МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до вивчення дисципліни «Вища математика»
(розділ «Загальне дослідження функцій та побудова графіків»)
для студентів усіх спеціальностей

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні Вченої ради
академії
Протокол № 9 от 30.12.08

Дніпропетровськ НМетАУ 2009

УДК 517.3

Методичні вказівки до вивчення дисципліни «Вища математика» (розділ «Загальне дослідження функцій та побудова графіків») для студентів усіх спеціальностей / Укл.: В. С. Коноваленков, Т. М. Заборова. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2009. – 14 с.

Містять відомості про загальне дослідження функцій та побудову графіків за допомогою методів вищої математики.

Розглянуті питання про область визначення функції, її монотонність, екстремуми, точки перегину та асимптоти, а також приклади та рисунки. Крім того, наведені варіанти завдань для індивідуальної роботи.

Призначені для студентів усіх спеціальностей

Друкується за авторською редакцією

Укладачі: В. С. Коноваленков, канд. техн. наук, доц.
Т. М. Заборова, ст. викладач

Відповідальний за випуск Г. Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензент Ю.Е.Чернявский, канд.фіз.-мат.наук, доц. (ДНУ)

Підписано до друку 07.05.09. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 0,82. Умов. друк. арк. 0,80. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, м. Дніпропетровськ-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ

ЗМІСТ

1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ

Розглянемо найважливіше у математиці поняття функціональної залежності, тобто зв'язку між змінними величинами, який виникає вздовж того чи іншого процесу, проявляється у цьому процесі та характерізує його.

***Визначення*. Змінна величина *y* називається функцією змінної величини *x* , якщо кожному *x* із деякої множини *D* за деяким правилом або законом відповідає значення змінної *y*, яка належить множині *R*.**

Символічно це записується у вигляді: $y = f(x), x \in D.$

Величину x називають незалежною змінною (або аргументом); множину значень x – областю визначення функції (D - це сукупність усіх значень x, за якими y визначено, або має сенс). Величину y називають залежною змінною, або функцією. Сукупність значень функції належить до множини R.

Наприклад, функція $y = \sqrt{x-2}$ визначена для усіх Х, що задовольняють нерівності $x - 2 \geq 0$, або $x \geq 2$. Таким чином, область визначення даної функції $x \in [2; \infty)$.

Символ f вказує сукупність математичних дій, які необхідно виконати над x, щоб одержати y.

Існують наступні способи завдання функцій:

- аналітичний (тобто у вигляді формули);
- табличний;
- графічний (графіком функції у декартової системі називається множина точок (лінія), абсцисами яких є значення незалежної змінної x, а ординатами - відповідні значення функції y).

Як правило, при дослідженні функцій ці способи комбінують.

З курсу загальноосвітньої школи відомі основні елементарні функції: степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні та обернені тригонометричні. До елементарних функцій відносять також функції, які одержуються за допомогою арифметичних дій над основними елементарними функціями, а також складні функції , або «функції від функцій», наприклад, $y = \ln \sin x$.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ФУНКЦІЇ

Дослідити функцію – це вивчити її поведінку при зміні аргументу $\boldsymbol{x}$ на області її визначення.

2.1. Нулі функції, знак функції

***Визначення*. Значення *x*, при якому функція *y* дорівнює нулю, називається нулем функції, тобто $x = x_0$ - нуль функції $y = f(x)$, якщо $f(x_0) = 0$.**

Якщо знак у функції додатний у деякому інтервалі осі ОХ, то графік функції розташований вище осі ОХ; якщо від'ємний - нижче. У нулі функції графік має спільну точку з віссю ОХ (Рис.2.1)

