МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

А.Н. Дук, Е.Г. Ткаченко, Н.В. Целуйко,

Г.М. Бартенев, В.В. Толстой

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть II

Разделы: “Дифференциальное исчисление функции многих переменных”, “Интегрирование”, “Дифференциальные уравнения”

Утверждено на заседании Ученого совета академии как конспект лекций

Днепропетровск НМетАУ 2007

УДК 517 (075,8)

Дук А.Н., Ткаченко Е.Г., Целуйко Н.В. и др. Высшая математика. Часть II.: Конспект лекций. - Днепропетровск: НМетАУ, 2007. – 56 с.

Конспект лекций содержит теоретический материал по указанным разделам дисциплины «Высшая математика», излагаемый в соответствии со стандартом Министерства образования и науки Украины для студентов всех экономических специальностей, а также для студентов с проблемами здоровья.

Илл.: 2. Библиогр.: 6 назв.

Ответственный за выпуск Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенты: Е.Г. Холод, канд. техн. наук, доц. (ДУЭП)

К.У. Чуднов, канд. техн. наук, доц. (НМетАУ)

Раздел 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение 1.1. Переменная z называется функцией двух независимых переменных (аргументов) x и y, если каждой паре значений (x; y) из множества *D* соответствует одно определенное значение z.

Функция двух переменных, обозначается так z = z(x, y), z = *f (x, y)* и т.п.

Область *D* называется областью определения (существования) функции *z*. Аналогично определяются функции любого числа аргументов *u* = *u(x, y,z,...t)*. Поэтому в дальнейшем будем, как правило, рассматривать, не нарушая общности, функции двух независимых переменных.

Определение 1.2. *Частной производной* функции *z* = *f(x,* y) по независимой переменной, например x, называется производная

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad (1.1)$$

вычисленная при постоянном значении другого аргумента -y.

Поэтому частные производные находят по правилам дифференцирования функции одной переменной, считая остальные переменные константами. Можно использовать различные обозначения, частной производной:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, z_x^{'}, \frac{\partial f}{\partial x}, f_x^{'}(x, y). \qquad (1.2)$$

Аналогично определяется частная производная по переменной y.

Определение 1.3. *Полным приращением* функции *z* = *f(x, y)* в точке *M(x, y)* называется величина

$$z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y), \qquad (1.3)$$

где Δx, Δy - приращения аргументов.

Определение 1.4. Главная, линейная относительно Δx и Δy часть полного приращения функции называется *полным дифференциалом* ***dz***. Так как при малых приращениях Δx - *dx*, Δ*y* = *dy*, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \qquad (1.4)$$

Для дифференцирования сложных функций (т.е. функций, зависящих от промежуточных аргументов) используют следующие формулы:

Если z = *f(x,* y), а x = φ(t), y = ψ*(t),* то

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\,. \qquad (1.5)$$

Если z = *f(x,* y), а y = φ(x), то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\,. \qquad (1.6)$$

Если z = *f(x,* y) а x = φ(ξ,η) y = ψ(ξ,η), то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\,; \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial h} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial h} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial h}\,. \qquad (1.8)$$

Функции нескольких переменных могут иметь частные производные и дифференциалы высших порядков.

Определение 1.5. *Частными производными n-го порядка* от функции z=f(x.y) называются производные от ее частных производных (n-1)–го порядка. Так, частные производные второго порядка обозначаются так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}''(x, y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}''(x, y). \qquad (1.9\text{-}1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}= f_{yx}''(x,y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}= f_{xy}''(x,y). \quad (1.11\text{-}1.12)$$

Две последние частные производные называются *смешанными* и для непрерывных функций *f* (x, y) они совпадают. Дифференциалы высших порядков могут быть найдены по следующей символической формуле

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z\,. \quad (1.13)$$

В частности, для второго порядка получим такую зависимость

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2\,. \quad (1.14)$$

Определение 1.6. *Производной функции* z=f(x,y) в точке *M(x;y) в направлении вектора* ***l* = *MM*₁** называется предел

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{MM_1\to 0}\frac{f(M_1)-f(M)}{MM_1}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos a+\frac{\partial z}{\partial y}\cos b\,, \quad (1.16)$$

где cosα, cosβ - направляющие косинусы вектора **l**.

Определение 1.7. *Градиентом* функции *z = f(x,y)* в точке M(x;y) называется вектор, выходящий из указанной точки и имеющий своими координатами частные производные функции z :

$$\overline{gradZ}=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\,. \quad (1.17)$$

Градиент указывает направление наибольшего роста функции в данной точке.

Существует зависимость

$$\frac{\partial z}{\partial l}=np_l\,\overline{gradZ}\,. \quad (1.18)$$

Задача 1.1 Найти область определения, а также частные производные и дифференциал второго порядка функции $z=\ln(x^2+y^2-1)$.

Решение: Область определения данной функции ограничена условием $x^2+y^2-1>0$ или $x^2+y^2>1$, т.е. представляет собой множество точек плоскости, лежащих вне единичного круга.

Далее последовательно находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2-1} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2-1)}{(x^2+y^2-1)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2-1} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2(x^2-y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}-\frac{4xy}{(x^2+y^2-1)^2};$$

$$d^2z=\frac{2}{(x^2+y^2-1)^2}[(x^2+y^2-1)dx^2-4xydxdy+(x^2+y^2-1)dy^2].$$

Задача 1.2. Найти:

а) $\frac{dz}{dt}$,если $z = x^y$, $x = \ln t$, $y = \sin t$;

б) $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=u^2\ln v$, $u = y/x$, $v = x^2+y^2$;

в) dz, если $z =f(u,v)$, $u = \cos(xy)$, $v = x^5 - 7y$.

Решение:

а) $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=yx^{y-1}\frac{1}{t}+x^y\ln x\cos t=\frac{\sin t}{t}(\ln t)^{\sin t-1}+(\ln t)^{\sin t}\ln(\ln t)\cos t$;

б)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v(\frac{y}{x^2})+\frac{u^2}{v}2y=-\frac{2y^2}{x^3}\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^3}{x^2(x^2+y^2)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial y}=2u\ln v(\frac{1}{x})+\frac{u^2}{v}2y=-\frac{2y^2}{x^2}\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^3}{x^2(x^2+y^2)};$$

в) $dz=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$;

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = -y\sin(xy)dx - x\sin(xy)dy;$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = 5x^4 dx - 7dy;$$

$$dz = -f_u^{'}(u,v)\sin(xy)(ydx + xdy) + f_v^{'}(u,v)(5x^4 dx - 7dy) = (5x^4 f_u^{'}(u,v) -$$
$$- y\sin(xy) f_u^{'}(u,v))dx - (7 f_v^{'}(u,v) + \sin(xy) f_v^{'}(u,v))dy.$$

<u>Задача 1.3.</u> Найти градиент и производную по направлению вектора $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ функции u = x^2 + $2xy^3$ + $10z^2$ - 1 в точке M(-1:2:1).

Решение:

По определению

$$\overline{gradu\,|_M} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right)\Big|_M$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial a}\right|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos a + \frac{\partial u}{\partial y}\cos b + \frac{\partial u}{\partial z}\cos g\right)\Big|_M .$$

Предварительно найдем значение частных производных в точке M и направляющие косинусы вектора **a**.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = (2x + 2y^3)\big|_M = 14; \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 6xy^2\big|_M = -24;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 20z\big|_M = 20;$$

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3;$$

$$\cos a = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{2}{3};$$

$$\cos b = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|} = -\frac{2}{3};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3};$$

$$\overline{grad u}\Big|_M = 14\vec{i} - 24\vec{j} + 20\vec{k};$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}\Big|_M = 14\cdot\frac{2}{3} + (-24)\cdot(-\frac{2}{3}) + 20\cdot\frac{1}{3} = 32.$$

Раздел 2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение 2.1. **Функция F(x) называется первообразной** для функции f(x) на [a,b], если во всех точках отрезка выполняется равенство

$$F'(x)=f(x). \qquad (2.1)$$

Теорема 2.1. Если f(x**) имеет первообразную F(x)**, то она будет иметь бесконечное множество первообразных F(x)+C, отличающихся друг от друга только константой C.

Определение 2.2. Совокупность всех **первообразных функции f(x) называется неопределенным интегралом** и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (2.2)$$

Общепринятые обозначения:

f(x) – подинтегральная функция;

f(x)dx – подинтегральное выражение;

x – переменная интегрирования.

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции.

