗЛП:

$$F = 10 - 4x_3 + 4x_4 \to max;$$
$$\begin{cases} 7x_3 - x_4 \leq 25; \\ x_3 - 3x_4 \leq 0; \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ ; \quad j = \overline{3,4}.$$

4.2. Графический способ решения ЗЛП

Графический способ решения ЗЛП применяют, как правило, в том случае, когда задача записана в симметричной форме и содержит две переменные. Впрочем, способ работает и в задачах со многими переменными, если в их канонической форме содержится не более двух свободных переменных, т.е. $n-r\le 2$, где n – число переменных, r – ранг матрицы системы ограничений равенств.

Геометрическая интерпретация ЗЛП позволяет наглядно продемонстрировать совокупность аналитических методов решения этих задач.

Графическое решение базируется на следующих теоремах.

Теорема 1. Если оптимальное решение ЗЛП существует, то оно достигается в вершине многоугольника решений, определяемого ОДР.

Если оптимальное решение достигается в более чем одной вершине, то оно достигается в любой точке их выпуклой линейной комбинации.

Теорема 2. Для существования оптимального решения необходимо и достаточно чтобы многоугольник решений содержал хотя бы одну точку, линейная форма F на нем была бы ограничена снизу при решении задачи минимизации или сверху при решении задачи максимизации.

Для двух переменных ЗЛП формулируется следующим образом.

Найти оптимальное решение линейной формы:

$$F=c_1x_1+c_2x_2 \to opt. \qquad (4.12)$$

При ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \qquad (4.13)$$

и условиях неотрицательности переменных

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \qquad (4.14)$$

Областью допустимых решений задачи (4.12-4.14) могут быть:

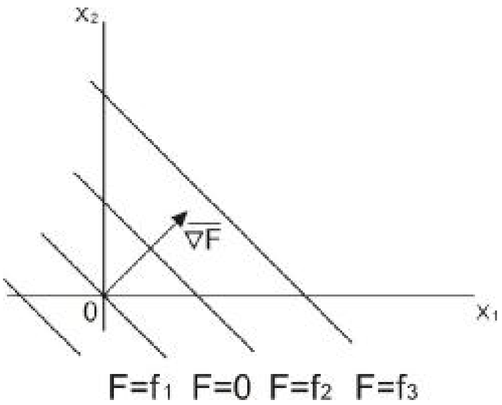
а) выпуклый многоугольник;

б) выпуклая неограниченная область;

в) единственная точка;

г) пустая область.

Уравнение (4.12) на плоскости $\boldsymbol{Ox_1x_2}$ определяет семейство параллельных прямых, называемых линиями уровня, каждой из которых соответствует определенное значение параметра F.



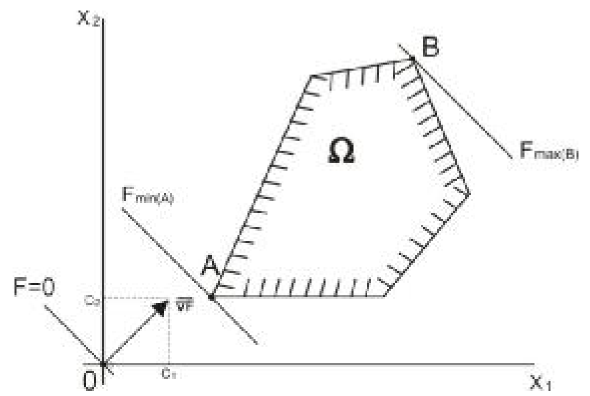
Градиент линейной формы F указывает направление наискорейшего возрастания функции, проходит перпендикулярно линиям уровня и имеет координаты $\nabla \boldsymbol{F}\{\boldsymbol{c_1}; \boldsymbol{c_2}\}$.

Тогда противоположный вектор - $\overline{\nabla \boldsymbol{F}}$ (антиградиент) указывает направление наискорейшего убывания функции F .

При перемещении линии уровня в направлении градиента $\overline{\nabla \boldsymbol{F}}$ мы будем иметь минимум линейной формы F в точке касания линии уровня и ОДР задачи. Продолжая движение в том же направлении, мы получим максимум линейной формы в точке, в которой линия уровня будет покидать ОДР ЗЛП.

Обобщая все выше сказанное, сформулируем алгоритм решения ЗЛП графическим методом.

1. В плоскости $\boldsymbol{Ox_1x_2}$ построить ОДР ЗЛП



2. В плоскости $\boldsymbol{Ox_1x_2}$ изобразить вектор-градиент линейной формы $\overline{\text{Ñ}\boldsymbol{F}}$.

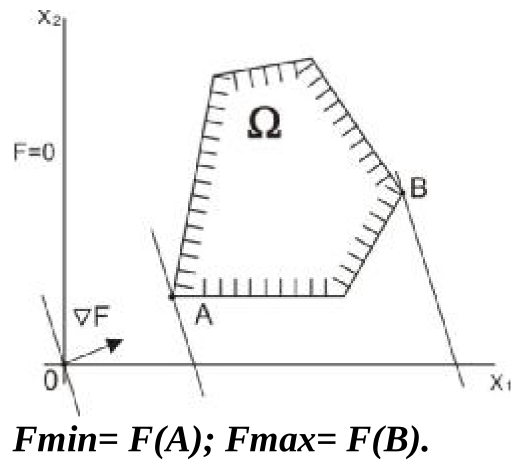
3. В плоскости $\boldsymbol{Ox_1x_2}$ построить линию нулевого уровня параллельно самой себе F=0, которая проходит через начало координат перпендикулярно градиенту $\overline{\text{Ñ}\boldsymbol{F}}$.

4. Перемещать линию нулевого уровня параллельно самой себе в направлении градиента $\overline{\text{Ñ}\boldsymbol{F}}$ до касания с границей ОДР ЗЛП. Линейная форма F принимает минимальное значение в точке касания (A).

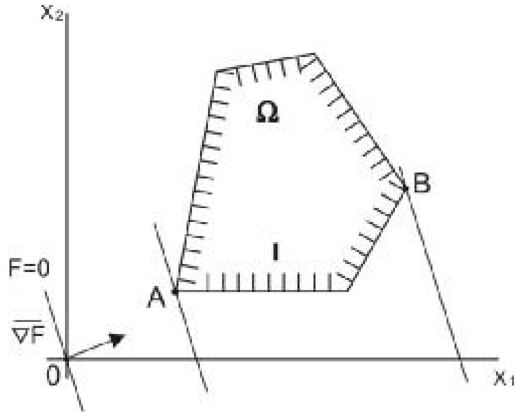
5. Перемещать линию уровня вглубь ОДР до тех пор, пока она не покинет указанную область. Линия уровня принимает максимальное значение в крайней точке ОДР (B).

6. Для нахождения решения ЗЛП необходимо вычислить координаты точек A и B, решив системы, составленные из соответствующих ограничений-равенств, а затем подставить найденные координаты в равенство(4.1).

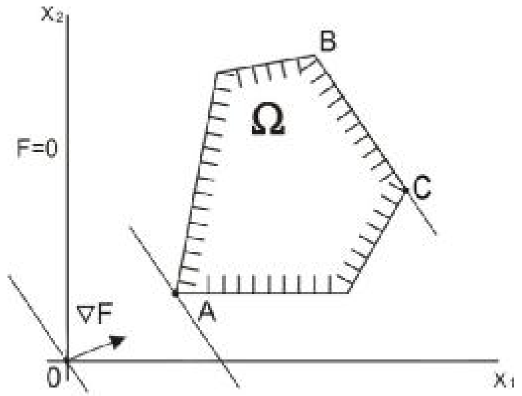
В зависимости от характера ОДР и взаимного расположения её и градиента $\overline{\nabla F}$, возможны следующие случаи:



Fmin= F(A); Fmax= F(B).



Fmin= F(B); Fmax= F(A).



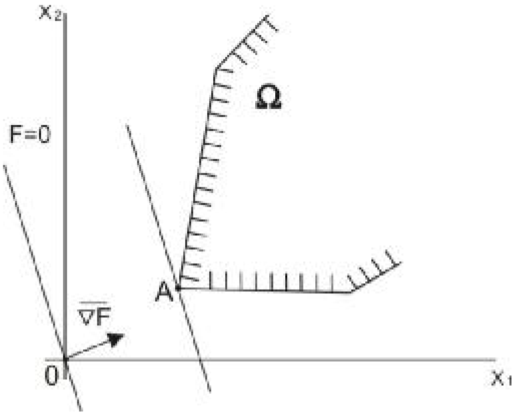
Fmin= F(A).

Максимум линейной формы достигается в любой точке отрезка ВС, параллельного линии нулевого уровня F=0, отрезок ВС представляется выпуклой линейной комбинацией вершин В и С.

$$\boldsymbol{BC} = \lambda \boldsymbol{B} + (\mathbf{1} - \lambda)\boldsymbol{C} \qquad \mathbf{0} \le \lambda \le \mathbf{1}.$$

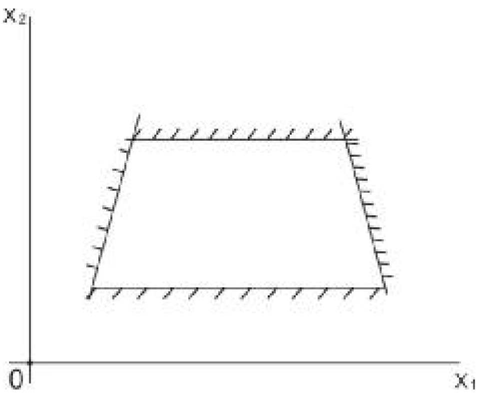
Это соотношение в координатной форме выглядит так:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1^b \\ x_2^b \end{bmatrix} + (1 - \lambda)\begin{bmatrix} x_1^c \\ x_2^c \end{bmatrix} \tag{4.15}$$



В этом случае ОДР представляет собой выпуклую неограниченную сверху область. Следовательно, максимального значения линейная форма F не имеет

Fmin= F(A)



ОДР задачи представляет собой пустую область (ограничения ЗЛП несовместны), а потому задача не будет иметь решений.

Пример. Найти оптимальное решение ЗЛП

$$F = x_1 + 2x_2 \to opt;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le 1 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0.$$

Решение

Решение задачи будем искать в соответствии с описанным алгоритмом.