2.2. Парність та непарність функції

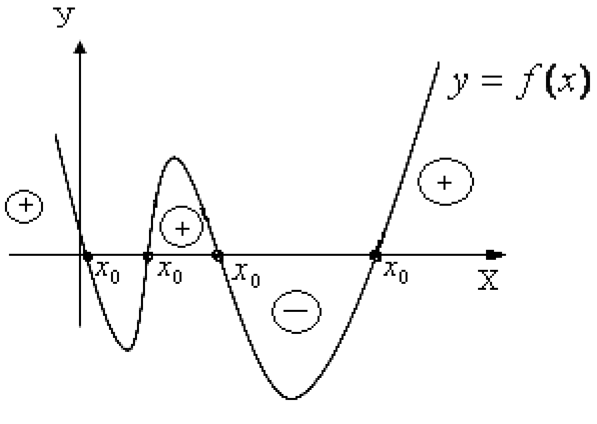


Рис.2.1

Визначення. **Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо вона не змінюється, коли знак її аргументу x змінити на протилежний, тобто** $f(-x) = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається непарною, якщо вона змінює знак на протилежний, коли знак її аргумента x поміняти на протилежний, тобто $f(-x) = -f(x)$.

Приклад. Нехай $y = f(x) = x^2$. Маємо $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Таким чином, функція $y = x^2$ є парною (Рис.2.2).

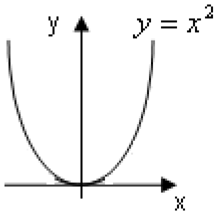


Рис.2.2

Приклад. Розглянемо функцію $y = f(x) = x^3$.
Маємо $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -f(x)$. Таким чином, функція $y = x^3$ є непарною (Рис.3).

Необхідно знати, що графік парної функції є симетричний відносно осі ОУ, а графік непарної функції є симетричним відносно початку координат (див. Рис.2.2 та Рис.2.3 відповідно).

Якщо умови парності або непарності не виконуються, то функція не є парною чи непарною, а графік такої функції не буде симетричним.

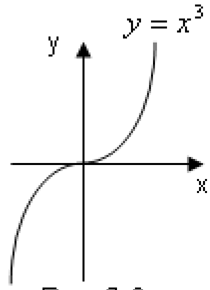


Рис.2.3

2.3. Періодичність функції

Визначення. **Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо існує таке додатне число Т, що називається періодом, для якого при будь-якому значенні x виконується рівність** $f(x+T) = f(x)$.

Можна узагальнити останню рівність у вигляді: $f(x+nT) = f(x)$, де n – будь-яке ціле число. Тобто кількість періодів функції необмежена.

У якості приклада можна навести тригонометричні функції $y = \sin x,\ y = \cos x,\ (T = 2p);\ y = tgx,\ y = ctgx,\ (T = p)$. У дужках вказано найменші періоди цих функцій. Але зрозуміло, що їх періодами можна вважати значення, що є кратними до найменших періодів.

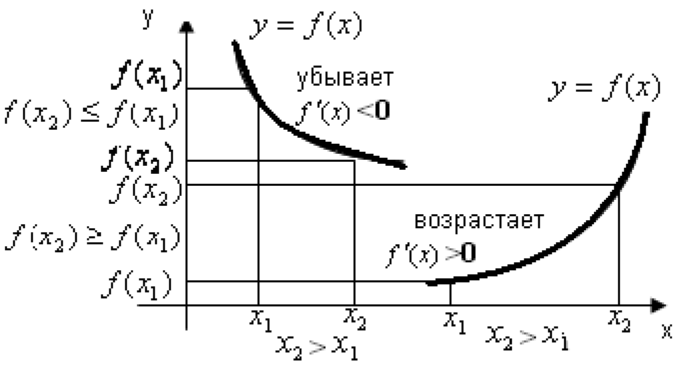


Рис.2.4

2.4. Зростання, спадання (монотонність) функції

Визначення. **Функція** $y = f(x)$ **зростає (спадає) на деякому інтервалі, якщо більшим значенням аргументу відповідають більші (менші) значення функції : тобто якщо при** $x_2 > x_1$ **маємо** $f(x_2) \geq f(x_1)$ **,то функція** $y = f(x)$ **зростає, якщо при** $x_2 > x_1$ **виконується нерівність** $f(x_2) \leq f(x_1)$ **, то функція** $y = f(x)$ **спадає** (Рис.2.4).