Основные свойства неопределенного интеграла:

$(\int f(x)dx)' = f(x)$, $\quad \int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$,

$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$, $\quad \int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$,

$\int dF(x)dx = F(x) + C$, $\quad$ *Если* $\int f(x)dx = F(x) + C$ *и* $u(x) = \varphi(x)$,

то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Основные формулы интегрирования

$\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	$\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$, $a>0, a\neq 1$
$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C,$	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C,$
$\int tgudu = -\ln\lvert\cos u\rvert + C,$	$\int ctgudu = \ln\lvert\sin u\rvert + C,$
$\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{u}{a} + C, a \succ 0$	$\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C, a \succ 0,$
$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C, a \neq 0,$	$\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + l}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 + l}\right\rvert + C, l \neq 0$

Основные методы интегрирования: непосредственное интегрирование, по частям, заменой переменных.

Непосредственное интегрирование заключается в представлении исходного интеграла в виде алгебраической суммы табличных интегралов.

Теорема 2.2. При интегрировании по частям используют формулу

$$\int udv = uv - \int vdu, \tag{2.3}$$

где $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ -дифференцируемые функции. Метод можно применять, если легче найти, чем исходный, например, для нахождения трансцендентных функций. Учитывая то, что интегрирование является более сложной операцией, чем дифференцирование, в подинтегральном выражении за dv следует брать легко интегрируемые выражения, например $e^x dx$, sinxdx, $\sec^2 xdx$ и т. д. В качестве u обычно берут такие функции: ln x, arcsin x, arctg x и т. д.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух типов:

x=φ(t), где φ(t)-непрерывно дифференцируемая функция по аргументу t ;

u=ψ(x), где u-новая переменная:

$$\int f[y(x)]y'(x)dx = \int f(u)du. \qquad (2.4)$$

При интегрировании рациональных дробей выполняют их преобразование к, так называемым, **простейшим (элементарным**) дробям, решение которых известно. Это дроби четырех видов :

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C,$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C,$$

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} = -\frac{A}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot I_n,$$

где A, B, a, p, q –вещественные числа; n-целое число, больше единицы; квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней; интеграл $I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ - определяется (n-1)-кратным применением рекуррентной формулы

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Особой нужды запоминать эти формулы нет, так как они приводятся к табличным интегралам путем выделения в числителе дроби производной знаменателя, а в знаменателе – полного квадрата.

Итак, интегрирование рациональных дробей проводят в следующей последовательности:

1. Выделяют целую часть (если дробь неправильная).

2. Раскладывают знаменатель правильной дроби на линейные и квадратичные множители.

3. Раскладывают правильную дробь на простейшие дроби.

4. Интегрируют простейшие дроби.

Требует пояснения третий пункт этого плана. Каждому линейному или квадратичному множителю в знаменателе правильной дроби соответствуют такие простейшие дроби:

$$\frac{1}{(x-a)^n} \to \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

$$\frac{1}{(x^2+px+q)^m} \to \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m},$$

где $A_1, A_2, \ldots, An, B_1, B_2, \ldots, B_m, C_1, C_2, \ldots, C_m$ - неопределенные коэффициенты.

Таким образом, правильная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена алгебраической суммой простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \cdots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_mx+C_m}{(x^2+px+q)^m} + \cdots$$

Для нахождения значений неопределенных коэффициентов в правой части вышеприведенного равенства, простейшие дроби приводят к общему знаменателю, приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях х в левой и правой частях тождества и решают получившуюся систему линейных уравнений.

Неопределенные коэффициенты могут быть найдены и другим способом - придавая переменной х в тождестве произвольные числовые значения столько раз, сколько коэффициентов надо определить. При этом вычисления значительно упрощаются, если в качестве переменной x брать значения корней линейных форм (x-a).

Для интегрирования различных тригонометрических функций используются те или иные подстановки, приводящие их к рациональным функциям. Рассмотрим способы интегрирования для нескольких конкретных видов подынтегральных тригонометрических функций.

1. Интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

где R – рациональная функция, определяется с помощью универсальной тригонометрической подстановки

$$tg\frac{x}{2} = t.$$

Тогда $x = 2arctgt;\quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2};\quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2};\quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}.$

Недостатком этой подстановки может быть необходимость решения рациональных уравнений высоких степеней. Поэтому для некоторых частных случаев $R(\sin x, \cos x)$ производят такие подстановки:

a) если $R(\sin x, -\cos x = -R(\sin x, \cos x),$ т.е. подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x,$ делают замену $\sin x = t;$ тогда $x = \arcsin t,\ dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}};$

b) если $R(-\sin x, \cos x = -R(\sin x, \cos x),$ т.е. функция нечетна относительно $\sin x,$ полагают $\cos x = t,$ далее $x = \arccos t,$ $dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$

c) если $R(-\sin x, -\cos x = R(\sin x, \cos x),$ т.е. функция четна одновременно относительно $\sin x,$ и $\cos x,$ заменяют $tgx = t;\quad x = arctgt;$

$$dx = \frac{dt}{1 = t^2};\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

2. Интеграл вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

определяется с помощью таких подстановок:

a) при нечетном m: $\cos x = t;$

b) при нечетном n: $\sin x = t;$

c) при четных m и n понижается степень тригонометрических функций путем использования формул:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

3. Интегралы вида:

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx,$$

$$\int \sin mx \cdot \sin nx dx,$$

$$\int \cos mx \cdot \cos nx dx$$

решаются с использованием формул:

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)];$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)];$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$

4. Интегралы вида:

$$\int tg^m x dx,$$

$$\int ctg^m x dx$$

находят с помощью замен

$$tg^2 x = \sec^2 x - 1,$$

$$ctg^2 x = \cos ec^2 x - 1.$$

При интегрировании иррациональных функций, последние, тем или иным путем сводятся к рациональным или табличным. Универсального метода решения при этом нет. Поэтому рассмотрим методы интегрирования для нескольких видов иррациональности.

1. Интеграл вида

$$\int R\left[x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, (ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right] dx,$$

где R – рациональная функция; a,b – вещественные числа; $m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots$- целые числа; сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $ax + b = t^s$, где S- наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \ldots$.

2. Интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

приводится к табличным выделением в числителе производной подкоренного выражения, а под радикалом – полного квадрата.

3. Интеграл вида

$$\int \frac{Ax+B}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$$

приводится к интегралу предшествующего вида подстановкой $x - a = \frac{1}{t}$.

4. Для перечисленных ниже видов иррациональностей используются так называемые **тригонометрические подстановки,** приводящие к интегралам от тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$:

a) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx.$

Подстановка $x = a\sin t$ или $x = a\cos t;$

b) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx.$

Подстановка $x = a \cdot tgt$ или $x = a \cdot ctgt;$

c) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx.$

Подстановка $x = a\sec t$ или $x = a\cos ect.$

Задача 2.1. Найти интегралы:

a) $\int \left(x^2 + 2\right)^2 dx;$ b) $\int x^2 \cos x dx;$ c) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}.$

Решение:

a) возводим подынтегральную функцию в квадрат и раскладываем интеграл на ряд табличных:

$$\int \left(x^2 + 2\right)^2 dx; = \int \left(x^4 + 2x^2 + 4\right)dx = \int x^4 dx + 2\int x^2 dx + 4\int dx = \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + 4x + C;$$

b) подынтегральная функция представляет собой произведение двух функций. Поэтому дважды применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x^2 \cos x dx = \begin{Bmatrix} u = x^2; dv = \cos x dx \\ du = 2x dx; v = \sin x \end{Bmatrix} = x^2 \sin x - 2\int x \sin x dx = \begin{Bmatrix} u = x; dv = \sin x dx \\ du = dx; v = -\cos x \end{Bmatrix} =$$

$$= x^2 \sin x - 2\left[-x\cos x + \int cox dx\right] = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C;$$

c) введем новую переменную $t^2 = x - 1$. Так как $x = t^2 + 1, dx = 2tdt,$ получим

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}} = \int \frac{\left(t^2 + 1\right)^3 \cdot 2tdt}{t} = 2\int \left(t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1\right)dt = 2t\left(\frac{t^6}{7} + 3\frac{t^4}{5} + 3\frac{t^2}{3} + 1\right) + C =$$

$$= 2\sqrt{x-1}\left(\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3}{5}(x-1)^2 + x - 1 + 1\right) + C = 2\sqrt{x-1}\left(\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3(x-1)^2}{5} + x\right) + C.$$

<u>Задача 2.2</u>. Проинтегрировать алгебраические дроби:

a) $\int \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$; b) $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$; c) $\int \frac{xdx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