1. Для построения ОДР задачи ограничения, неравенства заменим ограничениями - равенствами, построим в плоскости Ox_1x_2 прямые,

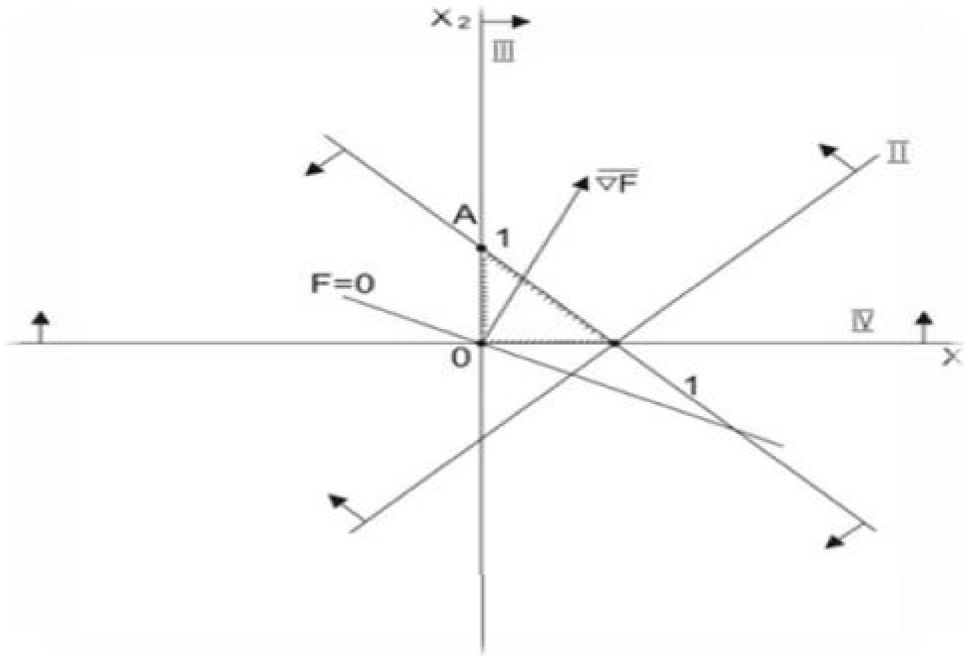
соответствующие этим равенствам и стрелками отметим полуплоскости, соответствующие неравенствам. Пересечение всех полуплоскостей, соответствующих неравенствам образует ОДР исходной задачи.

$x_1 + x_2 = 1$ (I)

$x_1 - x_2 = 1$ (II)

$x_1 = 0$ (III)

$x_2 = 0$ (IV)



2. Строим вектор-градиент $\overline{\nabla F} = \{1,\ 2\}$. Допускается строить не сам градиент, а вектор, ему пропорциональный.

3. Проведем линию нулевого уровня ***F=0*** через начало координат, перпендикулярно $\overline{\nabla F}$.

4. Очевидно, что линейная форма F имеет минимальное значение в точке O, максимальное - в точке A.

5. Начало координат - точка O (0;0).

Координаты точки A определяем из решения системы, составленной из уравнений прямых I и III, пересекающихся в этой точке:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}; \; A(0;1).$$

Тогда оптимальные значения линейной формы F будут равны:

F=F(0) = 0+2·0=0;

F=F(A)=0+2·1=2.

4.3. Опорные планы ЗЛП

Рассмотрим ЗЛП, заданную канонической формой записи:

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \rightarrow opt \tag{4.16}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.17}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n} \tag{4.18}$$

Ставить задачу нахождения оптимального плана ЗЛП (4.16-4.18) можно только в том случае, когда система ограничений (4.17) имеет решение, т.е. совместна, и причем не единственное, т.е. неопределенна. Этот случай имеет место, если ранг r системы ограничений (4.17) меньше числа неизвестных n, т.е. $r < n$. При этом будем иметь r базисных и n-r свободных переменных.

Заметим, что случай $r > n$ вообще невозможен, а при $r = n$ имеем единственное решение и, следовательно, говорить об отыскании оптимального плана не приходится.

Определение 1. Базисным решениям (базисным планом) ЗЛП называется частное решение, полученное из общего решения системы (4.17) при нулевых значениях свободных переменных.

Определение 2. Опорным решением (опорным планом) ЗЛП называют такое базисное решение, в котором все базисные переменные неотрицательны.

В соответствии с этим определением опорное решение не может содержать более чем r положительных переменных.

Как известно, множество допустимых планов ЗЛП можно трактовать как геометрическое место точек выпуклого многогранного тела. Тогда опорные планы представляют собой вершины этого многогранника.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Каждому опорному плану ЗЛП соответствует вершина многогранника планов и наоборот, каждой вершине многогранника планов соответствует опорный план задачи (4.16-4.18).

Таким образом, оптимальное решение следует искать среди ее опорных планов.

4.4. Симплексный метод решения ЗЛП

Рассмотренный ранее графический способ решения ЗЛП применим к узкому классу задач, содержащих не более двух переменных. Поэтому для решения более сложных задач применяют другие методы. Один из таких универсальных методов является симплексный (симплекс-метод) называющийся так же методом последовательного улучшения плана.

Пусть ЗЛП записана в канонической форме.

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \rightarrow opt; \qquad (4.19)$$

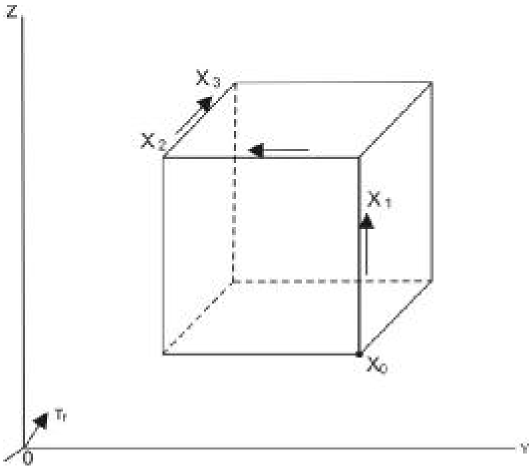
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}; \qquad (4.20)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}. \qquad (4.21)$$

Предположим, что система ограничений (4.20) совместна, её ранг равен r , причем, r < n, где n – число неизвестных. Тогда в системе (4.20) будет r базисных неизвестных и n - r свободных. Симплекс-метод, в основе которого лежит аппарат МЖИ, позволяет получить оптимальное решение задачи (4.19-4.21).

Идея этого метода заключается в последовательном переборе опорных планов ЗЛП таким образом, чтобы каждый последующий план был более оптимальным, чем предыдущий. Перебор продолжается до тех пор, пока либо будет найден оптимальный опорный план, либо установлена неразрешимость задачи.

Таким образом, с геометрической точки зрения перебор опорных планов можно рассматривать как последовательный переход по ребрам из одной вершины многогранника решений в другой по направлению к вершине, в которой линейная форма (4.19) имеет оптимальное значение.



Решение ЗЛП симплекс-методом складывается из двух этапов.

На первом находят какой -либо начальный опорный план X_0 .

На втором этапе по специальным правилам переходят от одного плана до X_0 к другому опорному плану X_1, более близкому и оптимальному. Второй этап повторяют до тех пор, пока задача не будет решена, т.е. найден оптимальный план.

4.4.1. Нахождение начального опорного плана

Пусть в ЗЛП (4.19-4.21) система ограничений (4.20) совместна и её ранг равен r, а это означает, что в этой системе r базисных переменных и n-r свободных.

Найти начальный опорный план – это значит выразить базисные переменные и целевую функцию через свободные переменные.

Для нахождения начального опорного плана можно использовать следующий алгоритм.

1. Записать задачу в форме жордановой таблицы с неотрицательными элементами столбца свободных членов. Уравнения системы (4.20), в которых свободные члены отрицательны, предварительно умножаются на (-1). Получившаяся таблица называется симплексной .
2. Преобразовать симплексную таблицу с помощью МЖИ. В качестве разрешающего столбца при этом можно выбрать любой столбец, содержащий

хотя бы один положительный элемент. Строка целевой функции при выборе разрешающего столбца не учитывается. В качестве разрешающей строки выбирается строка с минимальным отношением свободных членов к соответствующим положительным элементам разрешающего столбца (симплексное отношение) $min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}}\right\}$.

Из таблицы вычеркиваются столбцы под переброшенными наверх таблицы нулями. Аналогично вычеркиваются строки, состоящие из одних нулей.
Если в процессе исключений появляется О – строка, все элементы которой равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то система (4.20) не имеет решений.
Если же в процессе исключений появляется 0-строка, в которой все элементы отрицательны, а свободный член положителен, то система (4.20) не имеет неотрицательных решений.

3. Элементы опорного плана выписываются из получившейся таблицы. При этом свободные переменные полагаются равными нулю, а базисные берут из столбца свободных членов. Из этого же столбца берётся значение целевой функции, соответствующее опорному плану.

Пример 4.4.1.1. Найти начальный опорный план ЗЛП:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min; \tag{4.22}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5 \end{cases}; \tag{4.23}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}. \tag{4.24}$$

Решение

В данной задаче легко найти начальный опорный план алгебраическим методом. Действительно, в систему ограничений (4.23) переменные X_1,X_2 и X_3 входят по разу в каждое уравнение и целевая функция (4.22) также выражается через эти переменные. Поэтому будем считать переменные X_1,X_2 и X_3 базисными, а X_4, X_5, X_6- свободными. Разрешим систему (4.23) относительно базисных переменных и подставим полученное значение в равенство (4.22). В результате получаем опорный план.

$$\boldsymbol{F = 13 - 3x_4 + 8x_5 - 5x_6 \to \min;}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 + x_4 + 2x_6 \\ x_2 = 3 - 2x_4 + 3x_5 - x_6 \\ x_3 = 5 - 2x_4 + 5x_5 - 6x_6 \end{cases} \quad \text{или } x_0 = (5;3;5;0;0;0),\ F_0 = 13;$$

$$x_j \geq 0;\quad j = \overline{1,6}.$$

Теперь решим эту задачу, используя аппарат МЖИ. Исходную ЗЛП представим в виде:

$$\boldsymbol{F = 0 - (-x_1 - x_2 - x_3) \to \min;}$$

$$\begin{cases} 0 = 5 - (x_1 - x_2 - 2x_6) \\ 0 = 3 - (x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6) \\ 0 = 5 - (x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6) \end{cases};$$

$$x_j \geq 0;\quad j = \overline{1,6}.$$

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$
0=	5	1	0	0	-1	0	-2
0=	3	0	1	0	2	-3	1
0=	5	0	0	1	2	-5	6
F=	0	-1	-1	-1	0	0	0

→

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$
x_1=	5	0	0	-1	0	-2
0=	3	1	0	2	-3	1
0=	5	0	1	2	-5	6
F=	5	-1	-1	-1	0	-2

	1	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$
x_1=	5	0	-1	0	-2
x_2=	3	0	2	-3	1
0=	5	1	2	-5	6
F=	8	-1	1	-3	-1

	1	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$
x_1=	5	-1	0	-2
x_2=	3	2	-3	1
x_3=	5	2	-5	6
F=	13	3	-8	5