Інтервал значень *x*, на якому функція зростає (спадає), називається інтервалом монотонності (зростання (спадання)) функції.

Дослідження монотонності функції на базі її визначення є досить важка задача. Але існує зв'язок між монотонністю функції на деякому інтервалі та властивостями похідної цієї функції на даному інтервалі. Цей зв'язок визначається ознаками монотонності функції.

Необхідна ознака монотонності

Якщо диференційована функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на деякому інтервалі, то похідна цієї функції невід'ємна (недодатна) на цьому інтервалі, тобто: $f'(x) \geq 0 (f'(x) \leq 0) \forall x \in [a,b]$.

Достатня ознака монотонності

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на деякому интервалі, диференційована в усіх внутрішніх точках цього интервалу і $f'(x) > 0 \; \forall x \in (a,b) (f'(x) < 0 \; \forall x \in (a,b))$, то функція зростає (спадає) на цьому интервалі (Рис.2.4).

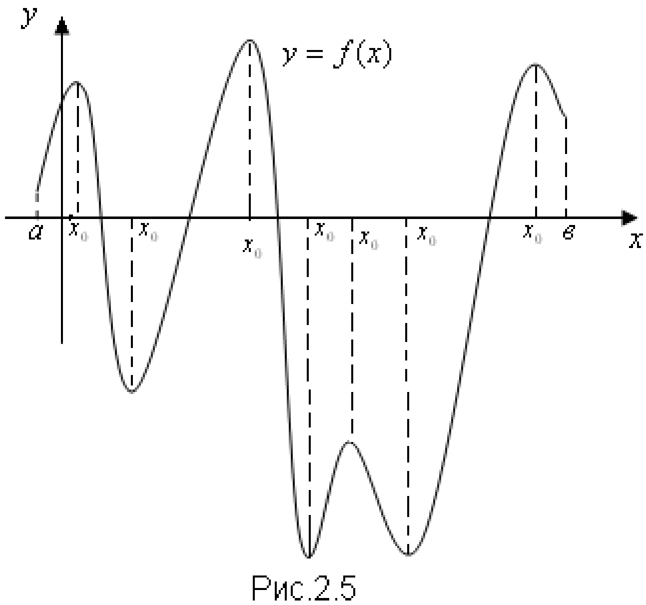


Рис.2.5

Слід підкреслити, що похідна монотонної функції у деяких точках інтервалу може обертатись у нуль: $f'(x) = 0$. Такі точки називаються стаціонарними або критичними точками (див. далі).

2.5. Екстремум функції

Особливу роль при дослідженні функції грають значення *x*, що відділяють інтервали зростання від інтервалів спадання та навпаки, тому що у цих точках функція $y = f(x)$ змінює характер своєї поведінки.

Визначення. **Точка** x_0 **називається точкою максимуму (мінімуму) функції** $y = f(x)$**, якщо** $f(x_0)$ **- найбільше**

(найменше) значення функції $y = f(x)$ у деякому околу точки x_0.

Функція на даному інтервалі може мати декілька екстремумів (максимумів та мінімумів), до речі мінімум може бути більш ніж максимум (Рис.2.5). Тому розрізняють екстремуми, що мають відносний характер (локальний екстремум) та найбільше й найменше значення функції на інтервалі - абсолютний максимум та мінімум.

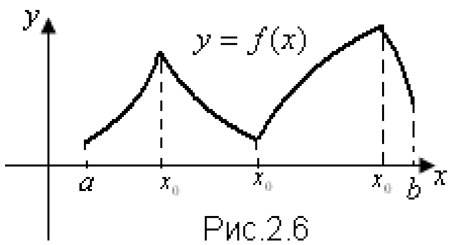


Рис.2.6

Зауваження. Слід відмітити, що екстремуми можуть мати вигляд, зображений на Рис.2.6.

Точки екстремумів такого вигляду містяться серед тих точок області визначення, у яких функція $y = f(x)$ не має похідної**.**

Сформулюємо **необхідну умову існування екстремуму.**

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на деякому інтервалі та диференційована в усіх внутрішніх точках цього інтервалу, у точці x_0 досягає екстремуму, то її похідна у цієї точці дорівнює нулю, тобто $f'(x) = 0$.