Решение:

a) разложим знаменатель дроби на множители, решив биквадратное уравнение $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$. Получим $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$. Используем метод неопределенных коэффициентов для разложения исходной дроби на простейшие:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{(A+C)x^2 + (B+D)x^2 + (4A+C)x + 4B + D}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

Приравниваем коэффициенты при равных степенях x в правой и левой частях этого равенства:

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ D + D = 0, \\ 4A + C = 0, \\ 4B + D = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} A = 0, \\ B = \frac{1}{3}, \\ C = 0, \\ D = -\frac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{1}{3(x^2+1)} - \frac{1}{3(x^2+4)}.$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{x^4+5x^2+4}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+2^2}=\frac{1}{3}arctgx-\frac{1}{6}arctg\frac{x}{2}+C;$$

b) В этом примере корень знаменателя $x=0$ является двукратным. Поэтому при разложении дроби на простейшие ему будут соответствовать два члена:

$$\frac{1}{x^4-x^2}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x+1}=$$

$$=\frac{Ax(x+1)(x-1)+B(x-1)(x+1)+Cx^2(x+1)+Dx^2(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)}.$$

Это равенство должно соблюдаться для любых значений x. Вычисления облегчаются, если в качестве таковых взять значения корней знаменателя:

$x=0;\qquad -B=1;\qquad B=-1;$

$x=1;\qquad 2C=1;\qquad C=\frac{1}{2};$

$x=-1;\qquad -2C=1;\qquad C=-\frac{1}{2};$

$x=2;\qquad 6A-3B+12C+4B=1;\qquad A=0.$

$$\begin{cases}A=0,\\ B=-1,\\ C=\frac{1}{2},\\ D=-\frac{1}{2}.\end{cases}\qquad \int\frac{dx}{x^4-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C;$$

c) Выделим в числителе дроби производную квадратного трехчлена, в самом трехчлене – полный квадрат

$$\int\frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}=\int\frac{(2x+2)\cdot\frac{1}{2}-1}{((x+1)^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}-\int\frac{dx}{((x+1)^2+1)^2}=$$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2+2x+2\right)} - \int \frac{d(x+1)}{\left((x+1)^2+1\right)^2};$$

Для нахождения последнего интеграла используем рекуррентную формулу:

$$I_2 = \int \frac{d(x+1)}{\left((x+1)^2+1\right)^2} = \left\{\begin{matrix} t = x+1 \\ a = 1 \\ n = 2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{(x+1)+1} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x+1}{2\left((x+1)^2+1\right)} + \frac{1}{2} arctg(x+1).$$

Итак,

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+2x+2\right)} = -\frac{1}{2\left(x^2+2x+2\right)} - \frac{x+1}{2\left(x^2+2x+2\right)} - \frac{1}{2} arctg\,(x+1) + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{x^2+2x+2} + arctg(x+1)\right] + C.$$

Раздел 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разделим этот отрезок на n произвольных частей

$$a = x_0 \angle x_1 \angle x_2 \angle \ldots \angle x_n = b$$

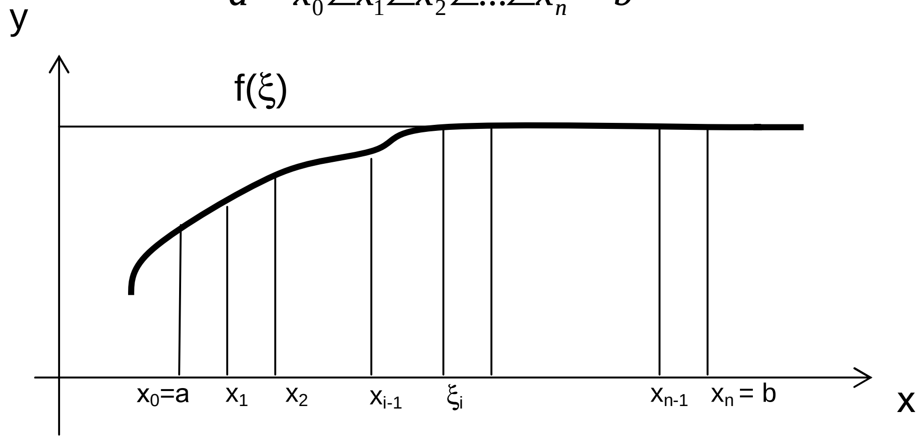

Рис 3.1.

Для каждого элементарного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ определим его длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и значение функции $f(x)$ в произвольной точке $x \in [a,b]$ (рис. 3.1).

Определение 3.1. **Интегральной суммой** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется сумма вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \,. \tag{3.1}$$

Определение 3.2. **Определенным интегралом функции** $f(x)$ на этом отрезке называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i . \tag{3.2}$$

Геометрический смысл определенного интеграла это **площадь криволинейной трапеции,** т.е. фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$,

$x = a, \;\; x = b, \;\; y = 0$ (рис. 3.1)

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{3.3}$$

<u>Теорема 3.1.</u> Достаточным условием существования определенного интеграла на отрезке $[a,b]$ является непрерывность функции $f(x)$ на этом отрезке.

Основные свойства определенного интеграла:

$$\int_a^a f(x)dx = 0,$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ где с} \in [a,b],$$

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx,$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \text{ где С - постоянная.}$$

Для нахождения значения определенного интеграла используется формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{3.4}$$

где $F(x)$-первообразная функции $f(x)$.

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла выглядит так

$$\int_a^b udv = uvuv\Big|_a^b - \int_a^b vdu\ . \tag{3.5}$$

При замене переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(j(t))j'(t)dt, \tag{3.6}$$

где новые значения пределов α и β определяются из соотношений $a = j(a)$ и $b = j(b)$, а функция $x = j(t)$ и ее производная $j'(t)$ непрерывны на $[a, b]$.

Если $f(x)$-четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Если $f(x)$-нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Определенный интеграл используется для определения объема тела, образованного вращением дуги кривой $y = f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ вокруг оси Ox

$$V = p\int_{x_1}^{x_2} j^2(x)dx \tag{3.7}$$

или кривой $x = y(y), y \in [y_1, y_2]$ вокруг оси Oy

$$V = p\int_{y_1}^{y_2} j^2(y)dy\ . \tag{3.8}$$

<u>Определение 3.3.</u> Интегралом с бесконечными пределами называется его предел, если последний существует и конечен:

$$\int_a^{\div\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{3.9}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{3.10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)dx\ . \tag{3.11}$$

Определение 3.4. Если функция $f(x)$ в точке $c\in[a,b]$ имеет разрыв II рода и непрерывна во всех остальных точках этого отрезка, то

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{a\to 0}\int_a^{c-a} f(x)dx+\lim_{b\to 0}\int_{c+b}^{b} f(x)dx, \qquad (3.12)$$

если эти пределы существуют и конечны.

Определение 3.5. Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от разрывных функций называются **несобственными.**

Определение 3.6. Если приведенные выше пределы конечны, то несобственные интегралы называются **сходящимися,** если это условие не выполняется - **расходящимися.**

Задача 3.1. Вычислить:

а) $\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt[3]{\cos x}\sin xdx$; в) $\int_0^{\frac{p}{2}}\left(x^2+5x+6\right)\sin 3xdx$; c) $\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

Решение:

а) $\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt[3]{\cos x}\sin xdx=-\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^{\frac{1}{3}}xd\cos x=-\frac{3}{4}\cos^{\frac{4}{3}}x\Big|_0^{\frac{p}{2}}=-\frac{3}{4}\left(\cos^{\frac{4}{3}}\frac{p}{2}-\cos^{\frac{4}{3}}0\right)=\frac{3}{4}$;

b) интегрируем по частям:

$$\int_0^{\frac{p}{2}}\left(x^2+5x+6\right)\sin 3xdx=\left\{\begin{matrix}u=x^2+5x+6; dv=\sin 3xdx\\ du=(2x+5)dx; v=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right\}=$$

$$=2+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin 3x(2x+5)\Big|_0^{\frac{p}{2}}-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{p}{2}}\sin 3xdx\right]=2+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(-p+5)+\frac{2}{9}\cos 3x\Big|_0^{\frac{p}{2}}\right]=\frac{67}{27}-\frac{p}{9};$$

c)

$$\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}-1}=\left\{\begin{matrix}x=t^2\\ dx=2tdt\\ a=\sqrt{4}=2\\ b=\sqrt{9}=3\end{matrix}\right\}=\int_2^3\frac{2tdt}{t-1}=2\int_2^3\frac{t-1+1}{t-1}dt=2\int_2^3\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt=2\left[t\Big|_2^3+\ln(t-1)\Big|_2^3\right]=2(1+\ln 2).$$

Задача 3.2. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 4 - x^2; y = 0.$

Решение:

Для определения границ интегрирования решим систему

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 4 - x^2, \end{cases}$$

откуда $x_1 = -2, x_2 = 2$ (рис. 3.2.)

