МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к решению задач по дисциплине “Высшая математика” и варианты контрольных заданий (практические занятия)

Часть I

Утверждено
на заседании Ученого совета
академии
Протокол № 1 от 31.01.06

Днепропетровск НМетАУ 2006

УДК 681.3.016
Методические указания по решению задач по дисциплине “Высшая математика” и варианты контрольных заданий (практические занятия). Часть I /Сост.: А.Н. Дук, Е.Г. Ткаченко, Н.В. Целуйко и др. – Днепропетровск: НМетАУ, 2006. – 40 с.

Методические указания содержат варианты задач по разделам «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Пределы числовых последовательностей и функций», «Дифференциальное исчисление функции одной независимой переменной» дисциплины «Высшая математика» и варианты контрольных заданий, излагаемые в соответствии со стандартом Министерства образования и науки Украины.

Предназначены для студентов всех экономических специальностей, а также для студентов с проблемами здоровья.

Составители: А.Н. Дук, ст. преподаватель
Е.Г. Ткаченко, ст. преподаватель
Н.В. Целуйко, ст. преподаватель
Г.М. Бартенев, ас.
В.В. Толстой, ас.

Ответственный за выпуск Г.Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Подписано к печати 15.06.06. Формат 60x84 1/16. Бумага типогр. Печать плоская. Уч.-изд. л. 2,35. Усл. печ. л. 2,32. Тираж 50 экз. Заказ №

Национальная металлургическая академия Украины
49600, Днепропетровск- 5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ

1. Векторная алгебра. Задачи.

1.1 Векторы, основные понятия и определения, действия над векторами.

1. Задайте на плоскости три произвольных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Постройте векторы: $-3 \cdot \bar{a}$, $\bar{a} - 2 \cdot \bar{b}$, $2 \cdot \bar{a} - \frac{1}{2} \cdot \bar{b} + \bar{c}$, $-\bar{a} - \bar{b} - 2 \cdot \bar{c}$.
2. Найти длину и направление вектора $\overline{AB}$, если A(2,1,-4), B(1,2,-3).
3. Найти длины сторон и медиан треугольника ABC, если известны координаты его вершин A(0,1,-1), B(1,-2,2), C(2,3,1).
4. Даны векторы $\bar{a} = 2 \cdot \bar{i} + \bar{j} - 4 \cdot \bar{k}$, $\bar{b}$ {1,-1,2}. Определить длину и направление вектора $c = \bar{a} - 3 \cdot \bar{b}$.
5. Найти координаты вектора $\bar{a} = \overline{AB} - \overline{CD}$, если A(0,-1,1), B(2,-1,1), C(-2,-1,1), D(1,5,-3).
6. Треугольник ABC задан координатами вершин A(1,2,3), B(3,2,1), C(1,4,1). Показать, что он – равносторонний.
7. Определить точку B, с которой совпадает конец вектора $\bar{a} = 2 \cdot \bar{i} + \bar{j} - 4 \cdot \bar{k}$, если его начало совпадает с точкой A(2,-1,-1).

8. Найти длину вектора $\bar{c} = 2 \cdot \bar{a} - \bar{b}$, если $\bar{a} = 3 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - 3 \cdot \bar{j} - 2 \cdot \bar{k}$.

9. Может ли вектор образовывать с осями координат X, Y, Z углы 45^0, 60^0, и 120^0 соответственно?

10. Найти начало A вектора $\bar{a} = 3 \cdot \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + \bar{k}$, если его конец совпадает с точкой B(-1,1,3).

11. Даны два вектора $\bar{a}$ {x,1,8} и $\bar{b}$ {3,0,9}. Найти неизвестную координату x вектора $\bar{a}$, если известно, что $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.

12. На оси ординат найти точку, равноудалённую от точек A(1,-3,7) и B(5,4,-5).

1.2 Проекции вектора, условия параллельности и перпендикулярности.

1. Коллинеарны ли векторы $\bar{a} = 2 \cdot \bar{i} + \bar{j} - 4 \cdot \bar{k}$ и $\bar{c}$ {-1,1/2,2}
2. Проверить, что четыре точки A(3,-1,2), B(1,3,-2), C(-2,1,-1), D(2,-7,7) служат вершинами трапеции и найти длину меньшего основания.
3. Даны три единичных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, которые составляют с осью X углы $p/3, 2 \cdot p/3, p$ соответственно. Найти проекцию на ось вектора $\bar{d} = 3 \cdot \bar{a} + 2 \cdot \bar{b} - \bar{c}$.

4. Найти Пр$_x$($\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$), если $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=6$, $|\bar{c}|=8$, $|\bar{d}|=11$, а углы, которые составляют векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ с осью X, соответственно равны 0, $2\cdot p/3$, p, $p/3$.

5. Найти Пр$_{\bar{b}}\,\bar{a}$, если $\bar{a}=4\cdot\bar{i}+\bar{j}+5\cdot\bar{k}$, $\bar{b}=2\cdot\bar{i}-\bar{j}+2\cdot\bar{k}$.