Слід ще раз підкреслити, що дана умова є **необхідною**, тобто виконання умови $f'(x) = 0$ ще не означає, що x_0- точка екстремуму**.** Тому ці точки ще називають точками можливого екстремуму, або критичними точками.

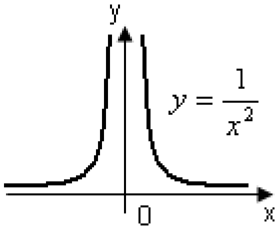
Звернемось до функції $y = f(x) = x^3$, зображеній на Рис.2.3.

$y' = f'(x) = 3x^2$, $f'(x) = 0$, при $x = 0$, але точка $x = 0$ не є точкою екстремуму (див. Рис.2.3). Отже виконання тільки необхідної умови екстремуму не гарантує його існування. Звернемось до **достатніх умов існування екстремуму.**

Перша достатня ознака екстремуму.

Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо при переході значення аргументу х через x_0 похідна функції $f'(x)$ змінює знак (при зміні “+” на “-“ точка x_0 є точкою максимуму; при зміні ”-“ на “+”- точкою мінімуму).

Зауваження. Слід мати на увазі, що у самій точці x_0 функція $y = f(x)$ повинна бути обов’язково неперервною. У протилежному випадку похідна функції може змінювати знак при переході x через x_0**,** але x_0 не буде точкою екстремуму.

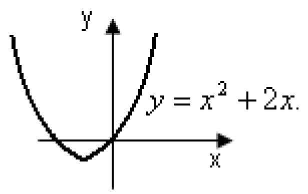


Наприклад: $y = \frac{1}{x^2}$. $y' = -\frac{2}{x^3}$. При x<0 y'<0, при x>0, y'>0,

Однак точка x=0 не є точкою екстремуму (у точці x=0 функція $y = \frac{1}{x^2}$ має нескінченний розрив).

Друга достатня ознака екстремуму.

Точка x_0 є точкою екстремуму функції $y = f(x)$, якщо при $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) \neq 0,$ причому, якщо $f''(x_0) > 0,$ то x_0 є точкою мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0,$ то x_0 є точкою максимуму.



Наприклад, $y = x^2 + 2x.$ $y' = 2x + 2 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1-$ точка можливого екстремуму, $y'' = 2 > 0$ – у точці $x = -1$ - маємо мінімум.

Приведемо одну з можливих схем дослідження функції на екстремум, розшуку найбільшого й найменшого значення функції, диференційованої на деякому інтервалі:

1. Знаходимо похідну $f'(x)$.

2. Шукаємо точки можливого екстремуму. До речі, це точки, у яких похідна або дорівнює нулю, або розривна, або невизначена. Усі ці значення називають інакше критичними точками похідної.

3. Відомо, що похідна не змінює знак у проміжках між своїми сусідніми критичними значеннями. Тому нам залишається прослідити за зміною знаків похідної при переході через критичні точки. А для цього достатньо знайти значення похідної у будь-яких точках між сусідніми критичними точками.

4. Для одержання ординат екстремальних точок обчислюємо значення функції $y = f(x)$ при кожній критичній точці похідної, де мала місце зміна її знаку.

Одержану інформацію можна оформити у вигляді таблиці.

Приклад. Дослідити функцію $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ на екстремум.

Знайти її найбільше й найменше значення на відрізку $[0,5]$.

Дана функція визначена на всій числовій осі.

1. $y' = x^2 - 4x + 3.$

2. $y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$

Інших критичних значень похідна не має. Будуємо таблицю:

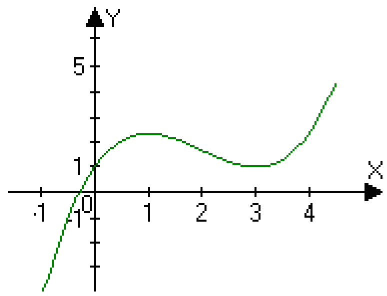
$y'(0) = 3 > 0$ - функція зростає на інтервалі $(-\infty\ ,1)$.