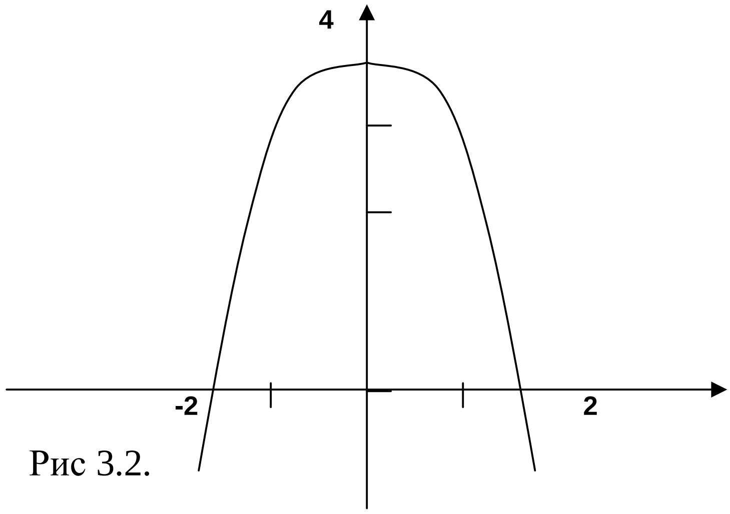

Рис 3.2.

Тогда

$$S = \int_{-2}^{2}\left(4x - x^2\right)dx = 2\int_{0}^{2}\left(4x - x^2\right)dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{32}{3} \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

Задача 3.3. Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и } y = \pm b.$$

Решение

Из уравнения гиперболы определяем

$$x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Тогда объем тела, образованного вращением части гиперболы вокруг оси Oy в пределах от $y = -b$ до $y = b$ равен

$$V = p\int_{-b}^{b} a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2pa^2\int_{0}^{b}\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)dy = 2pa^2\left(y+\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b = \frac{8pa^2b}{3}\text{ (ед.}^3\text{)}.$$

Задача 3.4. Вычислить несобственный интеграл или показать, что он расходится:

a) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$; в) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$; c) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; d) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^n}$.

Решение

a) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = 0+1=1;$

b) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b = \infty - 0 = \infty$ -интеграл расходится;

c) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{b\to\infty}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^b = 2(\infty-1)=\infty$ - интеграл расходится;

d) $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{1}{1-n}\left(a^{1-n}-1\right)\Bigg|_1^b.$

Как показано в пунктах в) и с) при $n<1$ интеграл расходится. Если n>1 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}$.

Раздел 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется соотношение вида

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0, \tag{4.1}$$

связывающее независимую переменную x, ее функцию $y=y(x)$ и ее производные $y',...,y^{(n)}$.

Если независимая переменная одна, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Если в уравнение входит несколько независимых переменных, то такое дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Например:

$y'' + 2y' - y = 0$ - дифференциальное уравнение второго порядка;

$(y''')^2 - 2xy = 0$ - дифференциальное уравнение третьего порядка.

Решением дифференциального уравнения (1) называется ***n*** раз дифференцируемая функция $y=y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

В простейших случаях задача отыскания решений дифференциального уравнения в конечном итоге сводится к вычислению интегралов. Поэтому процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием этого уравнения, а график решения $y=f(x)$ называется интегральной кривой дифференциального уравнения.

Так как при интегрировании функций получают множество решений, отличающихся друг от друга константами, то и дифференциальное уравнение имеет множество решений, которые графически изображаются семейством интегральных кривых.

В связи с этим возникает понятие общего и частного решений дифференциального уравнения.

Общим решением (общим интегралом) дифференциального уравнения ***n***-

го порядка называется его решение, явно (неявно) выраженное относительно функции y и содержащее $\boldsymbol{n}$ независимых произвольных постоянных:

$$y=f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n), \tag{4.2}$$

$$F(x,y, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0. \tag{4.3}$$

Независимость произвольных постоянных означает, что ни одну из них нельзя выразить через другие, тем самым уменьшив их число.

Частным решением (частным интегралом) дифференциального уравнения $\boldsymbol{n}$-го порядка называется такое его решение, в котором произвольным постоянным приданы конкретные числовые значения.

Эти конкретные числовые значения находят из решения системы начальных условий:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}{}_0. \end{cases} \tag{4.4}$$

В правой части системы (4.4) стоят некоторые постоянные, а не производные.

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения по его общему решению, удовлетворяющему заданным начальным условиям, называется задачей Коши.

4.1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В общем виде дифференциальное уравнение первого порядка записывается следующим образом:

$$F(x,y,y')=0. \tag{4.5}$$

Если уравнение (4.5) может быть выражено относительно y', то получают так называемое дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной y':

$$y' = f(x,y) . \tag{4.6}$$

Дифференциальное уравнение (4.6) всегда можно записать в дифференциальной форме:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy=0. \tag{4.7}$$

Дифференциальные уравнения первого порядка (4.5-4.7) в частном случае могут не содержать переменную x или функцию y, но обязательно включают производную y'.

Рассмотрим основные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

4.1.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$f_1(x) \cdot j_1(y)dx + f_2(x) \cdot j_2(y)dy = 0, \tag{4.8}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - некоторые функции, зависящие только от x, а $j_1(y)$ и $j_2(y)$ - только от y.

Разделив обе части уравнения (4.8) на $f_2(x) \cdot j_1(y)$, получим

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{j_1(y)}{j_2(y)}dy = 0.$$

В левой части этого уравнения первое слагаемое зависит только от x, второе – только от y. Тогда их можно рассматривать как дифференциалы некоторых функций $F(x)$ и $\Phi(y)$ соответственно. Неопределенные интегралы от этих дифференциалов будут отличаться друг от друга постоянными слагаемыми:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{j_1(y)}{j_2(y)}dy = C. \tag{4.9}$$

$$F(x) + \Phi(y)=\boldsymbol{C}. \tag{4.10}$$

Соотношения (4.9) и (4.10) являются общими интегралами исходного дифференциального уравнения.

Задача 4.1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $ydx - xdy = 0$.

Решение:

$$ydx = xdy.$$

Разделив обе части уравнения на произведение $x \cdot y$ и проинтегрировав их, получаем:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y};$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\ln|x| = \ln|y| - \ln|C|;$$

$$\ln|y| = \ln|Cx|;$$

$$y = Cx.$$

4.1.2 Однородные дифференциальные уравнения

Функция $f(x, y)$ называется однородной функцией ***n**-го* порядка относительно переменных x и y, если для произвольного t, отличного от нуля, справедливо тождество

$$f(tx,ty)=t^n \cdot f(x,y).$$

Например, функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$ - однородная функция третьей степени.

Однородным называется дифференциальное уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy=0,$$

если $P(x, y)$, $Q(x, y)$ - однородные функции одинакового порядка.

Определение однородного дифференциального уравнения можно также сформулировать следующим образом.

Дифференциальное уравнение

$$y'=f(x,y). \tag{4.11}$$

называется однородным, если его правая часть – функция $f(x,y)$, -

однородная функция нулевого порядка относительно своих аргументов.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $t = y/x$ (или $y=tx$).

Действительно, пусть уравнение $y'=f(x,y)$ является однородным дифференциальным уравнением нулевого порядка, т.е. $f(tx,ty)=f(x,y)$. Положив $t=1/x$, получим:

$$f(x,y)=f(tx,ty)=f(x/x,y/x)=f(1,y/x)=\varphi(y/x).$$

Значит, однородную функцию нулевого порядка $f(x,y)$ можно представить как функцию $\varphi(y/x)$ одного аргумента y/x. Обозначив его как $t = y/x$, получим $y= tx$ и $y'=t'x+t$.