6. Даны точки A(0,-1,2), B(1,3,-1), C(1,-1,1), D(2,1,-2). Будут ли вектора $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ взаимно перпендикулярны?

7. Даны два вектора $\bar{a}=2\cdot\bar{i}+a\cdot\bar{j}+\bar{k}$ и $\bar{b}=3\cdot\bar{i}-6\cdot\bar{j}+b\cdot\bar{k}$. При каких значениях a, b векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны?

8. Доказать, что треугольник ABC – прямоугольный, если известны координаты его вершин A(2,-1,3), B(1,1,1), C(0,0,5).

9. При каком значении l векторы $\bar{a}=l\cdot\bar{i}-5\cdot\bar{j}+2\cdot\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+2\cdot\bar{j}-3\cdot\bar{k}$ взаимно перпендикулярны?

10. Вектор $\bar{a}$ коллинеарен вектору $\bar{b}$(2,-1,1). Определить координаты вектора $\bar{a}$, если известно, что $\bar{a}\cdot\bar{b}=18$.

11. Найти единичный вектор того же направления, что и вектор $\bar{a}=\bar{i}+2\cdot\bar{j}+2\cdot\bar{k}$.

12. Вычислить: $(2\cdot\bar{i}-\bar{j})\cdot\bar{j}+(\bar{j}-3\cdot\bar{k})\cdot\bar{k}+(\bar{i}-2\cdot\bar{k})^2$, $3\cdot\bar{i}\cdot(\bar{j}+2\cdot\bar{k})+3\cdot\bar{k}\cdot(2\cdot\bar{i}-\bar{k})$, $(\bar{i}-\bar{k})^2+(\bar{k}-\bar{j})^2+(\bar{i}-\bar{j})^2$.

1.3 Скалярное произведение двух векторов, его приложения. Разложение вектора по базису.

1. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} - 2 \cdot \bar{j} + \bar{k}$.
2. Определить, являются ли вектора $\bar{a}$(1,0,-2) и $\bar{b}$(2,-1,0) линейно зависимыми?
3. Найти скалярное произведение векторов: $\bar{a} = 2 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} + \bar{k}$ и $\bar{b} = 2 \cdot \bar{i} - \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$.
4. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}${-1,1,-4}, $|\bar{b}| = 4$, а угол между ними 60^0.
5. Найти $(5 \cdot \bar{a} - 3 \cdot \bar{b}) \cdot (2 \cdot \bar{a} + \bar{b})$, если $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны.
6. Разложить вектор $\bar{a}$ {8,2} по базису, образованному векторами $\bar{p}$ ({2,-2} и $\bar{q}$ {1,3}.
7. Разложить вектор $\bar{a}$ {2,-4,11} по базису, образованному векторами $\bar{e}_1$ {2,0,0}, $\bar{e}_2$ {0,3,0} и $\bar{e}_3$ {0,-1,2}.
8. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 2 \cdot \bar{i} + \bar{j}$ и $\bar{b} = -2 \cdot \bar{i} + \bar{k}$.
9. Найти угол при вершине A в треугольнике ABC, если A(2,-2,3), B(1,1,1), C(0,0,6).

10. Найти $\text{Пр}_{\overline{a}-2\cdot\overline{b}}(\overline{a}+3\cdot\overline{b})$, если $\overline{a}=-3\cdot\overline{i}+\overline{j}+2\cdot\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}-3\cdot\overline{j}+2\cdot\overline{k}$.

Примеры решения задач по векторной алгебре.

1. Найти длину и направление вектора $\overline{B}\overline{C}$, если B(2,1,-1), C(3,-2,1).

Решение.

Вычислим координаты вектора $\overline{B}\overline{C}$, для чего вычтем из координат конца вектора (точка C) соответствующие координаты начала вектора (точка B): $\overline{B}\overline{C}$(3-2,-2-1,1- -1). Имеем $\overline{B}\overline{C}$(1,-3,2). Для определения длины воспользуемся формулой: $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, где x, y, z – соответствующие координаты. Тогда $d_{BC}=\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}$; $d_{BC}=\sqrt{14}$.

Чтобы определить направление вектора, вычислим направляющие косинусы по формулам: $\cos a=\dfrac{x}{\left|\overline{B}\overline{C}\right|}$; $\cos b=\dfrac{y}{\left|\overline{B}\overline{C}\right|}$; $\cos g=\dfrac{z}{\left|\overline{B}\overline{C}\right|}$. Для нашей задачи: $\cos a=\dfrac{1}{\sqrt{14}}$; $\cos b=\dfrac{-3}{\sqrt{14}}$; $\cos g=\dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

2. Даны векторы $\bar{a} = 3\cdot\bar{i} + 2\cdot\bar{j} - 4\cdot\bar{k}$, $\bar{b}$ {-1,2,3}. Определить длину и направление вектора $\bar{c} = 2\cdot\bar{a} + 3\cdot\bar{b}$.

Решение.