Итак, получим начальный опорный план

$$\boldsymbol{F = 13 - 3x_4 + 8x_5 - 5x_6 \to \min;}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 5 + x_4 + 2x_6} \\ \boldsymbol{x_2 = 3 - 2x_4 + 3x_5 - x_6} \\ \boldsymbol{x_3 = 5 - 2x_4 + 5x_5 - 6x_6} \end{cases};$$

$$\boldsymbol{x_j \geq 0;\quad j = \overline{1,6};}$$

или $\boldsymbol{X_0=(5;3;5;0;0;0),\ F_0=13.}$

Он полностью соответствует найденному ранее с помощью алгебраических преобразований опорному плану.

$$\boldsymbol{F = 0 - (2x_1 + x_2) \to opt;}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 = 4 - (5x_1 - 2x_2 + x_3)} \\ \boldsymbol{0 = 4 - (x_1 + 2x_2 + x_4)} \\ \boldsymbol{0 = 4 - (x_1 + x_2 + x_5)} \end{cases};$$

$$\boldsymbol{x_j \geq 0;\quad j = \overline{1,5}}.$$

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
0=	4	5	-2	1	0	0
0=	4	-1	2	0	1	0
0=	4	1	1	0	0	1
F=	0	-2	1	0	0	0

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$
x_3=	4	5	-2	0	0
0=	4	-1	2	1	0
0=	4	1	1	0	1
F=	0	-2	1	0	0

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_5$
x_3=	4	5	-2	0
x_4=	4	-1	2	0
0=	4	1	1	1
F=	0	-2	1	0

	1	$-x_1$	$-x_2$
x_3=	4		-2
x_4=	4	-1	2
0=	4	1	1
F=	0	-2	1

Базисные переменные и целевая функция выражаются через свободные переменные так:

$$\boldsymbol{F = 0 + 2x_1 - x_2 \to opt};$$

$$\begin{cases} x_3 = 4 - 5x_1 + 2x_2 \\ x_4 = 4 + x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 4 - x_1 - x_2 \end{cases};$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1, 5}.$$

Тогда начальный опорный план имеет вид:

$$F_0=0 \text{ при } x_0=(0;0;4;4;4).$$

<u>Пример 4.4.1.2.</u> Найти начальный опорный план ЗЛП

$$F = 2x_1 - x_2 \to opt; \tag{4.24}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}; \tag{4.25}$$

$$x_1 \ge 0; \; x_2 \ge 0. \tag{4.26}$$

Решение

Приведем задачу (4.24-4.26) к канонической форме с помощью неотрицательных балансовых переменных:

$$F = 2x_1 - x_2 \to opt; \tag{4.27}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 4 \end{cases}; \tag{4.28}$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1, 5}. \tag{4.29}$$

Решение

Разрешив задачу (4.4.1.7-4.4.1.9) относительно балансовых переменных, получим начальный опорный план ЗЛП:

$$F = 2x_1 - x_2 \to opt; \tag{4.30}$$

$$\begin{cases} x_3 = 4 - 5x_1 + 2x_2 \\ x_4 = 4 + x_1 - 2x_2 \\ x_5 = 4 - x_1 - x_2 \end{cases}; \qquad (4.31)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,5}. \qquad (4.32)$$

или $x_0=(0;0;4;4;4)$, $F_0=0$.

4.4.2. Нахождение оптимального опорного плана

Полученный на предыдущем этапе начальный опорный план исследуем на оптимальность.

Так как условие оптимальности целевой функции может быть двух видов – минимум или максимум и критерии выбора значений переменных x_j будут различными. Поэтому рассмотрим отдельно объяснение решения ЗЛП при оптимуме типа минимум и типа максимум.

Наконец, чтобы лучше понять суть симплексного метода, нахождение оптимального решения рассмотрим на примере конкретной задачи, а затем обобщим результаты исследования.

В качестве конкретной задачи используем пример из предыдущего раздела.

4.4.2.1. Определение оптимума типа минимум

Найденный ранее начальный опорный план имеет три базисные переменные – x_3, x_4, и x_5, - и две свободные – x_1 и x_2:

$$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min; \qquad (4.33)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}; \qquad (4.34)$$

$$x_1 \geq 0; \; x_2 \geq 0. \qquad (4.35)$$

Придавая свободным переменным нулевые значения, получим:

$$x_0=(0;0;4;4;4),$$

$$F_0=0$$

Полученное решение не является оптимальным. Действительно, изменение значения целевой функции (4.33) возможно при увеличении значений свободных переменных x_1 и x_2. Так как переменная x_2 входит в (4.33) со знаком минус, то увеличение её значения приведет к уменьшению значения целевой функции, т.е. к более оптимальному решению. Однако увеличение значения переменной x_2 не может быть беспредельным, т.к. она входит со знаком минус и в выражения, определяющие значения базисных переменных x_4 и x_5,а, следовательно, к их уменьшению. В соответствии с условиями этот процесс можно продолжать лишь до тех пор, пока одна из базисных переменных не обратится в нуль.

Первой же в нуль обращается та базисная переменная, у которой отношение свободного члена к модулю отрицательного коэффициента при свободной переменной x_2 минимально.

В рассмотренной задаче,

$$\min\left\{\frac{4}{-2};\frac{4}{-1}\right\}=2\,.$$

А это означает, что первой обратится в нуль базисная переменная x_4 при

значении свободной переменной $x_2=2$.

В результате мы получим новое опорное решение, которое в свою очередь необходимо исследовать на оптимальность.

Итак,

$$x_1=(0;2;6;0;2);$$

$$F_1=-2.$$

Таким образом, мы вывели из состава базисных переменных x_4, переведя её в состав свободных, и, наоборот, ввели в базис ранее свободную переменную x_2, т.е. поменяли ролями переменные x_4 и x_2.

Как известно, эта задача решается с помощью одного шага модифицированных жордановых исключений.

	1	$-x_1$	$-x_2$
x_3	4	5	-2
x_4	4	-1	2
x_5	4	1	1
F=	0	-2	1

$\rightarrow$

$$\min\left\{\frac{4}{2};\frac{4}{1}\right\}=2$$

	1	$-x_1$	$-x_4$
x_3	16	8	2
x_4	4	-1	1
x_5	4	3	-1
F=	-4	-3	-1

	1	$-x_1$	$-x_4$
x_3	8	4	1
x_2	2	-1/2	½
x_5	2	3/2	-1/2
F=	-2	-3/2	-1/2

В соответствии с получившейся симплексной таблицей, выражение для целевой функции (4.33) будет иметь вид:

$$\boldsymbol{F = -2 + \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 \rightarrow \min}.$$

Очевидно, что увеличение значения свободных переменных x_1 и x_4 приведет к увеличению значения целевой функции, т.е. её менее оптимальному значению.

Следовательно, полученный в последней симплексной таблице опорный план будет оптимальным.

$$\boldsymbol{X^*=(0;2;8;0;2;)}$$

$$\boldsymbol{F^*_{min}=-2.}$$

Сформулируем условия оптимальности опорного плана, записанного в симплексной таблице, с учетом того, что свободные переменные в эту таблицу входят со знаком минус.

1. Если в F-строке нет положительных элементов, не считая свободного члена, то план является оптимальным. Оптимальный план будет единственным, если в F-строке нет нулевых элементов. Если в этой строке есть хотя бы один нулевой элемент, то оптимальных планов будет бесчисленное количество в соответствии с бесчисленным множеством значений свободной переменной при этом нулевом элементе.

2. Если в F-строке есть хотя бы один положительный элемент, а в соответствующем ему столбце нет положительных, то целевая функция неограниченна в области допустимых решений, т.е. $F \to -\infty$. Следовательно, задача не имеет решения.

3. Если в F-строке есть хотя бы один положительный элемент, а в каждом столбце с таким элементом есть хотя бы один положительный, то можно прийти к новому опорному плану, более близкому к оптимальному.

Для этого в качестве разрешающего столбца берут столбец с минимальным положительным элементом в F-строке. В качестве разрешающих элементов можно использовать только положительные элементы. Тогда разрешающая строка для этих элементов выбирается по минимальному симплексному отношению. Затем делают шаг МЖИ.

Полученный опорный план вновь исследуется на оптимальность.

Перебор опорных планов продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение или не будет установлена неразрешимость задачи.

4.4.2.2. Определение оптимума типа максимум

Пусть у нас имеется начальный опорный план

$$F=2x_1-x_2 \to max; \tag{4.36}$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4; \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases} \tag{4.37}$$

$$x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0, \tag{4.38}$$

или

$$x_0 = (0;0;4;4;4), \ F_0 = 0 .$$

Так как свободная переменная x_1 входит в (4.36) со знаком плюс, то при ее увеличении будет возрастать и значение целевой функции. А это означает, что найденный опорный план не является оптимальным.

Увеличение значения x_1 ограничено условием неотрицательности базисных переменных x_3 и x_5, в определение которых x_1 входит со знаком минус. Максимальное значение x_1 находится из условия равенства нулю одной из этих базисных переменных.

Первой обратится в нуль базисная переменная x_3, для которой отношение свободного члена к модулю отрицательного коэффициента при свободной x_1 минимально:

$$\min\left\{\frac{4}{-5};\frac{4}{-1}\right\}=\frac{4}{-5}=\frac{4}{5}.$$

Вычисляем параметры нового опорного плана при $x_1=\frac{4}{5}$ и $x_3=0$.

$$x_1=\left(\frac{4}{5};0;0;\frac{24}{5};\frac{16}{5}\right),\quad F_1=\frac{8}{5}.$$

Используем аппарат МЖИ для получения этого опорного плана и его дальнейшего анализа.

	1	$-x_1$	$-x_2$
x_3	4	5	-2
x_4	4	-1	2
x_5	4	1	1
F=	0	-2	1

$\rightarrow$

$\min\{\frac{4}{5};\frac{4}{1}\}=\frac{4}{5}$

	1	$-x_3$	$-x_2$
x_1	4	1	-2
x_4	24	1	8
x_5	16	-1	7
F=	8	2	1

	1	$-x_3$	$-x_2$
x_1	4/5	1/5	-2/5
x_4	24/5	1/5	8/5
x_5	16/5	-1/5	7/5
F=	8/5	2/5	1/5

В данном плане целевая функция выражается так:

$$F=\frac{8}{5}-\frac{2}{5}x_3-\frac{1}{5}x_2.$$

При увеличении значений свободных переменных x_2 и x_3 значения целевой функции будет уменьшаться. Значит, мы нашли оптимальный план:

$$x^*=\left(\frac{4}{5};0;0;\frac{24}{5};\frac{16}{5}\right),\quad F^*_{max}=\frac{8}{5}.$$

Итак, исследование опорного плана на оптимум типа максимум симплекс - методом производится следующим образом.

1. Если в F-строке нет отрицательных элементов за исключением свободного члена, то опорный план является оптимальным. Оптимальное решение является единственным при отсутствии в F-строке нулевых элементов и таких решений множество при наличии хотя бы одного нулевого элемента.