При этом (4.11) принимает вид

$$t'x+t=\varphi(t).$$

Отсюда $\dfrac{dt}{dx}\cdot x=\varphi(t)-t$,

$$\frac{dt}{\varphi(t)-t}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dt}{\varphi(t)-t}=\int\frac{dx}{x}+C.$$

Таким образом, получен общий интеграл относительно переменной t. Подставляя в него вместо t отношение y/x, получим общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Задача 4.2. Проинтегрировать уравнение

$$(x^2-y^2)dx + xydy = 0.$$

Решение:

Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-x^2}{xy};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}.$$

Обозначив $t = y/x$, получим с четом $y= tx$ и $y'=t'x+t$:

$$t'x+t=t-\frac{1}{t};$$

$$\frac{dt}{dx}x=-\frac{1}{t};$$

$$\int tdt=-\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{t^2}{2}=-\ln|x|+\ln|C|;$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=2\ln\left|\frac{C}{x}\right|;$$

$$y^2=2x^2\ln\left|\frac{C}{x}\right|.$$

4.1.3 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (4.12)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$.

Необходимым и достаточным условием того, что уравнение (4.12) будет дифференциальным уравнением в полных дифференциалах, является выполнение равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (4.13)$$

Действительно, если левая часть уравнения (4.12) есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, то

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (4.14)$$

По определению, полный дифференциал функции $u(x,y)$ записывается в виде

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy. \qquad (4.15)$$

Сравнивая (4.14) и (4.15), можно утверждать, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \tag{4.16-4.17}$$

Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Для непрерывно дифференцируемых функций *P(x, y)* и *Q(x, y)* смешанные производные второго порядка равны между собой, что и приводит к равенству (4.13).

Итак, исходное уравнение (4.12) с учетом (4.14) можно представить так:

$$du(x,y)=0. \tag{4.18}$$

Его решение

$$u(x,y)=C. \tag{4.19}$$

Для отыскания функции *u(x,y)* следует воспользоваться соотношениями (4.16) или (4.17). Так, из (4.16)

$$\mathrm{u(x, y)} = \int P(x, y)dx + j\,(y). \tag{4.20}$$

Чтобы найти функцию $j\,(y)$, продифференцируем обе части уравнения (4.20) по переменной **y** и подставим в уравнение (4.17):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx + j\,'(y) \equiv Q(x, y).$$

Тогда $j\,'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx$.

Или, поменяв местами операции интегрирования и дифференцирования:

$$j\,'(y) = Q(x, y) - \int \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}dx.$$

Отсюда $$j\,(y) = \int (Q(x, y) - \int \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}dx)dy. \tag{4.21}$$

Итак, общее решение дифференциального уравнения (4.19) с учетом (4.20) и (4.21) будет иметь вид:

$$\int P(x,y)dx+\int (Q(x,y)-\int \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx)dy=C.$$

Замечание. При отыскании функции $u(x,y)$ порядок действий можно поменять, т.е. сначала найти решение, удовлетворяющее условию (4.17), а затем - (4.16).

Задача 4.3. Решить дифференциальное уравнение
$3x^2e^y dx+(x^3e^y-1)dy=0$ при начальном условии: $y(1)=0$.

Решение:

Это дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, т.к. при $P(x,y)=3x^2e^y$ и $Q(x,y)=(x^3e^y-1)$ частные производные $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=3x^2e^y$ и $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=3x^2e^y$ равны между собой. Полагая $\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$, найдем

$$u(x,y)=\int 3x^2e^y dx=x^3e^y+j(y).$$

Тогда $\frac{\partial u}{\partial y}=x^3e^y+j'(y)=x^3e^y-1$ или $j'(y)=-1$, т.е. $j(y)=-y+C_1$.

Итак, $\mathrm{u(x,y)}=x^3e^y-y+C_1$. Общее решение исходного дифференциального уравнения принимает вид

$x^3e^y-y+C_1=C_2$ или $x^3e^y-y=C$, где $C=C_2-C_1$.

С учетом начального условия частное решение будет выглядеть так:

$C=1^3\cdot e^0-0=1$, т.е.

$x^3e^y-y=1$.

4.1.4 Дифференциальные уравнения, приводимые к уравнениям в полных дифференциалах

В ряде случаев условие $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ может не выполняться, однако исходное дифференциальное уравнение может быть приведено к уравнению в полных дифференциалах с помощью так называемого интегрирующего множителя μ. Этот множитель является функцией только одной переменной - x или y, и определяется следующим образом.

Если отношение

$$\frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)}$$

является функцией только x, то и интегрирующий множитель будет зависеть только от x и находиться по формуле

$$m=e^{\int\frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{Q(x,y)}dx}.$$

Аналогично, если отношение

$$\frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{P(x,y)}$$

зависит только от y, то интегрирующий множитель равен

$$m=e^{-\int\frac{\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}}{P(x,y)}dy}.$$

Тогда такие уравнения к рассматриваемому типу приводятся умножением на так называемый интегрирующий множитель, который, в общем случае, является функцией только x или y.

Если у некоторого уравнения существует интегрирующий множитель, зависящий только от x, то он определяется по формуле

$$m=e\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx,$$

где отношение $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ должно быть только функцией x.

Аналогично, интегрирующий множитель, зависящий только от y, определяется по формуле

$$m = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy}.$$

<u>Задача 4.4.</u> Решить дифференциальное уравнение $ydx - (x + y^2)dy = 0$.

Решение:

У нас

$$P(x, y) = y,\; Q(x, y) = -(x + y^2),\; \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1,\; \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -1;\; \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Однако, $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} = \dfrac{2}{y} = f(y)$. Следовательно, интегрирующий множитель

$$m = e^{-\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P} dy} = e^{-2\ln|y|} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}.$$

После умножения исходного дифференциального уравнения на этот множитель, получим

$$\frac{dx}{y} = \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0.$$

Здесь

$$P(x, y) = \frac{1}{y},\; Q(x, y) = \frac{-(x + y^2)}{y^2},\; \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2},\; \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{y^2},$$

т.е. получившееся уравнение уже является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах. Для него

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + j(y) = \int \frac{1}{y} dx + j(y) = \frac{x}{y} + j(y);$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + j'(y) = -\frac{x}{y^2} - 1 \equiv Q(x, y).$$

Тогда $j'(y) = -1$; $j(y) = -y + C_1$. Значит, $u(x, y) = \dfrac{x}{y} - y + C_1$ и общий интеграл заданного дифференциального уравнения

$$\frac{x}{y} - y + C_1 = C_2 \quad \text{или} \quad \frac{x}{y} - y = C, \quad \text{где} \quad C = C_2 - C_1 .$$

4.1.5 Линейные дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{4.22}$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка, если оно линейно относительно искомой функции *y,* ее производной *y'* и не содержит их произведения.

Здесь *P(x)* и *Q(x)* – некоторые функции, зависящие только от независимой переменной *x*.

Если в соотношении (4.22) правая часть *Q(x)= 0*, то такое уравнение называется линейным однородным.

В случае, когда правая часть $Q(x)\neq 0$, то такое уравнение называется линейным неоднородным.

Уравнение (4.22) может быть решено несколькими методами.

4.1.5.1 Метод вариации произвольной постоянной

В соответствии с этим методом, известным также как метод Лагранжа, сначала ищется решение однородного дифференциального уравнения

$$y' + P(x)y = 0 . \tag{4.23}$$

Это уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x) \cdot y \ ;$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \ ;$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C| \ ;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx.$$

$$y_{oo} = C \cdot e^{-\int P(x)dx}, \tag{4.24}$$

где y_{oo} – общее решение однородного дифференциального уравнения;

C – произвольная постоянная.

Для отыскания $y_{он}$ - общего решения линейного неоднородного уравнения (4.22) предположим, что это решение будет выглядеть как и решение однородного уравнения, но в нем произвольная постоянная C заменяется некоторой функцией от x**:** $C(x)$. Тогда задача отыскания $y_{он}$ сводится к определению этой функции $C(x)$.

Итак

$$y = C(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}; \tag{4.25}$$

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}. \qquad 4.26)$$

Подставляя (4.25) и (4.26)в соотношение (4.22), получим:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + C(x) \cdot P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

$$C'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx};$$

$$C(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C. \tag{4.27}$$

Подставляя (4.27) в (4.25), получим:

$$y_{он} = \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C\right] \cdot e^{-\int P(x)dx}. \tag{4.28}$$

Соотношение (4.28) является общим решением линейного неоднородного уравнения первого порядка (4.22). Как видно из этого равенства, оно состоит из двух частей:

а) $\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx\cdot e^{-\int P(x)dx}$ - общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения;

б) $C_1\cdot e^{-\int P(x)dx}$ - частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Задача 4.5. Проинтегрировать уравнение $y' - 2y = e^{2x}$.

Решение:

Заданное уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением.