Определим координаты вектора $\bar{c}$. Координаты $2\cdot\bar{a} = \{2\cdot 3, 2\cdot 2, 2\cdot(-4)\} = \{6,4,-8\}$, $3\cdot\bar{b} = \{3\cdot(-1), 3\cdot 2, 3\cdot 3\} = \{-3,6,9\}$. Тогда $\bar{c} = \{6-3, 4+6, -8+9\} = \{3,10,1\}$. Длина $\bar{c}$:

$$d_c = \sqrt{3^2 + 10^2 + 1^2} = \sqrt{110}$$

$$\cos a = \frac{3}{\sqrt{110}};\ \cos b = \frac{10}{\sqrt{110}};\ \cos g = \frac{1}{\sqrt{110}}.$$

3. Может ли вектор образовывать с осями координат X, Y, Z углы 90^0, 45^0, и 60^0 соответственно?

Решение.

Проверяем формулу: $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g = 1$.Если выполняется – значит, вектор может образовывать данные углы. Для нашей задачи: $\cos^2 90 + \cos^2 45 + \cos^2 60 = 0^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 1$. Вектор не может образовывать такие углы.

4. Даны точки A(1,1,0), B(1,0,-1), C(0,1,-1), D(-2,-1,3). Будут ли вектора $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ взаимно перпендикулярны?

Решение.

Сначала определим координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$. Имеем: $\overline{AC}$ ={0-1,1-1,-1-0}={-1,0,-1}, $\overline{BD}$={-2-1,-1-0,3-(-1)}={-3,-1,4}. Условием перпендикулярности является равенство нулю скалярного произведения, то есть $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$. Проверяем данное равенство: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = 3 - 4 \neq 0$. Ответ: данные векторы не перпендикулярны.

5. Векторы $\bar{a}$ {1,0,0}, $\bar{b}$ {1,1,0}, $\bar{c}$ {1,1,1} образуют базис в пространстве. Найти координаты вектора $\bar{d} = 2 \cdot \bar{i} - \bar{k}$ в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Решение.

Произвольный вектор $\bar{d}$ можно разложить в базисе $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ следующим образом: $\bar{d} = a \cdot \bar{a} + b \cdot \bar{b} + g \cdot \bar{c}$. При этом получим: $\{2,0,1\} = a \cdot \{1,0,0\} + b \cdot \{1,1,0\} + g\{1,1,1\}$, или $\{2,0,1\} = \{a + b + g, b + g, g\}$.

Приравнивая соответствующие координаты векторов, имеем: $\begin{cases} a + b + g = 2 \\ b + g = 0 \\ g = -1 \end{cases}$; решая представленную систему уравнений, получаем $a = 2$, $b = 1$, $g = -1$. Таким образом, вектор $\overline{d}$ в новом базисе имеет координаты $\overline{d}$ {2,1,-1}, а его разложение в базисе $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ записывается в виде: $\overline{d} = 2 \cdot \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$.

2. Аналитическая геометрия на плоскости

2.1 Уравнения прямой на плоскости. Расстояние между точками.

1. Уравнение $3 \cdot x + 4 \cdot y - 5 = 0$ привести к уравнению прямой в отрезках, уравнению прямой с угловым коэффициентом.
2. Уравнение $y = -\frac{2}{3} \cdot x + 4$ привести к общему уравнению прямой, к нормальному уравнению прямой.
3. Построить прямую, отсекающую на оси У отрезок b=-2 и составляющая с осью X угол: а) 45^0; б) 135^0.
4. Построить прямую, проходящую через начало координат и через точку A(-2,5), написать её уравнение.
5. Определить параметры к и b для каждой из прямых: а) $2 \cdot x - 5 \cdot y + 7 = 0$; б) $x - 2 \cdot y + 1 = 0$; в) $-x - y = 0$; г) $5 \cdot x - 7 = 0$; д) $5 \cdot y - 1 = 0$; е) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.
6. Лежат ли точки A(-2,3), B(3,-1), C(-1,1), D(2,-3) на прямой $-3 \cdot x - 2 \cdot y = 0$, находятся «выше» или «ниже» её?
7. Определить точку пересечения прямых линий $2 \cdot x - 3 \cdot y = 1$, $3 \cdot x - y = 2$.
8. Написать уравнения прямых, проходящих через точки

A(-1,4), B(2,-1); C(-3,1), D(-2,-3).

9. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку A(-3,4). Выбрать из этого пучка прямые, составляющие с осью X углы: а) 45^0; б) 60^0; в) 135^0; г) 0^0, построить их.

10. Дан треугольник с вершинами A(-4,1), B(2,3), (4,-2). Написать уравнения сторон треугольника, найти длины сторон.

11. Для треугольника (задача 9) написать уравнения медиан, найти их длины.

12. Построить треугольник, стороны которого заданы уравнениями $x+y-4=0$, $3\cdot x-y=0$, $x-3\cdot y=8$.

2.2 Угол между прямыми, условия параллельности, перпендикулярности прямых. Расстояние между прямой и точкой.