2. Если в F-строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в соответствующем ему столбце нет положительных элементов, то целевая функция неограниченна на множестве допустимых решений (F→∞), и задача не имеет решения.

3. Если в F-строке есть хотя бы один отрицательный элемент, а в каждом столбце с таким элементом есть хотя бы один положительный, то опорный план можно оптимизировать.

При этом в качестве разрешающего столбца берут столбец с максимальным по модулю отрицательным элементом в строке целевой функции. Разрешающие элементы могут быть только положительными. В качестве разрешающей строки при этом берут строки с минимальным симплексным отношением. После выбора разрешающего элемента делают один шаг МЖИ.

Новый опорный план исследуется на оптимальность.

Перебор опорных планов продолжается до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение или не будет установлена неразрешимость задачи.

<u>Пример.4.4.2.1. </u>Найти оптимальное решение ЗЛП.

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 - x_4 - 2x_6 = 5 \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 + x_6 = 3 \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5 \end{cases};$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,6} .$$

Решение

При поиске оптимального плана мы будем отталкиваться от опорного решения, найденного для этой задачи в примере 4.4.1.1 предыдущего раздела.

Анализ полученного начального опорного плана говорит о том, что он не является оптимальным. Действительно, в строке целевой функции, не считая свободного члена, есть два положительных элемента, а в соответствующих им столбцах есть положительные элементы.

В качестве разрешающего столбца берем столбец с минимальным положительным элементом в F-строке. В качестве разрешающей строки выбираем строку с минимальным симплексным отношением для положительного разрешающего элемента. Шаг МЖИ приходится повторить дважды для получения оптимального решения.

	1	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$
x_1=	5	-1	0	-2
x_2=	3	2	-3	1
x_3=	5	2	-5	6
F=	13	3	-8	5

	1	$-x_4$	$-x_5$	$-x_3$
x_1=	40/6	-2/6	-10/6	2/6
x_2=	13/6	10/6	-13/6	-1/6
x_3=	5/6	2/6	-5/6	1/6
F=	53/6	8/6	-23/6	-5/6

	1	$-x_2$	$-x_3$
x_1=	71/10		
x_4=	13/10		
x_6=	4/10		
F=	71/10	-8/10	24/10

Пример 4.4.2.2. Решить ЗЛП:

$F=x_1+2x_2+3x_3-x_4 \to opt\ (max);$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \end{cases};$$

$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,4}$.

Придавая свободным переменным x_2,x_3 и x_5 значение равное нулю, и выписывая значения базисных переменных x_1, x_4 и x_0, а также целевой функции F из столбца свободных членов, получим следующий оптимальный план:

$$X^{*}=(7,1;0;0;1,3;0;0,4).$$

При этом

$$F^{*}_{min}=7,1.$$

Заметим, что эта задача не имеет максимального решения, т.к. единственному отрицательному элементу в F-строке не соответствует ни один положительный элемент в разрешающем столбце, т.е. F=∞ и задача не ограничена в области допустимых решений.

4.5. Метод искусственного базиса

Как мы уже знаем, решение ЗЛП симплекс-методом начинается с нахождения какого-либо начального опорного плана. В самом простом случае его удается получить за счёт балансовых переменных. В более сложных случаях базис выделяется с помощью МЖИ.

Рассмотрим ещё один метод получения начального опорного плана, а именно, метод искусственного базиса.

Достоинством этого метода, кроме простого получения начального опорного плана, является то, что он позволяет определить наличие неотрицательных решений системы ограничений ЗЛП.

Рассмотрим ЗЛП, заданную, например, в первой канонической форме:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i \rightarrow min; \tag{4.39}$$

$$j = \sum_{i}^{n} a_{ij} X_j = b_i, \; i = \overline{1, m}; \tag{4.40}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1, n}.$$

Задача (4.39-4.40) называется <u>исходной задачей</u>. В соответствии с методом искусственного базиса составляется <u>расширенная задача</u>. Для этого в каждое равенство системы (4.40), при условии, что все $b_i \geq 0$, вводят по одной неотрицательной переменной $\xi_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}$, называемыми <u>искусственными переменными</u>.

Таким образом, в расширенной задаче будет n+m переменных.

При этом n основных переменных исходной задачи x_j будем считать свободными, а m искусственных переменных ξ_i образуют базис, называемый искусственным базисом.

Кроме целевой функции F исходной задачи, в расширенной задаче присутствует <u>искусственная линейная форма</u> $f=\sum_{i=1}^{m} \xi_i$, причем, линейная форма F исходной задачи достигает оптимального значения всегда при $f \to \min$.

В итоге, расширенная задача будет иметь вид:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_j x_j} \to \boldsymbol{min}; \tag{4.41}$$

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \to \boldsymbol{min}; \tag{4.42}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij} x_j} + \xi_i = \boldsymbol{b_i},\quad \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1,\ m}}; \tag{4.43}$$

$$\boldsymbol{x_j} \geq \boldsymbol{0};\quad \boldsymbol{j} = \overline{\boldsymbol{1,n}}; \tag{4.44}$$

$$\xi_i \geq \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{i} = \overline{\boldsymbol{1,m}}. \tag{4.45}$$

Расширенную задачу (4.41-4.45) приводят к расширенной форме относительно базисных переменных ξ_i:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c_j x_j} \to \boldsymbol{min}; \tag{4.46}$$

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \to \boldsymbol{min}; \tag{4.47}$$

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = \overline{1, m}; \tag{4.48}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,n}; \tag{4.49}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{4.50}$$

Получение допустимого плана исходной задачи (4.46-4.47) на основании расширенной задачи (4.46-4.50) искусственным базисом основывается на следующих теоремах.

<u>Теорема 1.</u> Для того, чтобы система ограничений (4.42) исходной задачи имела допустимые решения, необходимо и достаточно, чтобы минимум искусственной формы f был равен нулю:

$$\min f = 0.$$

Данная теорема определяет условие существования допустимого решения исходной задачи, следовательно, и опорного, получаемого из допустимого при нулевых значениях свободных переменных.

<u>Теорема 2.</u> Если минимум искусственной формы больше нуля:

$$\min f > 0,$$

то исходная задача не имеет ни одного допустимого плана.

<u>Теорема 3.</u> Если в допустимом плане расширенной задачи (4.46-4.50) хотя бы одна искусственная переменная $x_i \geq 0$, то исходная задача не имеет ни одного допустимого плана.

Решение расширенной задачи (4.46-4.50) осуществляется за два этапа (фазы). Потому метод искусственного базиса ещё называют двухфазовым симплекс-методом.

На первом этапе из базиса исключаются все искусственные переменные x_i i с помощью МЖИ по искусственной форме f. При этом столбцы, соответствующие выведенным из базиса искусственным переменным x_i, опускают. На этом этапе основная форма F ведет себя пассивно. В результате проведенных на первом этапе операций получают начальный опорный план.

На втором этапе этот опорный план оптимизируют по основной форме F.

Следует отметить, что в качестве базисных переменных можно, кроме искусственных переменных, использовать и балансовые переменные, вводимые в ограничения-неравенства вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j,\ (b_j \ge 0),$$

для преобразования их в ограничения - равенства. В этом случае будем иметь задачу с неполным искусственным базисом.

Разница между искусственными и балансовыми переменными состоит в том, что в опорном плане исходной задачи все искусственные переменные должны быть равны нулю, а балансовые переменные могут отличаться от нуля. Поэтому, по мере вывода из базиса искусственных переменных их также исключают из задачи (опускают ξ - столбцы), в то время как балансовые переменные оказывают влияние на оптимум основной линейной формы F и, следовательно, из задачи никогда не выводятся.

Пример 4.4.5.1. Решить ЗЛП методом искусственного базиса

$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to opt; \qquad (4.51)$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}; \qquad (4.52)$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}. \qquad (4.53)$$

Решение

Так как правая часть первого уравнения системы ограничений (4.52) отрицательна, умножим обе части этого равенства на -1. Затем введем в левые части данного уравнения системы (4.52) по одной неотрицательной переменной $x_i \ge 0$ и разрешим эти уравнения относительно введенных искусственных переменных, обозначив искусственную линейную форму как $f = \sum_{i=1}^{2} \xi_i$, получим на основании исходной следующую расширенную задачу:

$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow opt;$$

$$f = 4 - (2x_2 + 2x_3 + 2x_4) \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} \xi_1 = 4 - (-x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4) \\ \xi_2 = 0 - (x_1 - x_2 + x_3) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,4};$$

$$\xi_i \geq 0, \; i = \overline{1,2}.$$

В соответствии с расширенной задачей составляем симплексную таблицу. На первом этапе (фазе) искусственные переменные ξ_i выводятся из базиса и перебрасываются на верх таблицы, причем, получившиеся ξ-столбцы исключаются. На этом этапе значения элементов F-строки не учитываются, а, следовательно, преобразования таблицы не зависят от типа оптимума (минимума или максимума). В качестве разрешающего столбца берем любой столбец с положительными элементами, а разрешающую строку выбираем по минимальному симплексному отношению. В результате получим

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$
$\xi_1=$	4	-1	3	1	2
$\xi_2=$	1	1	-1	1	0
F=	0	-1	-2	-3	1
f=	4	0	2	2	2

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_4$
$\xi_1=$	4	-2	4	2
$x_3=$	1	1	-1	0
F=	0	2	-5	1
f=	4	-2	4	2

	1	$-x_1$	$-x_4$
$x_2=$	1	-1/2	1/2
$x_3=$	1	1/2	1/2
F=	5	-1/2	7/2
f=	0	0	0

Обращение в нуль искусственной формы f свидетельствует о том, что система ограничений (4.52) исходной задачи совместна, а сама задача имеет допустимые решения.

Полученный на первом этапе начальный опорный план

$$X_0 = (0;1;1;0), \; F_0 = 5,.$$

не является оптимальным, т.к. строке целевой функции F есть как положительные, так и отрицательные элементы.

Дальнейшее преобразование симплексной таблицы осуществляется без учёта строки искусственной формы f, обратившейся в нуль, и отдельно для разных типов оптимумов.

При поиске максимума целевой функции будем иметь:

	1	$-x_1$	$-x_4$
$x_2=$	1	$-^1/_2$	$^1/_2$
$x_3=$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
F=	5	$-^1/_2$	$^7/_2$

→

	1	$-x_3$	$-x_4$
$x_2=$	2		
$x_1=$	2		
F=	6	1	4

Все элементы в F строке положительны, а поэтому план является

оптимальным:

$x^*=(2;2;0;0)$, $F^*_{max}=6$.