Сначала решим однородное дифференциальное уравнение, соответствующее заданному.

$$y' - 2y = 0\ ;$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y\ ;$$

$$\frac{dy}{y} = 2dx\ ;$$

$$\ln|y| = 2x + \ln|C|\ ;$$

$$y_{oo} = Ce^{2x}\ .$$

Теперь найдем решение неоднородного дифференциального уравнения, полагая в решении однородного $C=C(x)$:

$$y = C(x)\cdot e^{2x}\ ;$$

$$y' = C'(x)\cdot e^{2x} + 2C(x)\cdot e^{2x}\ .$$

Подставляя эти значения в исходное уравнение, получим:

$$C'(x)\cdot e^{2x} + 2C(x)\cdot e^{2x} - 2C(x)\cdot e^{2x} = e^{2x}\ ;$$

$$C'(x) = 1\ ;$$

$$C(x) = x + C_1\ .$$

Тогда

$$y_{он} = (x + C_1)\cdot e^{2x}\ .$$

4.1.5.2 Метод подстановки

В соответствии с этим методом, известным также как метод Бернулли, будем искать решение сразу неоднородного дифференциального уравнения (4.22) в виде произведения двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$, т.е.

$$y = u \cdot v. \tag{4.29}$$

Одну из этих функций можно выбрать произвольно, а другую надо определить таким образом, чтобы их произведение обращало заданное уравнение в тождество.

С учетом (4.29) вычислим производную и подставим найденные значения в исходное уравнение (4.22):

$$\begin{aligned} &y' = u' \cdot v + u \cdot v'; \\ &u' \cdot v + u \cdot v' + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x); \\ &u \cdot v' + v\left(u' + P(x) \cdot u\right) = Q(x). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Выберем одну из функций, а именно u, так, чтобы последнее уравнение имело более простой вид. Это получится, если выражение в скобках обратится в ноль:

$$u' + P(x) \cdot u = 0 .$$

Тогда

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx \ ;$$

$$\ln|x| = -\int P(x)dx + \ln|C| \ ;$$

$$u = C \cdot e^{-\int P(x)dx} \ .$$

В качестве u можно брать любое частное значение, отличное от нуля, в частности

$$u = e^{-\int P(x)dx}. \tag{4.31}$$

При таком значении функции u, уравнение (4.30) примет вид:

$$
\begin{aligned}
&u \cdot v' = Q(x)\ ;\\
&e^{-\int P(x)dx} \cdot v' = Q(x)\ ;\\
&v' = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\ ;\\
&v = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} + C.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Подставляя (4.31) и (4.32) в (4.29), получим общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y_{он} = (\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} + C) \cdot e^{-\int P(x)dx}. \tag{4.33}$$

Итак, решения (4.28) и (4.33) заданного дифференциального уравнения (4.22), полученные различными методами, совпали. Кроме того, ни один из этих методов не является проще другого, так как и в одном, и в другом случае задача сводится к интегрированию одних и тех же функций.

<u>Задача 4.6.</u> Проинтегрировать уравнение $y' - 2y = e^{2x}$.

Решение:

Полагаем $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ и наше уравнение принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&u' \cdot v + u \cdot v' - 2 \cdot u \cdot v = e^{2x}\ ;\\
&u \cdot v' + v(u' - 2 \cdot u) = e^{2x}\ .
\end{aligned}
$$

Функцию u определим как частное решение уравнения

$$
\begin{aligned}
&u' - 2 \cdot u = 0\ ;\\
&\frac{du}{u} = 2dx\ ;\\
&\ln|u| = 2x + \ln|C|\ ;\\
&u = C \cdot e^{2x}\ ;\\
&u = e^{2x}\ .
\end{aligned}
$$

При таком значении u выражение в скобках обращается в ноль и наше уравнение будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
&e^{2x} \cdot v' = e^{2x}\ ;\\
&v' = 1\ ;\\
&v = x + C\ .
\end{aligned}
$$

Тогда

$$y_{он} = u \cdot v = (x + C) \cdot e^{2x} \ .$$

4.1.6 Уравнение Бернулли

Так называется дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{m} \ , \qquad (4.34)$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$.

При $m=0$ уравнение (4.34) превращается в линейное неоднородное уравнение, при $m = 1$ - в линейное однородное.

Такое уравнение приводится к линейному неоднородному уравнению. Для этого разделим обе части уравнения (4.34) на y^{m}:

$$y^{-m} \cdot y' + P(x) \cdot y^{1-m} = Q(x) \ . \qquad (4.35)$$

Обозначим $z = y^{1-m}$. Тогда $z' = (1-m) \cdot y^{-m} \cdot y'$. С учетом этих значений уравнение (4.35) будет выглядеть так:

$$\frac{1}{1-m} \cdot z' + P(x) \cdot z = Q(x) \ .$$

На практике уравнение Бернулли решается чаще не сведением к линейным уравнениям, а использованием подстановки Бернулли $y = u(x) \cdot v(x)$.

Задача 4.7. Решить дифференциальное уравнение $y' \cdot x + y = -x \cdot y^2$.

Решение:

Это уравнение Бернулли. Для его решения используем подстановку $y = u \cdot v$. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ и исходное уравнение принимает вид:

$$(u' \cdot v + u \cdot v') \cdot x + u \cdot v = -x \cdot u^2 \cdot v^2 \ ;$$
$$u' \cdot v \cdot x + u \cdot v' \cdot x + u \cdot v = -x \cdot u^2 \cdot v^2 \ ;$$
$$u \cdot v' \cdot x + v \cdot (u' \cdot x + u) = -x \cdot u^2 \cdot v^2 \ .$$

Найдем функцию u из условия

$$u' \cdot x + u = 0 \ ;$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \ ;$$

$$\ln|u| = -\ln|x| + \ln|C| \ ;$$

$$u = \frac{C}{x} \ .$$

Возьмем частное решение при $C=1$, т.е. $u = \frac{1}{x}$.

При таком значении функции u уравнение будет иметь вид:

$$\frac{1}{x} \cdot v' \cdot x = -x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot v^2 \ ;$$

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{dx}{x} \ ;$$

$$-\frac{1}{v} = -\ln|x| - \ln|C| \ ;$$

$$\frac{1}{v} = \ln|C \cdot x| \ ;$$

$$v = \frac{1}{\ln|C \cdot x|} \ .$$

Тогда, окончательно, решение дифференциального уравнения выглядит так:

$$y = u \cdot v = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln|C \cdot x|} = \frac{1}{x \cdot \ln|C \cdot x|} \ .$$

4.2 ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Линейным дифференциальным уравнением ***n***-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) \cdot y = f(x) \ ,$$

где коэффициенты a_i, $i = \overline{1, n}$ - некоторые функции от **x** или константы.

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется однородным.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется неоднородным.

Мы будем рассматривать дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

4.2.1 Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

В общем виде это дифференциальное уравнение выглядит так:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{4.36}$$

Любое решение дифференциального уравнения (4.36), представленное в виде $y=f(x)$ называется частным решением.

Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения (4.36) на интервале $(a;b)$ называется совокупность двух его частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, определенных и линейно-независимых на этом интервале.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми на интервале $(a;b)$, если их линейная комбинация

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$$

только при значениях коэффициентов $a_1 + a_2 = 0$.

Вопрос о том, будут ли функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно-зависимыми или линейно-независимыми решается с помощью определителя Вронского.

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - две дифференцируемые функции, то определитель

$$W(x) = W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского или вронскианом этих функций.

Теорема 4.1. Для того, чтобы две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ были линейно независимыми на интервале $(a;b)$, необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского на этом интервале был отличен от нуля.

Следствие. Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы, если они пропорциональны:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = l \text{ , где } l = const .$$

Если известна фундаментальная система решений дифференциального уравнения второго порядка, т.е. функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то структура общего интеграла этого уравнения определяется с помощью следующей теоремы.

Теорема 4.2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка на интервале *(a;b)*, то их линейная комбинация

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

и будет общим решением заданного дифференциального уравнения на указанном интервале.

Задача 4.8. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Решение:

Покажем, что функции $y_1(x) = e^{-x}$ и $y_2(x) = e^{-3x}$ образуют фундаментальную систему решений заданного уравнения. Для этого они должны быть линейно независимыми, т.е. их вронскиан должен быть не равен нулю:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-3x} \\ -e^{-x} & -3e^{-x} \end{vmatrix} = -3e^{-4x} + e^{-4x} = -2e^{-4x} \neq 0 \ \forall \ x \in R .$$

Следовательно, линейная комбинация этих функций является общим решением исходного уравнения:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

Итак, чтобы найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (4.36), надо найти его два линейно независимые частные решения.