1. Определить угол между прямыми: а) $y=-2\cdot x+3$ и $y=\frac{2}{3}\cdot x+1$; б) $2\cdot x+y-4=0$ и $-x+3\cdot y+4=0$; в) $x+4=0$ и $y=-5\cdot x+6$.

2. Среди прямых $3\cdot x-2\cdot y+7=0$, $6\cdot x-4\cdot y-9=0$, $6\cdot x+4\cdot y-5=0$, $2\cdot x+3\cdot y-6=0$ указать параллельные и перпендикулярные.

3. В точках пересечения прямой $3 \cdot x - 2 \cdot y - 4 = 0$ с осями координат восстановлены перпендикуляры к этой прямой. Написать их уравнения.
4. Написать уравнения прямых, проходящих под углом 45^0 к прямой $y = 5 - \frac{2}{5} \cdot x$.
5. Дан треугольник с вершинами A(-2,1), B(-1,3), C(5,-2). Написать уравнения высот треугольника, найти их длины.
6. Написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и: а) параллельна прямой $2 \cdot x + 5 \cdot y - 3 = 0$; б) перпендикулярна прямой $3 \cdot x - 3 \cdot y + 5 = 0$.
7. Найти угловой коэффициент прямой $y = к \cdot x + 5$, если известно, что она удалена от начала координат на расстояние $D = \sqrt{5}$.
8. Доказать, что треугольник с вершинами в точках A(0,0), B(3,1), C(1,7) – прямоугольный.
9. Найти длину высоты трапеции, если известны уравнения оснований трапеции: $3 \cdot x - 2 \cdot y + 7 = 0$, $6 \cdot x - 4 \cdot y - 9 = 0$.
10. Дан треугольник с вершинами A(-1,1), B(-3,4), (2,-2). Найти длину высоты BK треугольника.

Примеры решения задач по аналитической геометрии на плоскости.

1. Уравнение прямой $3\cdot x-4\cdot y-5=0$ привести к нормальному виду, получить уравнение прямой в отрезках и уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Решение.

а) Нормирующий множитель: $m=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B}}=+\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$.

Умножая на него все слагаемые общего уравнения прямой, получаем: $\frac{3}{5}\cdot x-\frac{4}{5}\cdot y-1=0$. Для данной прямой, следовательно, имеем: $r=1$, $\cos a=\frac{3}{5}$, $\sin a=-\frac{4}{5}$.

б) Для получения уравнения прямой в отрезках переносим свободный член вправо, и делим на него всё уравнение:

$3\cdot x-4\cdot y=5$, $\frac{3}{5}\cdot x-\frac{4}{5}\cdot y=1$, $\frac{x}{5/3}+\frac{y}{-5/4}=1$;

в) Чтобы получить уравнение прямой с угловым коэффициентом, выразим из общего уравнения прямой y:

$3\cdot x-5=4\cdot y$, $y=\frac{3}{4}\cdot x-\frac{5}{4}$.

2. Определить точку пересечения прямых: $2 \cdot x - 3 \cdot y - 1 = 0$ и $2 \cdot x - 3 \cdot y - 1 = 0$.

Решение.

Решая уравнения совместно, умножим второе на 3:

$2 \cdot x - 3 \cdot y - 1 = 0$, $9 \cdot x - 3 \cdot y - 6 = 0$.

Вычитая, получим: $7 \cdot x - 5 = 0$, откуда $x = \frac{5}{7}$. Умножая первое уравнение на 3, второе на 2 и вычитая из первого второе, получим: $7 \cdot y - 1 = 0$, откуда $y = \frac{1}{7}$. Итак, координаты точки пересечения данных прямых: $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{1}{7}$.

3. Составить уравнение прямой линии, проходящей через точку пересечения прямых $2 \cdot x - 3 \cdot y - 1 = 0$ и $2 \cdot x - 3 \cdot y - 1 = 0$ перпендикулярно прямой $y = x$.

Решение.

Из предыдущей задачи (4.2) находим координаты точки пересечения: $x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{1}{7}$. В силу условия перпендикулярности искомой прямой к прямой $y = x$, её угловой коэффициент $k = -1$. Следовательно, уравнение прямой линии будет: $y - \frac{1}{7} = -1 \cdot \left(x - \frac{5}{7} \right)$, или $y - \frac{1}{7} = -x + \frac{5}{7}$, или $7 \cdot y - 1 = -7 \cdot x + 5$, откуда: $7 \cdot x + 7 \cdot y - 6 = 0$.

4. Составить уравнение прямой линии, проходящеё через точки A(1,2) и B(-1,1).

Решение.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через 2 заданные точки: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Для нашей задачи: $\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-1}{-1-1}$, откуда: $y-2=\frac{x-1}{2}$; окончательно $x-2\cdot y+3=0$.

5. Дан треугольник с вершинами A(1,-1), B(0,3), C(5,-2). Написать:

а) уравнения высоты BM треугольника и её длину;

б) угол при вершине C;

с) уравнение прямой, проходящей через точку M параллельно BC.

Решение.