$y'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 < 0$ - функція спадає на інтервалі $(1\ ,3\ )$.

Таким чином, у точці $x = 1$ виконується перша достатня умова (або ознака) існування екстремуму, а точка $x = 1$ є точкою максимуму, який дорівнює $y(1) = \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{7}{3}.$ $y'(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3 > 0$ - функція зростає на інтервалі $(3, \infty\ )$.Точка $x = 3$ є точкою мінімуму: $y(3) = \frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 1.$.

x	$(-\infty\ ,1)$	$x = 1$	$(1\ ,3\ )$	$x = 3$	$(3, \infty\ )$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	max $7/3$	↘	min 1	↗

Для знаходження найбільшого й найменшого значень функції на даному відрізку треба порівняти значення функції на кінцях відрізка зі значеннями функції у екстремальних точках. Значення функції на кінцях інтервалу дорівнюють:



$$y(0)=\frac{0^3}{3}-2\cdot 0^2+3\cdot 0+1=1.\ y(5)=\frac{5^3}{3}-2\cdot 5^2+3\cdot 5+1=\frac{23}{3}.$$

Таким чином, найменше значення функції дорівнює одиниці, а найбільше становить $\frac{23}{3}=7\frac{2}{3}$.

2.6. Опуклість та угнутість функції

Визначення. **Крива $y=f(x)$ називається опуклою (угнутою) на деякому інтервалі (a, b), якщо усі точки кривої лежать нижче (вище) будь-якої дотичної до цієї кривої на даному інтервалі.** Опуклість, угнутість коротко називають кривизною кривої і вона є важливою характеристикою її форми.

Дослідження опуклості та угнутості графіка функції на деякому інтервалі на основі визначення можна замінити на дослідження знаку другої похідної цієї функції.

***Теорема*. Якщо в усіх точках інтервалу (a, b) друга похідна функції від'ємна (додатна), тобто $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$), то крива $y=f(x)$ опукла (угнута) на цьому інтервалі**.

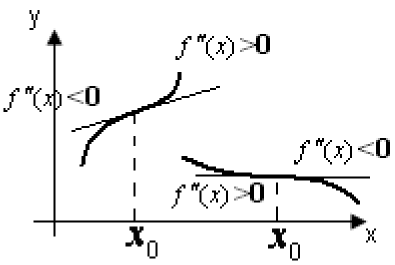
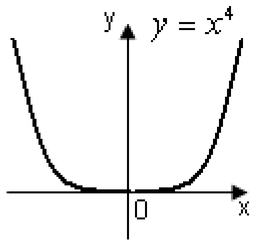


Рис.2.7

Визначення. **Точка, що відділяє опуклу частину неперервної кривої від угнутої частини (і навпаки), називається точкою перегину.**

Очевидно, що у самій точці перегину дотична перетинає криву (якщо ця дотична існує) (Рис.2.7).

Із визначення точки перегину випливає, що у точці x_0 $f''(x_0)=0$. Рівність нулю другої похідної – це **необхідна умова існування точки перегину.** Точки, у яких виконується необхідна умова, називаються точками можливого перегину, або критичними точками другої похідної. Слід підкреслити, що ця умова не є достатньою.



Наприклад, $y=x^4 \Rightarrow y'=4x^3 \Rightarrow y''=12x^2; y''=0 \Rightarrow x_0=0$ - точка, у якої виконується необхідна умова, однак перегину у цієї точці немає.

Достатня умова існування точки перегину.

Точка $(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину лінії $y=f(x)$, якщо $f''(x)$ міняє знак при переході x через x_0 (з "+" на "-" – опуклість змінюється на угнутість; з "-" на "+"- навпаки (Рис.7)).