Будем искать эти частные решения в виде

$$y = e^{kx}, \tag{4.37}$$

где κ=const.

Выбор такого вида частного решения уравнения (4.36) основывается на том, что функция $y=e^{kx}$ определена на всем множестве вещественных чисел, т.е. $x\in(-\infty;\infty)$, и имеет производную любого порядка. Кроме того, эта функция ни в одной точке числовой оси не обращается в нуль.

Найдем для функции (4.37) производные первого и второго порядков и подставим эти значения в уравнение (4.36):

$$y' = k \cdot e^{kx};$$
$$y'' = k^2 \cdot e^{kx};$$
$$k^2 \cdot e^{kx} + a_1 \cdot k \cdot e^{kx} + a_2 \cdot e^{kx} = 0;$$
$$e^{kx} \cdot (k^2 + a_1 \cdot k + a_2) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0 \ \forall \ x \in R$, то это уравнение имеет решение если

$$k^2 + a_1 \cdot k + a_2 = 0. \qquad (4.38)$$

Уравнение (4.38) называется характеристическим уравнением исходного дифференциального уравнения. Его корни определяются соотношением

$$k_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

При этом возможны три случая:

1) корни характеристического уравнения действительные и различные, т.е. $k_1 \neq k_2$;

2) корни характеристического уравнения действительны и равные, т.е. $k_1 = k_2$;

3) корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные, т.е. $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$, где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, $b \neq 0$.

Рассмотрим последовательно эти случаи.

1. Корни характеристического уравнения действительные и различные.

Тогда частные решения исходного дифференциального уравнения принимает вид:

$$y_1 = e^{k_1 x}; \qquad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (4.36) записывается так

$$y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x}.$$

Задача 4.9. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 3y' - 4y = 0$.

Решение:

Составим характеристическое уравнение, заменив производные соответствующими степенями, а саму функцию y - единицей:

$$k^2 + 3 \cdot k - 4 = 0;$$
$$k_1 = 1, \qquad k_2 = -4.$$

Этим вещественным и различным корням отвечают линейно независимые частные решения заданного дифференциального уравнения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-4x}$.

Тогда общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{-4x}.$$

2. Корни характеристического уравнения действительны и равные.

Пусть $k_1 = k_2 = k$. Тогда частные решения имеют вид:

$$y_1 = e^{kx}; \qquad y_2 = x \cdot e^{kx}.$$

Нетрудно убедиться, что y_1 и y_2 являются линейно независимыми функциями:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x \cdot e^{kx}}{e^{kx}} = x \neq const.$$

В таком случае общее решение дифференциального уравнения принимает вид:

$$y = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot x \cdot e^{kx}.$$

Задача 4.10. Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение:

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2\cdot k + 1 = 0;$$
$$(k-1)^2 = 0;$$
$$k_1 = k_2 = 1.$$

Тогда $y_1 = e^x$, $y_2 = x\cdot e^x$ и общее решение

$$y = C_1\cdot e^x + C_2\cdot x\cdot e^x = e^x\cdot (C_1 + C_2\cdot x).$$

3. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные.

Пусть $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$. В этом случае частные решения представляются в виде

$$y_1 = e^{a\cdot x}\cdot \cos(bx);$$
$$y_2 = e^{a\cdot x}\cdot \sin(bx).$$

Тогда общее решение записывается как

$$y = e^{a\cdot x}\cdot (C_1\cdot \cos(bx) + C_2\cdot \sin(bx)).$$

<u>Задача 4.11.</u> Решить дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + 5y = 0$ при начальных условиях $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$.

Решение:

Решим характеристическое уравнение

$$k^2 - 2\cdot k + 5 = 0;$$
$$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2\cdot i.$$

Значит, $y_1 = e^x\cdot \cos(2x)$; $y_2 = e^x\cdot \sin(2x)$ и общее решение

$$y = e^x\cdot (C_1\cdot \cos(2x) + C_2\cdot \sin(2x)).$$

Используем начальные условия для определения C_1 и C_2. Найдем y':

$$y' = e^x\cdot (C_1\cdot \cos(2x) + C_2\cdot \sin(2x)) + e^x\cdot (-2\cdot C_1\cdot \sin(2x) + 2\cdot C_2\cdot \cos(2x)) =$$
$$= e^x\cdot [(C_1 + 2\cdot C_2)\cdot \cos(2x) + (C_2 - 2\cdot C_1)\cdot \sin(2x)];$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 1; \\ y'(0) = C_1 + 2\cdot C_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, есть

$$y = e^{x} \cdot (\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x)) .$$

4.2.2 Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

В общем виде это уравнение выглядит так:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \tag{4.39}$$

где a_1, a_2 – постоянные коэффициенты, $f(x) \neq 0$.

Структура общего решения уравнения (4.39) определяется в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 4.3. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами есть сумма любого его частного решения $\tilde{y}(x)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$y(x) = \tilde{y}(x) + C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x). \tag{4.40}$$

Возможность нахождения решения (4.40) для дифференциального уравнения (4.39) определяется следующей теоремой.

Теорема 4.4. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (4.39) в некоторой области может быть определено, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

При отыскании частных решений уравнения (4.39) следует иметь в виду следующую теорему.

Теорема 4.5. Если функция $\tilde{y}_1$ является решением уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) ,$$

а функция $\tilde{y}_2$ - решением уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x) \ ,$$

то функция $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ будет решением уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x) \ .$$

В общем случае, отыскание частного решения $\tilde{y}$ неоднородного дифференциального уравнения представляет собой непростую задачу, которая может быть решена следующими методами.

4.2.2.1 Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Пусть известно общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (4.39):

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 . \tag{4.41}$$

Полагая в равенстве (4.41) $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$, будем искать сразу общее решение неоднородного дифференциального уравнения (4.39):

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2 . \tag{4.42}$$

Неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в уравнении (4.42) определяются с помощью следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot y_1 + C_2'(x) \cdot y_2 = 0; \\ C_1'(x) \cdot y_1' + C_2'(x) \cdot y_2' = f(x). \end{cases} \tag{4.43}$$

Итак, для решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом Лагранжа следует придерживаться такого плана.

1.Найти общее решение соответствующего однородного уравнения.

2.Записать общее решение неоднородного дифференциального уравнения в форме общего решения однородного, заменив постоянные коэффициенты C_i функциями $C_i(x)$.

3.Составить и решить систему (4.43).

4.Подставить найденные значения $C_i(x)$ в уравнение (4.42) для получения общего решения неоднородного дифференциального уравнения.

Замечания к методу Лагранжа.

1. В виде (4.42) можно искать и частное решение неоднородного дифференциального уравнения, придавая при интегрировании системы (4.43) константам C_1 и C_2 произвольные значения, в частности $C_1 = C_2 = 0$. Тогда следует применять теорему 4.3.

2. Метод Лагранжа может быть применен и в том случае, если коэффициенты дифференциального уравнения не являются константами, т.е. $a_1(x)$ и $a_2(x)$.

Задача 4.12. Решить дифференциальное уравнение $y'' - y' = e^{2x} \cdot \sin(e^x)$.

Решение:

1. Решаем однородное дифференциальное уравнение:

$$y'' - y' = 0;$$
$$k^2 - k = 0;$$
$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1;$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^x;$$
$$y_{oo} = C_1 + C_2 \cdot e^x.$$

2. Полагая $C_1 = C_1(x)$ и $C_2 = C_2(x)$, будем искать общее решение неоднородного дифференциального уравнения в виде

$$y_{он} = C_1(x) + C_2(x) \cdot e^x$$

3. Для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ решаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) \cdot e^x = 0; \\ C_1'(x) \cdot 0 + C_2'(x) \cdot e^x = e^{2x} \cdot \sin(e^x). \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим:

$$C_1'(x) = -e^{2x} \cdot \sin(e^x).$$

Отсюда

$$C_1(x) = -\int e^{2x} \cdot \sin(e^x)dx = \left\{ t = e^x \right\} = -\int t \cdot \sin(t)dt = \left\{ \begin{matrix} u = t; & dv = \sin(t)dt \\ du = dt; & v = -\cos(t) \end{matrix} \right\} =$$

$$= t \cdot \cos(t) - \int \cos(t)dt = t \cdot \cos(t) - \sin(t) + C_1 = e^x \cdot \cos(e^x) - \sin(e^x) + C_1 \ .$$

Из второго уравнения системы

$$C_2'(x) = e^x \cdot \sin(e^x) \ ;$$

$$C_2(x) = \int e^x \cdot \sin(e^x)dx = \int \sin(e^x)de^x = -\cos(e^x) + C_2 \ .$$

Итак, мы получили решение системы:

$$\begin{cases} C_1(x) = e^x \cdot \cos(e^x) - \sin(e^x) + C_1 \ ; \\ C_2(x) = -\cos(e^x) + C_2 \ . \end{cases}$$

4. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{он} = e^x \cdot \cos(e^x) - \sin(e^x) + C_1 - e^x \cdot \cos(e^x) + C_2 \cdot e^x = C_1 + C_2 \cdot e^x - \sin(e^x) \ .$$

4.2.2.2 Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотренный в предыдущем разделе метод вариации произвольной постоянной является универсальным методом и может быть применен к любому виду правой части, т.е. функции $f(x)$.