а) Высота BM проведена из вершины B перпендикулярно к прямой AC, поэтому необходимо написать уравнение прямой AC. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через 2 заданные точки: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$. Для нашей задачи: $\frac{y+1}{-2+1}=\frac{x-1}{5-1}$, откуда: $\frac{y+1}{-1}=\frac{x-1}{4}$. Уравнение прямой AC: $x+4\cdot y+3=0$.

Угловой коэффициент данной прямой $k_{AC} = -\frac{1}{4}$. Из условия перпендикулярности, $k_{BM} = -\frac{1}{k_{AC}} = 4$. Воспользуемся уравнением пучка прямых: $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$. Подставляя вместо k - k_{BM}, вместо x_0, y_0 - координаты точки В, получим: $y - 3 = 4 \cdot (x - 0)$, окончательно уравнение ВМ: $x + 4 \cdot y + 3 = 0$. Длину высоты ВМ можно определить как расстояние от точки В до прямой АС по формуле: $d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Здесь А,В,С – коэффициенты из уравнения ВМ, x_0, y_0 - координаты точки В.

$$d = \frac{|4 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

б) Для определения угла при вершине С необходимы угловые коэффициенты прямых АС и ВС. Нам известен $k_{AC} = -\frac{1}{4}$, для определения k_{BC} запишем уравнение ВС: $\frac{y-3}{-2-3} = \frac{x-0}{5-0}$, или $\frac{y-3}{-5} = \frac{x}{5}$. Уравнение ВС: $x + y - 3 = 0$, $k_{BC} = -1$. Тангенс угла можно найти по формуле: $tgj = \frac{k_2 - k_1}{1 - k_1 \cdot k_2} = \frac{-1 + \frac{1}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot (-1)} = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = -1$.

Для определения острого угла между прямыми необходимо взять тангенс по модулю. Тогда: $j = 45^0$.

c) Данный пункт задачи решается с использованием уравнения пучка прямых, поэтому необходимо определить координаты точки М. Это достигается решением совместно уравнений прямых АС и ВМ: $x+4\cdot y+3=0$ и $x+4\cdot y+3=0$. В результате решения, получаем: $M\left(-\frac{15}{17},-\frac{9}{17}\right)$. В уравнение пучка прямых $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$ подставляем $k=k_{BC}=-1$ в силу параллельности прямых, x_0, y_0 - координаты точки М. Имеем следующее равенство: $y+\frac{9}{17}=-\left(x+\frac{15}{17}\right)$, или $x+y-\frac{22}{17}=0$. Задача решена.

3. Предел функции

3.1. Непосредственное вычисление пределов

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-1)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+3\lim\limits_{x\to 2}x-1=2^2+3\cdot 2-1=9$;

2. $\lim\limits_{x\to p}x\sin(x-\frac{p}{2})=\lim\limits_{x\to p}x\cdot\lim\limits_{x\to p}\sin(x-\frac{p}{2})=p\cdot\sin(p-\frac{p}{2})=p$;

3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+5}{x^3-3}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+5)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^3-3)}=\frac{(-1)^2+5}{(-1)^3-3}=\frac{1+5}{-1-3}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$;

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}=\left\{\frac{1}{0}\right\}=\infty$;

Найти пределы самостоятельно:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1)$;

2. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-3}{x^4+x^2+1}$;

3. $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}x(1-\cos 2x)$;

4. $\lim\limits_{t\to 2}4^{(t-4)(t+1)(t-2)}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1}ctg(x-1)$.

3.2 Раскрытие неопределённостей типа **0/0**

$$1.\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to1}\left(1+\frac{2}{x}\right)=$$

$$=1+2=3;$$

$$2.\lim_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}=\lim_{x\to5}\frac{2(x-5)(x-\frac{1}{2})}{3(x-5)(x+\frac{1}{3})}=\lim_{x\to5}\frac{2x-1}{3x+1}=$$

$$=\frac{2\cdot5-1}{3\cdot5+1}=\frac{9}{16};$$

$$3.\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{-1-1}{(-1)^2+1+1}=-\frac{2}{3};$$

$$4.\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to0}\frac{1-x-1}{x(1+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2};$$

Самостоятельно найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-4};$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1};$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1};$

4. $\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right];$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2};$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{1-\sqrt{1+tgx}};$

7. $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$; 8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$;

9. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$; 10. $\lim\limits_{a\to\frac{p}{4}}\dfrac{\cos a-\sin a}{\cos 2a}$;

11. $\lim\limits_{p\to -1}\dfrac{p+1}{1-\sqrt{1+p+p^2}}$.