Приклад. Знайти точки перегину та визначити інтервали опуклості й угнутості кривої $y = e^{-x^2}$.

$$y' = -2x \cdot e^{-x^2} \Rightarrow y'' = -2 \cdot e^{-x^2} - 2 \cdot x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 0.$$

Звідси маємо $4x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}.}$

Одержану інформацію розмістимо у таблиці:

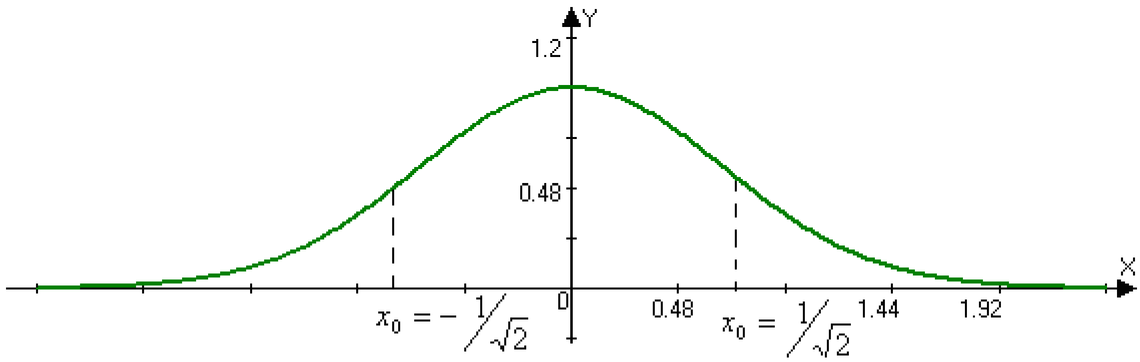
x	$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	$x = -1/\sqrt{2}$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$x = 1/\sqrt{2}$	$(1/\sqrt{2}, \infty)$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	Точка перегину	$\cap$	Точка перегину	$\cup$

$f''(-1) > 0,$ тобто, функція угнута на інтервалі $(-\infty, -1/\sqrt{2})$,

$f''(0), < 0,$ тобто, функція опукла на інтервалі $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Таким чином, точка $x_0 = -1/\sqrt{2}$ є точкою перегину.

$f''(1) < 0,$ функція $y = e^{-x^2}$ - угнута на інтервалі $(1/\sqrt{2}, \infty)$ і точка $x_0 = 1/\sqrt{2}$ також є точкою перегину.



2.7. Асимптоти функції

Якщо ми бажаємо вивчити функцію при необмеженому зростанні аргументу, то ми вимушені мати справу із, так званими, нескінченими гілками графіка. Із нескінченими гілками графіка доводиться мати справу й поблизу точок розриву. Пошук нескінчених гілок є необхідним, щоб правильно представити собі форму усього графіка.

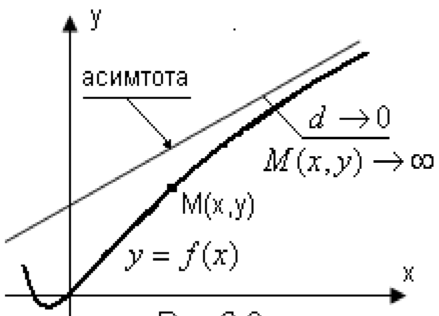


Рис.2.8

Визначення. **Пряма лінія називається асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань точок кривої до цієї прямої прямує до нуля, але ніколи у нуль не обертається. (Рис.2.8).**

До речі, слово **«асимптота»** - грецького походження і перекладається як **«не співпадаюча»**. Подальше будемо відрізняти **вертикальні, нахилені й горизонтальні (праві й ліві)** асимптоти.

1. Якщо існує число x_0 таке, що $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$, то пряма $x = x_0$ - вертикальна асимптота для функції $y = f(x)$, при цьому точка x_0 може не належати до області визначення функції або належати, але при цьому бути точкою розриву.