При оптимуме типа минимум получим:

	1	$-x_1$	$-x_4$
$x_2=$	1	$-^1/_2$	$^1/_2$
$x_3=$	1	$^1/_2$	$^1/_2$
F=	5	$-^1/_2$	$^7/_2$

	1	$-x_1$	$-x_3$
$x_2=$	0		
$x_4=$	2		
F=	-2	-4	-7

Получен оптимальный план:

$X^*= (0; 0; 0; 2)$, $F^*= -2$

4.6. Двойственность в линейном программировании

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая задача линейного программирования, называемая **<u>двойственной .</u>** Тогда первоначальная задача называется **<u>исходной</u>** <u>(прямой).</u> Связь исходной и двойственной задач заключается в том, что решение одной из них может быть найдено непосредственно из решения другой.

Рассмотрим следующие задачи линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
& F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max; \\
& \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1, m_1} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{m_1 + 1, m}; \end{cases} \\
& x_j \ge 0, j = \overline{1, n_1};
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

$$
\begin{aligned}
& \tilde{F}(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \min; \\
& \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, j = \overline{1, n_1} \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j\, j = \overline{n_1 + 1, n}; \end{cases} \\
& y_i \ge 0, i = \overline{1, m_1}.
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

т . е . x_j произвольного знака, y_i произвольного знака при

$$j = \overline{n_1 + 1, n}, \qquad i = \overline{m_1 + 1, m}.$$

Эти задачи линейного программирования, записанные в произвольной форме записи, обладают такими свойствами:

1. В одной задаче имеется - max линейной формы, в другой - min (или наоборот).

2. Коэффициенты при переменных в линейной форме одной задачи совпадают со свободными членами системы ограничений другой задачи и наоборот, свободные члены системы ограничений одной задачи являются коэффициентами при переменных в линейной форме другой.

3. В каждой задаче ограничения – неравенства задаются одного типа, а именно, при нахождении max целевой функции эти неравенства типа "≤".

4. Коэффициенты при переменных в системах ограничений (4.54) и (4.55) определяются матрицами:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{11} \ldots \boldsymbol{a}_{12} \ldots \boldsymbol{a}_{1n} \\ \boldsymbol{a}_{21} \ldots \boldsymbol{a}_{22} \ldots \boldsymbol{a}_{mn} \end{bmatrix} \text{ и } A'=\begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12} \ldots a_{22} \ldots a_{mn} \end{bmatrix},$$ которые являются транспонированными относительно друг друга.

5. Число неравенств и уравнений в системе ограничений одной задачи равняется числу переменных в другой задаче и наоборот.

6. Число ограничений – неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом неотрицательных переменных в другой и наоборот, число неотрицательных переменных одной задачи равняется числу ограничений - неравенств в системе ограничений другой.

7. Число ограничений – равенств в системе ограничений одной задачи равняется числу переменных произвольного знака, т.е. тех, на которые не наложено условие неотрицательности, в другой и наоборот, число переменных произвольного знака одной задачи определяет число ограничений - равенств в системе ограничений другой.

Так как задача, двойственная по отношению к двойственной задаче (4.55), является исходной (4.54), то задачи (4.55) и (4.54) образуют **пару двойственных задач.**

Если система ограничений исходной задачи задаётся в виде ограничений-равенств, а двойственной – в виде ограничений – неравенств, причём, в них переменные могут быть и отрицательными, то эта пара задач называется **несимметричными двойственными.**

Если системы ограничений обеих задач задаются в виде ограничений – неравенств, причём, и на двойственные переменные налагаются условия неотрицательности, то такие задачи называются **симметричными двойственными.**

Для того, чтобы составить двойственную задачу по отношению к заданной, следует придерживаться такого алгоритма.

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к неравенствам одного типа : "$\le$", если целевая функция максимизируется и "$\ge$", если ищется минимум линейной формы. Для этого неравенства, в которых это требование не выполняется, умножаются на (-1).

2. Выписать расширенную матрицу $\tilde{A}$, составленную из коэффициентов при переменных в системе ограничений (4.55) исходной задачи, дополненных столбцом свободных членов этой системы и строкой коэффициентов при соответствующих переменных в выражении целевой функции (4.54), и определить транспонированную матрицу $\tilde{A}!$

3. Записать линейную форму двойственной задачи $\tilde{F}(y)$ по последней строке матрицы A. При этом коэффициенты при переменных двойственной задачи будут совпадать со свободными членами системы ограничений прямой задачи.

4. Указать тип оптимума линейной формы двойственной задачи противоположным типу оптимума исходной.

5. Составить систему ограничений двойственной задачи по оставшейся части матрицы $\tilde{A}!$

В этом случае коэффициенты при переменных двойственной задачи определяются элементами матрицы A′, а свободные члены – коэффициентами при переменных в F исходной задаче. При этом, если на j-ю переменную исходной задачи наложено условие неотрицательности, то j-е ограничение двойственной задачи будет неравенством; в противном случае j-е ограничение будет равенством. Если i-е ограничение исходной задачи записано в виде неравенства, то i-я двойственная переменная y_i будет неотрицательной, в противном случае эта переменная может быть произвольного знака. Наконец, ограничения- неравенства двойственной задачи записывают противоположного вида по сравнению с ограничениями-неравенствами прямой задачи.

ПРИМЕР 4.6.1. Составить двойственную задачу к данной исходной:

$$F = 2x - x + 3x - max; \tag{4.56}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 10 \\ -x_2 + 4x_3 = 15 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -5 \end{cases}; \tag{4.57}$$

$$x_j \geq 0, j=1,3. \tag{4.58}$$

Решение:

Судя по исходной задаче, будем иметь пару несимметричных двойственных задач.

Так как все ограничения системы (4.57) записаны в виде ограничений-равенств, сразу переходим к п.2 предлагаемого алгоритма.

$$\tilde{A} = \left|\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -5 & 10 \\ 0 & -1 & 4 & 15 \\ 3 & 1 & 1 & -5 \\ \hline 2 & -1 & 3 & F \end{array}\right|$$

Тогда

$$\tilde{A}^{|} = \left|\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -5 & 4 & 1 & 3 \\ \hline 10 & 15 & -5 & F \end{array}\right|$$

Линейная форма двойственной задачи имеет вид:

$\tilde{F} = 10y + 15y - 5y - min.$

Принимая во внимание, что в исходной задаче ищется max F и на все переменные (4.58) наложено ограничение неотрицательности, система ограничений двойственной задачи будет состоять только из ограничений-неравенств вида "≥" :

$$\begin{cases} -y_1 + 3y_3 \geq 2 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq -1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \end{cases}.$$

Так как все соотношения системы (4.6.4) прямой задачи записаны в виде ограничений-равенств, то ни на одну переменную двойственной задачи не наложено условие неотрицательности.

Следовательно, двойственная задача записывается так:

$$\tilde{F} = 10y + 15y - 5y - min; \qquad (4.59)$$

$$\begin{cases} -y_1 + 3y_3 \geq 2 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq -1 \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \end{cases}. \qquad (4.60)$$

ПРИМЕР 4.6.2. Составить двойственную задачу по отношению заданной исходной:

$$F = 3x + 4x + 2x - min; \qquad (4.61)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 5 \end{cases};$$

(4.62)

$$x_j \geq 0; \qquad j=1,3. \qquad (4.63)$$

Решение:

Тип неравенства третьего ограничения системы (4.62) не соответствует п.1 предложенной схемы, т.к. при минимизации целевой функции все неравенства в (4.62) должны быть вида "≥", поэтому необходимо обе части этого неравенства умножить на (-1).

В результате система ограничений (4.62) будет иметь вид :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq -5 \end{cases}. \qquad (4.64)$$

Для облегчения составления двойственности задачи воспользуемся расширенной матрицей $\tilde{A}$ в которую кроме коэффициентов при переменных в системе (4.64) включим свободные члены этой системы ограничений и коэффициенты при переменных в линейной форме (4.62), выделив с этой целью дополнительные столбец и строку соответственно: транспонировав матрицу $\tilde{A}$, получим параметры двойственности задачи

$$\tilde{A} = \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \\ \hline 3 & 4 & 2 & F \end{array}\right|$$

$$\tilde{A}' = \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 7 & 9 & -5 & F \end{array}\right|$$

Итак, двойственная задача по отношению к прямым (4.61-4.63) будет иметь вид:

$$\widetilde{F} = 7y + 9y + -5y \text{ ---} max; \tag{4.65}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 - y_3 \le 3 \\ y_1 + 2y_2 + 2y_3 \le 4 \\ -y_2 + 3y_2 + y_3 \le 2 \end{cases}; \tag{4.66}$$

$$y_i \geq 0; \qquad i = 1,3. \tag{4.67}$$

Дадим экономическую интерпретацию пары двойственных задач. Рассмотрим задачу рационального использования имеющихся в наличии ресурсов.

Пусть некоторое предприятие располагает материальными ресурсами в количествах $b_1 \ldots b_2 \ldots b_m$, которые могут быть использованы при производстве n видов продукции.

Пусть также известны стоимость единицы j-го вида продукции j=1,n и норма потребления i-го ресурса i=1,m на производство единиц j-й продукции a_{ij}.

Тогда исходная задача формируется следующим образом. Требуется определить объём производства продукции каждого вида Xj, j= 1,n, максимизирующей суммарную стоимость F, с учётом того, что расход ресурсов не может превышать их наличия и все неизвестные по своему экономическому смыслу неотрицательны:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_{n \to max}$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2 \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m \end{cases}; \tag{4.68}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Отталкиваясь от приведенных данных, сформулируем экономическую задачу, двойственную к исходной.

Пусть существует некоторая организация, которая может закупить все ресурсы рассмотренного предприятия. Необходимо определить оптимальные цены (оценки) $y^* = (y_1^*, y_2^*, .. y_m^*)$ на эти ресурсы, исходя из того, что покупающая организация стремится минимизировать общую оценку ресурсов и, кроме того, надо учитывать тот факт, что за ресурсы покупающая организация должна заплатить сумму, не меньшую той, которую может получить предприятие при организации собственного производства продукции.

С учётом этого всего, двойственная задача будет иметь математическую модель

$$\tilde{F} = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to min;$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1 \\ a_{11} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geq c_2 \\ a_{1n} y_2 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_m \geq c_n \end{cases}; \tag{4.69}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,m}.$$

Здесь $\tilde{F}$ - общая оценка ресурсов, каждое j–е неравенство системы (4.69) слева имеет оценку всех ресурсов, расходуемых на производство единицы продукции j-го вида, а справа – стоимость единицы этой продукции.

Каждая из задач двойственной пары является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо одна от другой, однако, при нахождении симплексным методом оптимального плана одной из задач сразу же определяется оптимальное решение и другой задачи.

Связь между решениями исходной и двойственной задач устанавливается следующими теоремами.

ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ

Если одна из задач двойственной пары имеет оптимальный план $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, то и другая также имеет оптимальный план $y^*=(y_1^*, y_2^*, .. y_m^*)$, причём, значения целевых функций обеих задач при оптимальных планах равны между собой:

$$F_{MAX}(X^*) = \tilde{F}_{MIN}(Y^*).$$

Следствие 1. Для существования оптимального решения одной из задач двойственной пары необходимо и достаточно, чтобы каждая из задач имела хотя бы одно допустимое решение.