3.2. Раскрытие неопределённостей типа ∞/∞

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3)}{x^3(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3}{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-3)}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}+3)}=\frac{0+0-3}{0+0+3}=-1;$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x^4-3x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3+\frac{1}{x^2})}{x^4(1-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^4})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{x^2(1-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^4})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^4}}=0\cdot\frac{3+0}{1-0+0}=0;$$

$$3.\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(8-\frac{1}{x^3})}{x^2(6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{8-\frac{1}{x^3}}{6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\infty;$$

$$4.\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+x}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2(1+\frac{1}{x})}}{x(1+\frac{1}{x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2/3}\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{x(1+\frac{1}{x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^{1/3}}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{(1+\frac{1}{x})}=0\cdot\frac{\sqrt[3]{1+0}}{1+0}=0;$$

Решить самостоятельно:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1000x^3+3x^2}{0.001x^4-100x^3+1}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$;

6. $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$;

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}}$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right)$;

10. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

3.3. Первый замечательный предел

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=1$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}=\frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{2}{5}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{4}=2\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\frac{2}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}$.

Самостоятельно найти пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos 6x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtg5x}{1-\cos^2 5x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{3x\sin 4x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-ctgx\right)$.

3.4. Второй замечательный предел

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+(\frac{1}{-x})\right)^{-x}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{-3x}=\left\{1^{-\infty}\right\}=\lim\limits_{x\leftarrow\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{5\cdot(-3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{-15}=e^{-15}=\frac{1}{e^{15}}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{4}{x}}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+(-3)x)\right]^{\frac{1}{-3x}\cdot 4}=e^{4}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\left\{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{x-1}\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{1-\frac{1}{x}}}=e^{2}$$

Самостоятельно найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{2}{x}}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^{3}}\right)^{x^{3}}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln x}{x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\cos ecx}$.

4. Нахождение производных функции

4.1. Непосредственное нахождение производных. Производная сложной функции

1. $y = x^2 - 5x + 4; \quad y' = (x^2)' - 5(x)' + (4)' = 2x - 5;$

2. $y = \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3}; \quad y = x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{3}} - x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3};$

$$y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + 5\cdot(-\frac{1}{3})\cdot x^{-\frac{1}{3}-1} - (-1)\cdot x^{-1-1} + \frac{1}{3}(-3)\cdot x^{-3-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} + x^{-2} - x^{-4} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4};$$

3. $y = x^5(2 - \frac{x}{3} + 3x^2); \quad y' = (x^5)'\cdot(2 - \frac{x}{3} + 3x^2) + x^5(2 - \frac{x}{3} + 3x^2)' =$

$$= 5x^4\cdot(2 - \frac{x}{3} + 3x^2) + x^5\cdot(-\frac{1}{3} + 3\cdot 2x) =$$

$$= 10x^4 - \frac{5}{3}x^5 + 15x^6 - \frac{1}{3}x^5 + 6x^6 = 21x^6 - 2x^5 + 10x^4;$$

4. $y = \frac{x^3}{x^2+1}; \quad y' = \frac{(x^3)'\cdot(x^2+1) - x^3\cdot(x^2+1)'}{\left(x^2+1\right)^2} =$

$$= \frac{3x^2(x^2+1) - x^3\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 3x^4}{(x^2+1)} = \frac{3x^2}{(x^2+1)^2};$$

5. $y = \cos\sqrt{x}; \quad y' = (\cos\sqrt{x})'\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = -\sin\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}};$

$$6. y=3^{-\arccos\frac{1}{x}};\quad y=\left(3^{-\arccos\frac{1}{x}}\right)'\cdot\left(-\arccos\frac{1}{x}\right)'\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=$$

$$=3^{-\arccos\frac{1}{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-3^{-\arccos\frac{1}{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{x^2}=$$

$$=-3^{-\arccos\frac{1}{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}};$$

Найти производные следующих функций:

1. $y=4x^3+x^{0.75}-\frac{4}{\sqrt[6]{x^5}}-2;$ 2. $y=x^2\cdot 3^x;$

3. $y=\frac{\ln x-2x^2}{x^3};$ 4. $y=\arcsin x-arctgx;$

5. $y=(x-5)^5\cdot(2x+1)^2;$ 6. $y=\ln(x-\cos x);$

7. $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}};$ 8. $y=\frac{2}{(x^2-x+1)^2};$

9. $y=\sin\sqrt{1+x^2};$ 10. $y=\log_3(x^2-1);$

11. $y=\frac{arctgx}{1+x^2};$ 12. $y=e^{-\arcsin x^3};$

13. $y=\dfrac{x^3+2^x}{e^{-x}}$; 14. $y=ctg^3(\sqrt{1-x^2})$;

15. $y=x\cdot arctg(\sqrt{x^2-1})$; 16. $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

17. $y=\arccos(\ln 2x)+\ln(\arccos 2x)$; 18. $y=\cos^2(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}})$;

19. $y=\cos\dfrac{\arcsin(x-1)}{2}$; 20. $y=e^{-\sqrt{x^2-x-1}}+e^{e^x}$.