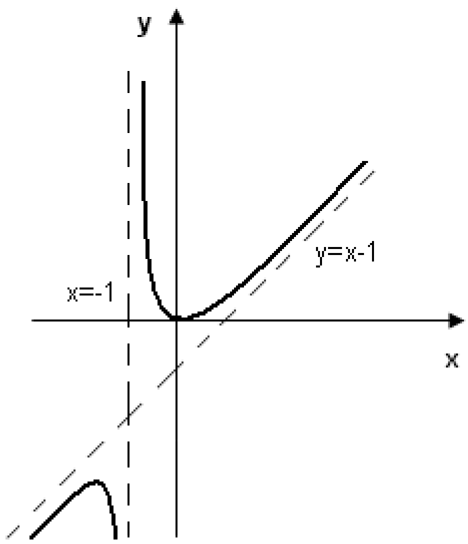
2. Якщо існують границі $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k_{1,2}$ (k_1 – при $x \to +\infty$; k_2 – при $x \to -\infty$) і $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - k_{1,2}] = b_{1,2}$ (b_1 – при $x \to +\infty$; b_2 – при $x \to -\infty$), то прямі $y = k_{1,2} \cdot x + b_{1,2}$ являються правою та левою нахиленими асимптотами для функції $y = f(x)$ (при $k_{1,2} = 0$ маємо горизонтальні асимптоти $y = b_{1,2}$).

Приклад. Дослідити функцію $y = \frac{x^2}{x+1}$.

Область визначення цієї функції: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Точка $x = -1$ є точкою розриву.

$\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} \frac{x^2}{x+1} = \pm\infty$. Таким чином, пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою, при наближенні до точці $x = -1$ справа функція нескінченно зростає ($y \to +\infty$ при $x \to -1 + 0$); при наближенні зліва – нескінченно спадає ($y \to -\infty$ при $x \to -1 - 0$).



Дослідимо дану функцію на наявність нахилених асимптот. Для цього знайдемо границі:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x+1}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow k = 1.$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \Rightarrow b = -1.$$

Пряма $y = x - 1$ є нахиленою асимптотою функції $y = \frac{x^2}{x+1}$.

3. ЗАГАЛЬНА СХЕМА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

1. Дослідження загального характеру функції:

а) область визначення функції;

б) точки розриву та інтервали неперервності;

в) поведінка функції у околу точок розриву; вертикальні й нахилені (горизонтальні) асимптоти;

г) парність, непарність функції;

д) періодичність функції;

е) точки перетину графіка функції із осями координат.

2. Уточнення характеру поведінки функції за допомогою похідної першого порядку:

а) інтервали зростання, спадання функції;

б) точки екстремуму.

3. Уточнення характеру поведінки функції за допомогою похідної другого порядку:

а) інтервали опуклості, угнутості функції;

б) точки перегину.

Інформацію пунктів 2, 3 зручно занести у таблицю.

Якщо це необхідно, то деякі точки графіка знаходяться безпосередньо при підстановці конкретних значень x у рівняння кривої $y = f(x)$.

Приклад. Дослідити функцію та побудувати її графік: $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

а) область визначення цієї функції: $x \neq 1,$ або $x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$;

б) точка розриву $x = 1$; таким чином, інтервали неперервності: $(-\infty,1)$ *та* $(1,+\infty)$;

в) при $x \to 1 \pm 0, \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \to +\infty$, тобто при наближенні до точці $x = 1$ функція нескінченно зростає; $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$, звідси пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою функції $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

Знайдемо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{\frac{x^3}{(x-1)^2}}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3}{x \cdot (x-1)^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} = 1 \Rightarrow k = 1;$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{(x-1)^2} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2 \Rightarrow b = 2.$$

Таким чином, пряма $y = x + 2$ є нахиленою асимптотою даної функції;

г) перевіримо, чи є дана функція парною або непарною: $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2} \begin{cases} \neq \dfrac{x^3}{(x-1)^2} \\ \neq -\dfrac{x^3}{(x-1)^2}, \end{cases}$ тобто функція не є парною чи непарною (графік функції $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ не буде симетричним);

д) функція не є періодичною, тому що до її складу не входять періодичні функції;

е) точки перетину із осями координат знаходимо, покладаючи $x = 0 \Rightarrow y = 0$; таким чином графік функції перетинає вісі координат у точці O(0,0).