В ряде случаев дифференциальное уравнение (4.39) может быть решено чисто алгебраическими методами без применения аппарата интегрального исчисления.

Для этого функция $f(x)$ должна иметь вид:

$$f(x) = e^{a \cdot x} \cdot [P_n(x) \cdot \cos(b \cdot x) + Q_m(x) \cdot \sin(b \cdot x)], \qquad (4.44)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - алгебраические многочлены ***n***-ой и ***m***-ой степени соответственно, a и b - вещественные числа.

Тогда частное решение неоднородного дифференциального уравнения может быть подобрано в виде

$$\tilde{y} = x^r \cdot e^{a \cdot x} \cdot [P_l(x) \cdot \cos(b \cdot x) + Q_l(x) \cdot \sin(b \cdot x)], \qquad (4.45)$$

где $P_l(x)$ и $Q_l(x)$ - <u>полные</u> алгебраические многочлены ***l***-ой степени, причем $\boldsymbol{l}=max\{\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\}$, r – показатель кратности корня $a+i\cdot b$ в характеристическом уравнении соответствующего однородного дифференциального уравнения.

Если корня $a+i\cdot b$ в характеристическом уравнении нет, то r=0.

Термин “полные” алгебраические многочлены означает, что в них присутствуют <u>все</u> степени x от нулевой до $\boldsymbol{l}$ включительно.

Наконец, если функция $f(x)$ содержит хотя бы одну тригонометрическую функцию $\sin(b\cdot x)$ или $\cos(b\cdot x)$, то в частное решение $\tilde{y}$ надо обязательно вводить <u>обе</u> эти функции.

Если функция $f(x)$ записывается не в виде (4.44), а принимает какие-либо частные значения, то тогда и соотношение (4.45) также будет принимать частный вид.

Так, например, если $f(x)=P_n(x)\quad (a=b=0)$, то

$$\tilde{y}=x^r\cdot R_n(x),$$

где $\boldsymbol{r}$ - кратность корня x=0 в характеристическом уравнении.

Если

$$f(x)=A\cdot e^{a\cdot x}\quad (b=0,\ A=const), \text{ то}$$

$$\tilde{y}=B\cdot x^r\cdot e^{a\cdot x},$$

где r - кратность корня x=α в характеристическом уравнении.

Наконец, если

$$f(x)=e^{a\cdot x}\cdot P_n(x)\quad (b=0), \text{ то}$$

$$\tilde{y}=x^r\cdot e^{a\cdot x}\cdot R_n(x),$$

где r - кратность корня x=α в характеристическом уравнении.

<u>Задача 4.13.</u> Решить дифференциальное уравнение $y''-4y=8x^3$.

Решение:

Сначала найдем общее решение однородного дифференциального уравнения:

$y'' - 4y = 0$;

$k^2 - 4 = 0$;

$k_{1,2} = \pm 2$;

$y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{2x}$;

$y_{oo} = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{2x}$.

В исходном уравнении $f(x) = 8x^3$. Значит, $a = 0,\ b = 0$. Корень $x = a + i \cdot b = 0$ среди корней характеристического уравнения отсутствует. Значит, $r = 0$. Степень алгебраического многочлена в правой части неоднородного дифференциального уравнения n=3. Следовательно, частное решение $\tilde{y}$ неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{y} = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D .$$

Тогда

$$\begin{array}{r|l} -4 & \tilde{y} = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D \ ; \\ 0 & \tilde{y}' = 3A \cdot x^2 + 2B \cdot x + C; \\ 1 & \tilde{y}'' = 6A \cdot x + 2B. \end{array}$$

$$\overline{\tilde{y}'' - 4\tilde{y} = -4Ax^3 - 4Bx^2 + 2(3A - 2C) \cdot x + 2(B + 2D) \equiv 8x^3} .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в разных частях этого равенства, получим:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \\ x^2 & \\ x^1 & \\ x^0 & \end{array} \begin{cases} -4A = 8; \\ -4A = 0; \\ 3A - 2C = 0; \\ B - 2D = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2; \\ B = 0; \\ C - -3; \\ D = 0. \end{cases}$$

Итак, частное решение неоднородного дифференциального уравнения выглядит так:

$\tilde{y} = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x$.

Тогда окончательно

$y_{он} = y_{oo} + \tilde{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} - 2x^3 - 3x$.

<u>Задача 4.14.</u> Решить дифференциальное уравнение $y'' + 4y = 12 \cdot \cos(2x)$.

Решение:

Решаем однородное дифференциальное уравнение:

$$y'' + 4y = 0\ ;$$
$$k^2 + 4 = 0\ ;$$
$$k_{1,2} = \pm 2i\ ;$$
$$y_1 = \cos(2x)\ ,\quad y_2 = \sin(2x)\ ;$$
$$y_{oo} = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)\ .$$

У нас $f(x) = 12 \cdot \cos(2x)$. Значит, $a = 0$, $b = 2$. Корень $x = a + i \cdot b = 2i$ встречается один раз среди корней характеристического уравнения однородного дифференциального уравнения. Значит, $r = 1$. Наконец, степень алгебраического многочлена в правой части неоднородного дифференциального уравнения n=0. Следовательно, частное решение неоднородного дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$\tilde{y} = x \cdot \left(A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)\right).$$

Вычисляем

$$\begin{array}{c|l}
4 & \tilde{y} = x \cdot \left(A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x)\right); \\
0 & \tilde{y}' = A \cdot \cos(2x) + B \cdot \sin(2x) + x \cdot \left(-2A \cdot \sin(2x) + 2B \cdot \cos(2x)\right) = \\
 & \quad = (A + 2Bx) \cdot \cos(2x) + (B - 2Ax) \cdot \sin(2x)\ ; \\
1 & \tilde{y}'' = 2B \cdot \cos(2x) - 2(A + 2Bx) \cdot \sin(2x) - 2A \cdot \sin(2x) + 2(B - 2Ax) \cdot \cos(2x) = \\
 & \quad = 4(B - Ax) \cdot \cos(2x) - 4(A + Bx) \cdot \sin(2x)\ .
\end{array}$$

$$\overline{\tilde{y}'' + 4\tilde{y} = 4B \cdot \cos(2x) - 4A \cdot \sin(2x) \equiv 12\cos(2x).}$$

Приравниваем коэффициенты при тригонометрических функциях $\cos(2x)$ и $\sin(2x)$ левой и правой частях этого тождества:

$$\begin{array}{c|l}
\cos(2x) & \left\{\begin{array}{l} 4B = 12\ ; \\ -4A = 0\ . \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} B = 3\ ; \\ A = 0\ . \end{array}\right. \\
\sin(2x) &
\end{array}$$

Значит, $\tilde{y} = 3x \cdot \sin(2x)$,

$$y_{он} = C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x) + 3x \cdot \sin(2x)\ .$$

Литература

1. Барковський В. В., Барковська Н. В. Математика для економістів: Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1997.

2. Берман Н. И. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Высшая школа, 1980.

3. Данко Н. Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1974.

4. Карасев А. И. и др. Курс высшей математики для экономических вузов. – М.: Высшая школа, 1982.

5. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1989.

6. Пискунов И. И. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1989.

Оглавление

Учебное издание

Дук Александр Николаевич
Ткаченко Елена Георгиевна
Целуйко Наталья Васильевна
Бартенев Георгий Михайлович
Толстой Виктор Владимирович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть II

Конспект лекций

Тем. план 2007, поз. 121

Подписано к печати 18.07.07. Формат 60х84 1/16. Бумага типогр. Печать плоская. Уч.-изд. л. 3,29. Усл. печ. л. 3,25. Тираж 50 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины
49600, г. Днепропетровск- 5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