Следствие 2 Если целевая функция одной из задач двойственной пары неограниченна на множестве своих допустимых решений, то другая задача вообще не имеет планов (её область допустимых решений пуста, т.е ограничения задачи несовместны).

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ (теорема о дополнительной нежёсткости Слейтера).

Для того, чтобы пара допустимых решений X и У двойственных задач была оптимальной парой, необходимо и достаточно, чтобы на этом решении либо ограничения-неравенства выполнялись как строгие равенства, либо соответствующие ограничениям-неравенствам двойственные переменные обращались в нуль:

$$\left(\sum_{J=1}^{N} a_{ij} x_j^* - b_i\right) * y_i^* = 0, i = \overline{1, m_1},$$

или

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* - c_j\right) * x_j^* = 0, j = \overline{1, m}.$$

В соответствии с этой теоремой, если какая-то переменная Xj* оптимального плана исходной задачи положительна, то j-е ограничение двойственной задачи её оптимальным планом обращается в строгое равенство. Если оптимальное решение исходной задачи обращает какое-либо её j-е ограничение в строгое неравенство, то в оптимальном плане двойственной задачи переменная Yi* равна нулю.

Эта теорема справедлива для симметричных двойственных задач. Для задач в общей и канонической форме она справедлива только для ограничений-неравенств и при неотрицательных переменных.

Установим соответствие между переменными в исходной и двойственной задачах. Заметим, что это соответствие будет справедливо как для симметричных, так и для несимметричных двойственных задач. В первом случае будут учитываться балансовые переменные, во втором – искусственные переменные.

В общем случае системы ограничений исходной задачи содержат m ограничений и n переменных. При её решении симплексным методом необходимо все m ограничений свести к ограничениям-равенствам за счёт введения во все эти ограничения дополнительных неотрицательных переменных (балансовых или искусственных) X_{n+i}, $i=\overline{1,m}$, где i – номер ограничения, в которое введена добавочная переменная X_{n+i}.

Система ограничений двойственной задачи состоит из n ограничений, содержащих m переменных. Следовательно, при сведении всех ограничений к ограничениям-равенствам, необходимо ввести n неотрицательных переменных $Y_{n+j}, j=\overline{1,n}$, где j - номер ограничения, в которое введена добавочная переменная Y_{n+j}.

Тогда соответствие между переменными исходной и двойственной задач выглядят так:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_j & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+i} & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+1} & y_{m+j} & y_{m+n} & y_1 & y_2 & y_3 & y_m \end{array}$$

Другими словами, каждой первоначальной переменной Xj исходной задачи ставится в соответствие добавочная переменная Y_{m+j}, введённая в j-е ограничение двойственной задачи; каждой добавочной переменной X_{n+i}, исходной задачи, введённой в её i-е ограничение - первоначальная переменная Yi двойственной задачи.

В этом случае оптимальное решение одной из задач двойственной пары по известному решению другой задачи позволяет находить следующая теорема:

<u>ТЕОРЕМА 3</u>. Компоненты оптимального решения одной из задач (прямой или двойственной) равны абсолютным величинам коэффициентов при соответствующих переменных в выражении линейной формы другой задачи (прямой или двойственной) при достижении ею оптимума и при условии, что это оптимальное решение не является вырожденным.

ПРИМЕР 4.6.3: Найти решение двойственной пары задач, если исходная имеет вид:

$$F = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases};$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

Решение

По заданной прямой задаче запишем двойственную и от ограничений - неравенств перейдем к ограничениям - равенствам для решения обеих задач симплексным методом.

$$\tilde{A} = \left|\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 8 \\ \hline 2 & 7 & F \end{array}\right| \Rightarrow \quad \tilde{A}^{T} = \left|\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \\ \hline 14 & 8 & \tilde{F} \end{array}\right|$$

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to max \qquad\qquad F = 14x_1 + 8x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 3y_1 + y_2 \ge 7 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \qquad\qquad y_1 \ge 0; \quad y_2 \ge 0$$

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to max \qquad\qquad \tilde{F} = 14x_1 + 8x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -2y_1 + y_2 - y_3 = 2 \\ 3y_1 + y_2 - y_4 = 7 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0; \quad i = \overline{1,4} \qquad\qquad y_i \ge 0; \quad i = \overline{1,4}$$

$$F = 0 - (-2x_1 - 7x)_2 \to max \qquad\qquad \tilde{F} = 0 - (-14x_1 - 8x_2) \to min$$

$$\begin{cases} x_3 = 14 - (-2x_1 + 3x_2) \\ x_4 = 8 - (x_1 + x_2) \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 0 = 2 - (-2y_1 + y_2 - y_3) \\ 0 = 7 - (3y_1 + y_2 - y_4) \end{cases}$$

$$x_i \ge 0; \quad i = \overline{1,4} \qquad\qquad y_i \ge 0; \quad i = \overline{1,4}.$$

Установим соответствие между переменными двойственной пары.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4. \end{array}$$

Решим симплексным методом прямую задачу

	1	- X1	- X2
X3=	14	-2	3
X4=	8	1	1
F=	0	-2	-7

→

	1	- X1	- X3
X2=	14/3	-2/3	1/3
X4=	16/3	5/3	-1/3
F=	98/3	-20/3	7/3

→

	1	- X4	- X3
X2=	10		
X1=	10/3		
F=	230/3	20/3	5/3

$$\mathrm{Min}\left\{\frac{14}{3};\frac{8}{1}\right\} = \frac{14}{3};$$

			y_2	y_1
		1	- X4	- X3
-Y4	X2=	6		
-Y3	X1=	2		
	F=	46	4	1

$X^* = (2; 6; 0; 0)$, $\tilde{F}_{\max} = 46$.

В соответствии с теоремой 3, двойственная задача имеет оптимальное решение

$Y^* = (1; 4; 0; 0)$, $\tilde{F}_{\min} = 46$.

Решим двойственную задачу:

	1	- Y1	- Y2	- Y3	- Y4
0=	2	-2	1	-1	0
0=	7	3	1	0	-1
F=	0	-14	-8	0	0

→

	1	- Y1	- Y3	- Y4
Y2=	2	-2	-1	0
0=	5	-5	1	-1
F=	16	-30	-8	0

→

			X1	X2
		1	- Y3	- Y4
X4	Y2=	20/5		
X3	Y2=	5/5		
	F=	230/5	-10/5	-30/5

$$\mathrm{Min}\left\{\frac{2}{1};\frac{7}{1}\right\} = 2.$$

Тогда

$Y^* = (1; 4; 0; 0)$, $X^* = (2; 6; 0; 0)$.

$\tilde{F}_{\min} = 46$; $\tilde{F}_{\max} = 46$.

Первые m компонент (Y_i^*; $i = 1, m$) оптимального решения двойственной задачи называются объективно обусловленными оценками (двойственными оценками). Так название связано с экономическим содержанием переменных двойственной задачи.

Разберемся с экономическим смыслом двойственных переменных на конкретном примере об использовании сырья.

Пример 4.6.4.

Для производства трех видов изделий А, В и С используется три различных вида сырья 1, 2 и 3, запасы которых равны 180, 210 и 244 кг соответственно. Нормы затрат каждого вида сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в таблице.

Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость, и оценить каждый из видов сырья, используемый для производства продукции.

При этом оценки каждого вида сырья должны быть такими, чтобы оценка всего используемого сырья была минимальной, а суммарная оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, не меньше цены единицы продукции данного вида.

Вид сырья	**Запасы**	**Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции вида**		
		А	**В**	**С**
1	**180**	**4**	**2**	**1**
2	**210**	**3**	**1**	**3**
3	**244**	**1**	**2**	**5**
Цена единицы продукции (грн)		**10**	**14**	**12**

Решение

Пусть производится x_1 единицы изделия А, x_2 единицы изделия В, x_3 единицы изделия С. Тогда математическая модель сформулированной задачи выглядит так:

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \rightarrow max; \tag{4.70}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244 \end{cases}; \tag{4.71}$$

$$x_i \ge 0, \qquad i = \overline{1,3}. \tag{4.72}$$

Это исходная задача линейного программирования.

Обозначим двойственные оценки каждого из трех видов сырья y_1, y_2 и y_3 соответственно.

Тогда общая оценка сырья, используемого для изготовления продукции равна

$$\tilde{F} = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3 \rightarrow min. \tag{4.73}$$

В соответствии с условием задачи, двойственные оценки должны быть такими, чтобы общая оценка продукции каждого вида была не меньше цены единицы продукции данного вида. Отсюда:

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 10 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 14 \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \ge 12 \end{cases}; \tag{4.74}$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1,3}.$$

Задачи (4.70-4.72) и (4.73 – 4.74) образуют пару симметричных двойственных задач. Решение прямой задачи позволяет установить оптимальный план производства изделий трех видов, а решение двойственной – оптимальную систему оценок сырья, используемого для производства изделий.

$$F = 0 - \left(-10x_1 - 14x_2 - 12x_3\right) \rightarrow max;$$

$$\begin{cases} x_4 = 180 - (4x_1 + 2x_2 + x_3) \\ x_5 = 210 - (3x_1 + x_2 + 3x_3); \\ x_6 = 244 - (x_1 + 2x_2 + 5x_3) \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6}.$$

Решим прямую задачу :

	1	- X1	- X2	- X3
X4=	180	4	2	1
X5=	210	3	1	3
X6=	244	1	2	5
F=	0	-10	-14	-12

$\rightarrow$

	1	- X1	- X4	- X3
X2=	180	4	1	1
X5=	240	2	-1	5
X6=	128	-6	-2	8
F=	2520	36	14	-10

$:2 \rightarrow$

	1	- X1	- X4	- X3
X2=	90	2	1/2	1/2
X5=	120	1	-1/2	5/2
X6=	64	-3	-1	4
F=	1260	18	7	-5

$$Min \left\{\frac{180}{2}; \frac{210}{1}; \frac{244}{2}\right\} = 90;$$

$$Min \left\{\frac{90}{1/2}; \frac{120}{5/2}; \frac{64}{24}\right\} = 180.$$

$\rightarrow$

	1	$-x_1$	$-x_4$	$-x_6$
$x_2 =$	328	19/2	5/2	-1/2
$x_5 =$	320	23/2	1/2	-5/2
$x_3 =$	64	-3	-1	1
$F =$	53600	57	23	5

$:4 \rightarrow$

			y_4	y_1	y_3
		1	$-x_1$	$-x_4$	$-x_6$
y_5	$x_2 =$	82	19/8	5/8	-1/8
y_2	$x_5 =$	80	23/8	1/8	-5/8
y_6	$x_3 =$	16	-3/4	-1/4	1/4
	F=	1340	57/4	23/4	5/4
			A	I	III

Соответствие двойственных переменных

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Следовательно, системные планы обеих двойственных задач имеют вид:

x*= (0; 82; 16; 0; 80; 0;) ***y*= (23/4; 0; 5/4; 57/4; 0; 0);***

$F^*_{max} = 1340$; $\tilde{F}^*_{max} = 1340$.