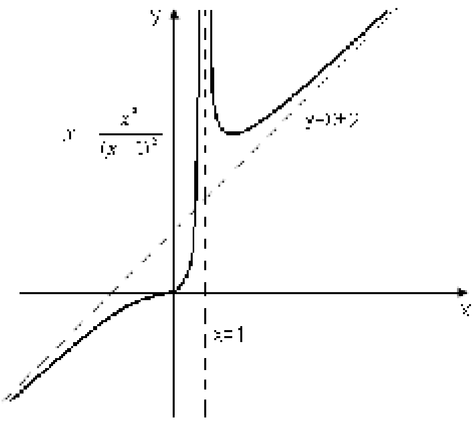
2. Знаходимо $y' = \dfrac{3x^2 \cdot (x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \dfrac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$.

$y' = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (x-3) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 3 -$ точки можливого екстремуму. Використовуючи ознаки монотонності та достатню умову існування екстремуму, одержану інформацію занесемо до таблиці:

x	$(-\infty,0)$	$x=0$	$(0,1)$	$x=1$	$(1,3)$	$x=3$	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	∞	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Немає екстр.	$\nearrow$	Не існує	$\searrow$	min $27/8$	$\nearrow$

3. Знаходимо $y'' = \dfrac{(3x^2 - 6x)\cdot(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$.

$y'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0 -$ точка можливого перегину.



Використовуючи зв'язок між опуклістю й угнутістю функції та знаком похідної другого порядку, а також достатньою умовою існування точки перегину, одержану інформацію заносимо до таблиці:

x	$(-\infty,0)$	$x=0$	$(0\ ,1)$	$x=1$	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	-	0	+	∞	+
$f(x)$	$\cap$	Точка перегину	$\cup$	Не існує	$\cup$

Будуємо графік.

4. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Дослідити функцію та побудувати її графік:

1. $y = \dfrac{3x}{2-x}$; 2. $y = \dfrac{2}{x^2 - 9}$; 3. $y = \dfrac{2x+3}{x^2}$; 4. $y = \dfrac{2x+1}{x-4}$;

5. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2}$; 6. $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$; 7. $y = 2 + \dfrac{12}{x^2 - 4}$; 8. $y = \dfrac{3x^3}{x^2+1}$;

9. $y = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$; 10. $y = \dfrac{2}{(x-1)x}$; 11. $y = \dfrac{2x-8}{3x^2}$; 12. $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$;

13. $y=\frac{e^x}{x-4}$; 14. $y=\frac{2x}{x^2-8}$; 15. $y=\frac{x^2-16}{x-1}$; 16. $y=\frac{2}{x^2-3}$;

17. $y=\frac{e^x}{x-4}$; 18. $y=\frac{x^3+x}{x^2-1}$; 19. $y=\frac{2-x^2}{1-4x^2}$; 20. $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$;

21. $y=x+\frac{1}{x}$; 22. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$; 23. $y=\frac{x^3}{4+x^3}$; 24. . $y=\frac{x^4}{x^3-1}$;

25. $y=\frac{e^{2x}}{x}$; 26. $y=xe^{-x^2}$; 27. $y=\frac{x-1}{x^2}$; 28. $y=\frac{x-3}{2x^2}$; 29. $y=\frac{x}{x^2-3}$;

30. $y=\frac{e^x}{x+2}$;

ЛІТЕРАТУРА

1.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1, 2.- М.: Наука, 1982.
2.Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1969.
3.Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2. – М.: Высшая школа, 1980.
4.Берман Г.Е. Сборник задач по курсу математического анализа.-М.: Наука, 1977.
5.Высшая математика. Сборник задач/ Под ред. П.Ф Овчинникова. – К.: Вища школа, 1991.
6.Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. Ч. 1, 2. – К.: Либідь, 1992.
7.Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1966.
8.Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1967.
9.Тевяшев А.Д. та ін. Вища математика у прикладах та задачах.–Харків: Фактор, 2004.