4.2. Логарифмическое дифференцирование

1. $\boldsymbol{y=x^{\sin x}}$; $\ln y=\ln x^{\sin x}=\sin x\cdot\ln x$,

$$(\ln y)'=(\sin x\cdot\ln x)',$$

$$\frac{y'}{y}=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x},$$

$$y'=y(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x})=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x});$$

2. $y=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^x$; $\ln y=\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^x=-x\ln(1+x)$,

$$\frac{y'}{y}=-\ln(1+x)-\frac{x}{1+x},$$

$$y'=\left(\frac{1}{1+x}\right)^x\left[-\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}\right].$$

Самостоятельно решить примеры:

1. $y = (\sin 2x)^x$;

2. $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

3. $y = x^{\frac{1}{x}}$;

4. $y = (x^2 + 1)^{\ln x}$;

5. $y = x^{x^x}$.

4.3. Производная функции, заданной неявно:

1. $x^2 + y^2 = a^2$;

$(x^2)' + (y^2)' = (a^2)'$, $2x + 2yy' = 0$, $y' = -y/x$;

2. $e^{x+y} - \text{arctg}\, y - xy = 1$;

$(e^{x+y})' - (\text{arctg}\, y)' - (xy)' = 0$,

$e^{x+y}(1+y') - \frac{1}{1+y^2}y' - (y + xy') = 0$,

$$y' = \frac{e^{x+y} - \frac{1}{1+y^2} - x}{y - e^{x+y}} = \frac{\left(e^{x+y} - x\right)\left(1 + y^2\right) - 1}{\left(y - e^{x+y}\right)\left(1 + y^2\right)};$$

3. $(x^3 - y^2)\ln y = \cos(pxy) - \ln x$;

$$(x^3-y^2)'\cdot\ln y+(x^3-y^2)\cdot(\ln y)'=\left[(\cos(pxy))\right]'-(\ln x)';$$

$$(3x^2-2yy')\cdot\ln y+(x^3-y^2)\cdot\frac{y'}{y}=-\sin(pxy)\cdot p\ \cdot(y+xy')-\frac{1}{x};$$

$$[-2y\ln y-\tfrac{x^3-y^2}{y}+px\sin(pxy)]=-3x^2\ln y-py\sin(pxy)-\frac{1}{x};$$

$$y'=\frac{3x^2+py\sin(pxy)+\frac{1}{x}}{2y\ln y+\frac{x^3-y^2}{y}-px\sin(pxy)}=$$

$$=\frac{3x^3+pxy\sin(pxy)+1}{2y^2\ln y+x^3-y^2-pxy\sin(pxy)}\cdot\frac{y}{x}.$$

Найти производные неявных функций:

1. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1;$ 2. $y^2=2px;$

3. $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0;$

4. $a(x^2-y^2)=x^2+y^2;$

5. $2^{x-y}+tg(xy)-px=py^2;$

6. $\ln(x^2-y)+\ln\dfrac{x}{y}-4xy=0;$ 7. $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\arcsin\sqrt{xy}\,.$

5. Функция многих независимых переменных

5.1. Дифференцирование функции нескольких переменных

1. $z(x,y) = xy^3 + x^2 - 1$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^3 + 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot 3y^2 = 3xy^2;$$

2. $z(x,y) = e^{x-2y}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-2y} \cdot (-2) = -2e^{x-2y};$$

3. $z(x,y) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \ln\frac{1}{3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}} \cdot \left(\frac{1}{y}\right) \ln\frac{1}{3};$$

4. $z(x,y) = x^y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x;$$

4. $z(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2;}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x \cdot (x^2+y^2) - (x^3+y^3) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y^2\cdot(x^2+y^2)-(x^3+y^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^2y^2-2x^3y+y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Самостоятельно найти частные производные:

1. $z=x$-y; 2. $z=x^3y-xy^3$; 3. $z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$;

4. $z=\sqrt{y-x}+\ln\left(x^2-y^2\right)$; 5. $z=2^{x^2y^2-\sqrt{xy}}$;

6. $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[4]{x}}$; 7. $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

8. $z=arctg\frac{x}{y}$; 9. $z=\frac{1}{arctg\frac{x}{y}}$;

10. $z=tg^2\left(xy^3+x^2-1\right)$; 11. $z=\left(2+x^3\right)^{\cos y^2}$;

12. $z=\arcsin\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$; 13. $z=\ln(x+\ln y)$;

14. $z=\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{y}{x}$; 15. $z=arctg^3\left(\sqrt{x^3y}\right)$;

16. $z=\sqrt[x]{y}$; 17. $z=2\sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$.

5.2. Частные производные высших порядков:

1. $z(x,y) = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 5y^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - 15xy^2 + 5y^4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x - 30xy + 20y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y - 15y^2;$$

2. $z(x,y) = x^y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x;$$

3. $z(x,y) = e^x(\cos y + x\sin y)$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x(\cos y + x\sin y) + e^x \sin y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x(-\sin y + x\cos y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x(\cos y + x\sin y) + e^x \sin y + e^x \sin y = e^x(\cos y + x\sin y) + 2e^x \sin y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x(-\cos y + x\sin y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x(-\sin y + x\cos y) + e^x \cos y.$$

Самостоятельно найти все частные производные второго порядка:

1. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; 2. $z = y^{\ln x}$;

3. $z = \arcsin xy$; 4. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$;