Таким образом, оптимальный план производства, максимизирующий стоимость изготовленной продукции, получается при производстве 82 изделий В и 16 изделий С. В этом случае остаются использованными 80 кг сырья II вида, изделие А вообще не производится и общая стоимость всей продукции равна 1340 грн. Объективно обусловленные оценки сырья при этом равны:

$$y^*_1 = \frac{23}{4}; \quad y^*_2 = 0; \quad y^*_3 = \frac{5}{4}.$$

Переменные y_1^* и y_2^* являются двойственными оценками сырья I и III видов, которые полностью используются при оптимальном плане производства. Двойственная оценка y_2^* единицы сырья II вида равна нулю, а само сырьё этого вида не полностью используется. Они имеют лишь те виды сырья, которые полностью используются в производстве. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемого сырья. Более того, величина данной двойственной оценки показывает, насколько увеличивается максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1кг.

Так, увеличение на 1 кг сырья I вида приведёт к увеличению общей стоимости изготовленной продукции по новому оптимальному плану на $\frac{23}{4}$ грн. При этом элементы симплексной таблицы в столбце над $x_4 \circ y_1$ свидетельствуют, что это увеличение стоимости продукции может быть достигнуто за счёт увеличения выпуска изделия В на $\frac{5}{8}$ единицы и сокращения выпуска изделия С на $\frac{1}{4}$ единицы, а потребности сырья II вида уменьшится на $\frac{1}{8}$ кг.

Аналогично, увеличение на 1 кг сырья III вида позволит найти новый системный план выпуска продукции, при котором общая стоимость продукции возрастёт на $\frac{5}{4}$ грн. Этот план будет достигнут при уменьшении выпуска изделий В на $\boldsymbol{\frac{1}{8}}$ единицы и возрастании производства изделия С на $\frac{1}{4}$ единицы, причём, использование сырья II вида увеличится на $\boldsymbol{\frac{5}{8}}$ кг.

Подстановка системных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи даёт:

$$\begin{cases} 4\cdot\frac{23}{4}+3\cdot 0+\frac{5}{4}\geq 10 \\ 2\cdot\frac{23}{4}+0+2\cdot\frac{5}{4}=14 \\ \frac{23}{4}+3\cdot 0+5\cdot\frac{5}{4}=12. \end{cases}$$

Первое ограничение двойственной задачи начинается как строгое неравенство, что означает превышение двойственной оценки сырья, расходуемого на производство единицы изделия вида А над ценой этого изделия, а, поэтому, выпуск изделия А экономически нецелесообразен. Кстати, оптимальный план производства исходной задачи выпуск изделия А и не предусматривает.

Второе и третье ограничения двойственной задачи обращаются в строгие равенства. Это означает, что двойственные оценки сырья, используемые для производства единицы изделий вида В и С, точно совпадают с их ценами. Поэтому выпускать эти два вида продукции экономически выгодно, что и демонстрирует оптимальный план производства прямой задачи.

Наконец, нетрудно убедиться, что полученные двойственные оценки доставляют целевой функции этой задачи минимальные значения, совпадающие с максимальными значениями целевой функции исходной задачи:

$$\tilde{F}^*_{\min}=180\cdot\frac{23}{4}+210\cdot 0+244\cdot\frac{5}{4}=1340\equiv F^*_{\min}\,.$$

4.7. Транспортная задача

Транспортная задача выделяется среди прочих ЗЛП в связи с тем, что она имеет специфическую материальную модель, и её решение осуществляется более простым, не универсальным симплексным методом, а методом, специально разработанным для этой задачи.

Транспортная задача (ТЗ) формулируется следующим образом.

В $\boldsymbol{m}$ пунктах $A_1, A_2, \ldots A_m$ производится некоторый однородный продукт в количествах $a_1, a_2, \ldots a_m$ соответственно.

Этот продукт должен быть доставлен в $\boldsymbol{n}$ пунктов $B_1, B_2, \ldots B_m$ в количествах $b_1, b_2, \ldots b_n$ соответственно.

При этом стоимость перевозки единицы продукта из пункта производства в $j^{й}$ пункт потребления равна C_{ij}, а количество переводимого продукта равно $\min(a_i, b_j)$.

Требуется составить такой план перевозок, чтобы при минимальных транспортных издержках удовлетворить всех потребителей за счёт распределения всего произведенного продукта. Для наглядности транспортную задачу представляют в виде т.н. распределительной таблицы (транспортной матрицы, матрицы перевозок).

Потребитель / Поставщик	B1	B2	…	B	Запасы
A1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	…	X_{1n} C_{1n}	a_1
	X_{21} C_{21}	X_{22} $_{22}$	…	X_{2n} C_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	…	X_{mn} $_{mn}$	
Потребности			…		

Если обозначить целевую функцию задачи (суммарную стоимость перевозок) буквой F, то математическая модель ТЗ будет иметь вид:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \rightarrow min; \qquad (4.75)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i, & i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_i, & j = \overline{1,n} \end{cases}; \qquad (4.76)$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

ТЗ (4.75-4.76) имеет следующие особенности:

1. Задача записана в канонической форме.

т.е. ищется минимум линейной формы (4.75) при ограничениях равенствах (4.76);

2. Каждая неизвестная входит лишь в два уравнения. Поэтому матрица коэффициентов при неизвестных, соответствующая ограничениями ТЗ (4.76), слабо заполнена. Поэтому необходимо применить для решения ТЗ метод потенциалов, а не симплексный метод.

3. Коэффициенты при неизвестных равны 1.

4. Число неизвестных в ТЗ равно m·n, а число ограничений в системе (4.76) – $m + n$.

5. Ранг системы ограничений (4.76) на 1 меньше числа уравнений, т.е. $r=m+n-1$. Следовательно, опорный план перевозок будет содержать $m+n-1$ *базисных* переменных и $m \cdot n - (m + n - 1) = (m - 1)(n - 1)$ свободных переменных, равных нулю.

При составлении плана перевозок необходимо учитывать два основных требования:

1. Весь груз из пунктов отправления должны быть полностью вывезен.

2. Потребности пунктов назначения должны быть полностью удовлетворены.

Совместимость системы ограничений (4.76) определяется следующей теоремой.

Теорема 1. Для существования решения задачи (4.75-4.76) необходимо и достаточно, чтобы сумма запасов равнялась сумме потребностей,

Если условие (п4) выполняется, то говорят, что ТЗ имеет закрытую модель.

Если условие (п4) не выполняется, то ТЗ имеет открытую модель. Такая задача несовместна.

Для восстановления совместности системы ограничений (4.76) в случае

$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводят фиктивный m+1 пункт отправления с запасом и стоимостью перевозок из него $C_{m+1,J}=0$, $j = \overline{1,h}$.

Если в ТЗ $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то для восстановления ее совместности вводят фиктивный *n+1* пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и тарифом перевозок $i = \overline{1,n}$.

Таким образом, введением фиктивных пунктов отправления или назначения открытая модель ТЗ легко сводится к закрытой модели .

Рассмотрим решение ТЗ методом потенциалов.

План перевозок будем искать непосредственно с помощью транспортной матрицы.

Для этого в её клетки вписываются *m+n-1* базисные переменные (даже если они равны нулю), а клетки со свободными переменными (они в опорном плане всегда равны нулю) считаются нулевыми.

При использовании методов потенциалов применяют следующую терминологию.

Определение 1. Произвольная совокупность клеток транспортной матрицы называется набором.

Определение 2. Совокупность $m+n-1$ клеток с базисными переменными называется базисным набором.

Определение 3. Цикл – это набор клеток, в котором каждая пара соседних клеток лежит либо в одной строке, либо в одном столбце, причем, первая и последняя клетки такого набора лежат в одной строке или столбце.

Определение 4. Базисный набор, не содержащий ни одного цикла, называется ациклическим.

Определение 5. Допустимый план X = {Xij}m,n называется потенциальным, если ему соответствует система m+n чисел $U_1, U_2, \dots, U_m; V_1, V_2, \dots, V_n$, удовлетворяющих условию.

Для небазисных наборов: $V_j - U_i \le C_{ij}$ или $V_j - U_i - C_{ij} \le 0$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$.

Для базисных наборов: $V_j - U_i = C_{ij}$.

При составлении планов перевозок следует иметь в виду следующие теоремы.

Теорема 2. Любой ациклический план $x = \{X_{ij}\}$ является опорным планом ТЗ.

Теорема 3. Для оптимальности плана ТЗ необходимо и достаточно, чтобы он был потенциальным.

Алгоритм метода потенциалов состоит из предварительного и повторяющегося общего шага.

Предварительный шаг предполагает решение следующих задач.

1. Определение первоначального опорного плана.
2. Построение для этого опорного плана системы потенциалов

   $\{U_i\}$, $\{V_j\}$, $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ исходя из потенциальности базисных клеток.
3. Проверка потенциальности небазисных клеток.

Если допустимый план является потенциальным, то он является оптимальным, т.е. обеспечивает минимальные затраты на транспортировку.

Если первоначальный опорный план не является потенциальным, то его надо оптимизировать, для чего переходят к повторяющемуся общему шагу.

На этом этапе решаются следующие задачи в указанной последовательности.

1. Улучшение первоначального плана перевозок X, т.е. переход к новому плану X' со стоимостью перевозок, не превышающей стоимости перевозок первоначального плана X.

2. Построение для нового плана X' новой системы потенциалов $\{U_i'\}, \{V_j'\}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

3. Проверка системы U_i', V_j' на потенциальность.

Этот шаг повторяется до тех пор, пока не будет получен потенциальный, т.е. оптимальный план перевозок.

Предложенный алгоритм решения ТЗ сходится за конечное число шагов.

Таким образом, решения ТЗ сводятся к переходу от одного плана перевозок к другому, т.е. от одной транспортной матрицы к другой, пока не будет найдено оптимальное решение, и всегда в начале этого процесса находится первоначальный опорный план.

Для нахождения первоначального распределения поставок может быть использовано несколько методов. Рассмотрим два из них – северо-западного угла и наименьшей стоимости.

В каждом из названых методов перевозка определяется как меньшее из двух чисел: запас $i^{го}$ пункта отправления a_i и потребности $j^{го}$ пункта назначения b_j.

А вот последовательность заполнения их в транспортной матрице в различных методах разная.