5. $z = \sin^2(ax + by)$; 6. $z = e^{xy}$;

7. $z = \ln(e^x + e^y)$; 8. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

6. Интегрирование

6.1. Непосредственное интегрирование:

1. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx=\int\frac{1-2x+x^2}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx=\int\frac{dx}{x^2}-2\int\frac{dx}{x}+\int dx=$

$$=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-2\ln x+x+C=-\frac{1}{x}-2\ln x+x+C;$$

2. $\int\frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx=\int\left(3-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)dx=3\int dx-2\int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx=$

$$=3x-2\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\frac{3}{2}}+C;$$

3. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=$

$$=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=tgx-ctgx+C;$$

Вычислить самостоятельно:

1. $\int\left(2x^{-1,2}+3x^{-0,8}+5x^{0,38}\right)dx;$ 2. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx;$

3. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx;$ 4. $\int ctg^2 x dx$;

5. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx;$ 6. $\int e^{-\frac{x}{2}} \cdot 4^{2x} dx;$ 7. $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$.

6.2. Интегрирование посредством замены:

Случай 1:

1. $\int (3-2x)^7 dx;$ используем подстановку t = 3-2x,

откуда $x = \frac{t-3}{-2};$ и $dx = -\frac{1}{2}dt$. Подставляем:

$$\int (3-2x)^7 dx = \int t^7 \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2}\int t^7 dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^8}{8} + C = -\frac{1}{16}(3-2x)^8 + C;$$

2. $\int \frac{dx}{3x+7} = \left\langle t = 3x+7;\ x = \frac{t-7}{3};\ dx = \frac{dt}{3};\right\rangle = \int \frac{dt}{3t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} =$

$$= \frac{1}{3}\ln t + C = \frac{1}{3}\ln(3x+7) = C;$$

Случай 2:

1. $\int \frac{dx}{x\ln x};$ используем подстановку $t = \ln x$, откуда сразу

находим $dt = \frac{dx}{x}$. Подставляем:

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C=\ln\ln x+C;$$

2. $\int\frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}=\left\langle t=1+2\cos x;\ dt=-2\sin x dx;\ \sin x\cdot dx=-\frac{dt}{2};\right\rangle=$

$$=-\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1+2\cos x}+C;$$

Самостоятельно найти интегралы:

1. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-2x}};$

2. $\int\sin(2-5x)dx;$

3. $\int\frac{dx}{(3x+2)^{12}};$

4. $\int\left(e^{-4x}+\frac{1}{x^2+9}\right)dx\ ;$

5. $\int\frac{x^2dx}{x^3+1};$

6. $\int\frac{e^x}{e^x+1}dx;$

7. $\int\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}dx;$

8. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx;$

9. $\int\frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx;$

10. $\int\frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}};$

11. $\int\frac{dx}{3x+\sqrt{x}};$

12. $\int\frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

13. $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx;$

14. $\int\frac{dx}{e^x(3+e^{-x})};$

15. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx;$ 16. $\int\left(\sqrt{\sin x}+\cos x\right)^2 dx.$

6.3. Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x\sin 2x dx = \left\langle \begin{matrix} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x - \int\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int\cos 2x dx =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + C = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

$$\int\ln\left(x^2+1\right)dx = \left\langle \begin{matrix} u = \ln\left(x^2+1\right) \\ dv = dx \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} du = \frac{2x dx}{x^2+1} \\ v = x \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= x\ln\left(x^2+1\right) - \int\frac{2x}{x^2+1}x dx = x\ln\left(x^2+1\right) - 2\int\frac{x^2}{x^2+1}dx = x\ln\left(x^2+1\right) -$$

-2x –2arctg x +C;

Найти интегралы

1. ∫ x cosx dx ; 2. ∫ arcsin x dx ;

3. $\int \frac{\ln\ x}{x^3} dx$; 4. $\int (x^2+1) e^{-2x} dx;$

5. ∫ ln (xn) dx ; 6. ∫ e-2x sin x dx.

6.4. Разложение на простейшие дроби

$\int \frac{3-2x}{x^2-2x} dx;$ Раскладываем на простейшие дроби:

$$\frac{3-2x}{x^2-2x} = \frac{3-2x}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2};$$

Приведём к общему знаменателю и отбросим его:

3 - 2x = A(x-2) + Bx

Раскроем скобки: 3-2x = (A+B)x – 2A

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях X:

При x: A+B= -2

Свободные: -2A=3

Отсюда A= -3/2, B= -1/2;

$$\int \frac{3-2x}{x^2-2x} dx = \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{x-2} \right) dx = -\frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln|x|dx - \frac{1}{2}\ln|x-2| + C;$$

2. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$;

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Решая систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, получим:

A = ½; B = ½; C = - ½; D = 0.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)} = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} = -\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C.$$

Самостоятельно найти интегралы

1. $\int \frac{2-3x}{x^2+4x+10}dx$;

2. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$;

3. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$;

4. $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$;

5. $\int \frac{32xdx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$;

6. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$