В методе северо-западного угла заполнение матрицы начинается с верхнего левого угла и продолжается в окрестности её диагонали. При этом стоимости перевозок не принимаются во внимание. Поэтому полученный первоначальный опорный план более далек от оптимального, чем соответствующий план перевозок, полученный по методу наименьшей стоимости.

При использовании метода наименьшей стоимости заполнение транспортной матрицы начинается с клетки с минимальным тарифом перевозки, причем, в нее заносится максимально возможная поставка, и продолжается заполнение клеток со следующим по малости транспортным тарифом.

Познакомимся более подробно с методами решения ТЗ на конкретном примере.

Пример. Решить транспортную задачу методом потенциалов для следующей тарифной матрицы.

1	3	2	20
2	1	3	15
8	10	12	a_i / *bj*

Решение

Прежде всего, проверяем выполнение условия

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j.$$

У нас $\sum_{i=1}^{2} a_i = 20 + 15 = 35$ $\sum_{j=1}^{3} b_j = 8 + 10 + 12 = 30$.

Таким образом, имеем открытую модель транспортной задачи. Для того, чтобы перейти к закрытой модели введем фиктивный пункт назначения с потребностью $b_4=\sum_{i=1}^{2} ai-\sum_{j=1}^{3} bj$ и тарифом перевозок Ci4 =0.

Начальный опорный план получим двумя методами – северо-западного угла и минимальной стоимости.

В соответствии с первым методом заполнение транспортной матрицы начинается с верхнего левого угла, а остаток по столбцу или строке помещается в соседнюю клетку.

1 8	3 10	2 2	0 0	20	12	0	0	0	0
2 0	1 0	3 10	0 5	15	15	15	15	5	0
8	10	12	5	a_i / bj					
0	10	12	5						
0	0	12	5						
0	0	10	5						
0	0	0	5						
0	0	0	0						

1. x_{i1}=min {8;20}=8, x_{21}=0, a_i`=20-8=12, $b_1$`=0.
2. x_{12}= min{10;12}=10, x_{22}=0, a_1`=12-10=2, b_2=0.
3. x_{13}=min{72;2}=2, X_{14}=0, a_i`=0, $b_3$`=12-2=10.
4. x_{23}=min {10;15}=10, a_i`=15-10=5, $b_3$`=0.
5. x_{24}=5, a_2`=0, b_4=0.

Согласно полученному плану стоимость перевозок равна

$$F=8\cdot1+10\cdot3+2\cdot2+10\cdot3+5\cdot0=72.$$

При этом количестве перевозок N=5.

И число базисных переменных $m+n-1=2+4-1=5$.

Совпадает, то есть задача не вырождена.

Полученный план перевозок является начальным опорным планом. Так как при составлении этого план стоимость перевозок не принималась во внимание, то он достаточно далек от оптимального.

Убедимся в этом, построив ещё один начальный план перевозок методом минимальной стоимости.

В соответствии с последним методом заполнение клеток транспортной матрицы будем производить по мере увеличения тарифа перевозок.

^{1} 8	^{3} 0	^{2} 12	^{0} 0	20	12	12	0	0
^{2} 0	^{1} 10	^{3} 0	^{0} 5	15	15	5	5	0
8	10	12	5	a_i / bj				
0	10	12	5					
0	0	12	5					
0	0	0	5					
0	0	0	0					

1. x_{11}min {8;20}=8, x_{21}=0, a_1\`=20-8=12, $b_1$\`=0.

2. x_{22}=min{10;15}=10, x_{12}=0, a_2\`=15-10=5, $b_i$\`=0.

3. $x_{13}=\min\{12;12\}=12$, $x_{14}=0$, $x_{23}=0$, $a_i`=0$, $b_5`=0$.

4. $x_{24}=5$, $a_2`=0$, $b_4`=0$.

При этом стоимость перевозки будет равна

F=8*1+12*2+10*1+5*0=42.

Сравнивая стоимости двух начальных опорных планов, делаем вывод, что этот план более близок к оптимальному, чем предыдущий. Для полученного плана число перевозок N=4, а m+n-1=2+4-1=5. Значит, задача вырожденна и не имеет решения. Для восстановления задачи введем в базис любую нулевую проверку, например, о клетке $x_{14}=0$.

Дальше будем работать с последним опорным планом, как более близким к оптимальному. Построим для него систему потенциалов, пунктов отправления u_i, и назначим V_j из условия потенциальности базисных клеток.

$$V_j - u_i = C_{ij}$$

V_j / u_i	$V_1=1$	$V_2=1$	$V_3=2$	$V_4=0$
$u_1=0$	1 8	3	2 12	0 0
$u_2=0$	2	1 10	3	0 5

$V_1 - u_1=1$

$V_3 - u_1=2$

$V_4 - u_1=0$

$V_2 - u_2=1$

$V_4 - u_2=0$

У нас 5 уравнений и 6 неизвестных поэтому одно из них надо выбрать произвольно, пусть $n_2=0$. Тогда

$u_1=0$; $V_1=1$;

$u_2=0$; $V_2=1$;

$V_3=2$; $V_4=0$.

Проверим выполнение условия для клеток.

$$v_j - u^0 - c_{ij} \le 0$$

У нас

v_2- n_1-c_{12}=1-0-3=-2<0;

v_1- u_2-c_{21}=1-0-2=-1<0;

v_3- u_2-c_{23}=2-0-3=-1<0.

Таким образом, потенциальными являются небазисные клетки, а следовательно, начальный опорный план является оптимальным и минимальная стоимость перевозок равна

$$F_{min}=42.$$

В данном случае повторяющийся шаг не понадобился.

Для демонстрации общего шага немного изменим опорный начальный план, внеся перевозку.

Этот план мест вид

1 8	3	2 7	0 5	20
2	1 10	3 5	0	15
8	10	12	5	a_i / b_j

При этом задача не вырождена т.к.

N=5 и m+n-1=2+4-1=5.

Стоимость перевозок для этого плана составляет: F=8*1+7*2+5*0+10*1+5*3=47.

Составляем систему потенциалов этого плана, исходя из потенциальности базисных клеток.

$$\begin{cases} v1 - ui = 1 \\ v3 - u1 = 2 \\ v4 - u1 = 0 \\ v2 - u2 = 1 \\ v3 - u2 = 3. \end{cases}$$

Приняв n_1=0, получим $\begin{cases} u1 = 0 \\ u2 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} v1 = 1 \\ v2 = 0 \\ v3 = 2 \\ v4 = 0 \end{cases}$

V_j / n_i	V_1=1	V_2=0	V_3=2	V_4=0
n_1=0	8 (1)	(3)	7 (2)	5 (0)
n_2=-1	(2)	10 (1)	5 (3)	(0)

Проверяем потенциальность небазисных клеток

V_2-u_1-c_{12}=0-0-3=-3<0

V_1-u_2-c_{21}=1+1-2=0

V_4-u_2-c_{24}=0+1-0=1>0 α=1.

Таким образом, клетка (2,4) не является потенциальной. Для восстановления её потенциальности введем её в базисный набор (в общем случае эта процедура выполняется для самой не потенциальной клетки).

Для этого, обходя клетки против часовой стрелки, строим цикл, начиная с клетки (2,4), в которых каждая пара соседних клеток лежит в одной строке или в одном столбце, причем, первая и последняя клетки цикла также находятся в одной строке или столбце. Для каждой вводимой в базис клетки такой цикл будет единственный.

В цикл войдут клетки (2,4), (1,4), (1,3), (2,3). Обозначим клетки цикла поочередно знаками “+” и “-”, начиная с клетки, вводимой в базис. Тогда половина клеток цикла образует положительную цепь, другая половина - отрицательную. В отрицательной цепи выбираем минимальную перевозку x_{14}-x_{23}=5 и уменьшаем на эту величину перевозки в отрицательной цепи,

увеличиваем в положительной. Так как при этом обе перевозки в отрицательной цепи обращаются в 0, то одну из них оставляем в таблице в виде базисной. Пусть X_{14}=0.

Изменяем потенциал клетки(2,4) на α =1, уменьшив потенциал V_4, т.е

V^1_4= 24=0-1=-1.

При этом уменьшается потенциал и другой базисной клетки этого столбца (1,4). Для исправления его уменьшаем потенциал n_1 на n_{24}

$n_1=n_1-{}_{24}=0-1=-1$.

Аналогично восстанавливаем потенциалы других базисных клеток, попавших в эту строку

$V^1_1=V_1-\alpha_{24}=1-1=0;$

$V^1_3=V_3-\alpha_{24}=2-1=1;$

Тогда новый план перевозок с потенциальными новыми базисными клетками будет иметь вид

V_j / u_i	$V_1=0$	$V_2=0$	$V_3=1$	$V_4=-1$
$u_1=-1$	1 8	3	2 12	0 0
$u_2=-1$	2	1 10	3	0 5

Проверим потенциальность небазисных клеток:

$v_2-u_1-c_{12}=0+1-3=-2<0;$

$v_1-u_2-c_{21}=0+1-2=-1<0;$

$v_3-u_2-c_{23}=1+1-3=-1<0.$

Таким образом, план перевозок является потенциальным а следовательно и оптимальным с F_{min}=42. Заметим, что оставив нулевую базисную перевозку в клетке (2,3), восстановление потенциалов базисных клеток ограничивалось бы V_3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вітлінский В.В. Математичне програмування /В.В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т.О. Терещенко. – К.: КНЕУ, 2001. *Базовий підручник*.
2. Дегтярев Ю.И. Исследование операций: Учебное пособие для студентов вузов /Ю. И. Дегтярев. – М.: Высшая школа, 1979.
3. Зайченко Ю.Н. Исследование операций /Ю.Н. Зайченко. – К.: Вища школа, 1985.
4. Зайченко Ю.Н. Исследование операций: Сборник задач /Ю.Н. Зайченко, С.А. Шумилов. – К.: Вища школа, 1984.
5. Кузнецов А.В. Математическое программирование /А.В. Кузнецов, Н. И. Холод. – Минск: Вышэйш. шк., 1984.
6. Кремер Н. Ш. Исследование операций в экономике / Н. Ш. Кремер. – М.: Банки и биржи, 1997.
7. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию /И.Л.Калихман. – М.: Высшая школа, 1975.
8. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах /И.Л.Акулич. – М.: Высшая школа, 1986.
9. Мину М. Математическое программирование /М. Мину. – М.: Наука, 1990.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Бартенев Георгий Михайлович
Дук Александр Николаевич
Ткаченко Елена Георгиевна
Толстой Виктор Владимирович
Целуйко Наталья Васильевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Раздел “ Математическое программирование ”

Часть 4

Конспект лекций

Тем. план 2011, поз. 217

Подписано к печати 04.04.2011.Формат 60x84 1/16. Бумага типогр. Печать плоская.
Уч.- изд. л. 3,88. Усл. печ. л. 3,83. Тираж 100 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины
49600, г. Днепропетровск- 5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