

6 МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Методи ідентифікації на основі детермінованих, чітко визначених даних зручні, проте їх застосування обмежене. На практиці дані, що використовуються для ідентифікації, отримуються або в результаті вимірювань і містять випадкову похибку, або в результаті експертних оцінок і містять суб'єктивну складову. Тому найчастіше для ідентифікації застосовуються або методи статистики, або штучного інтелекту.

6.1 Статистична ідентифікація

Статистична методи ідентифікація використовується як для обробки даних пасивного експерименту – за умови достатньо великої кількості даних, або для обробки даних активного експерименту – за умови використання випадкових тестових сигналів.

Розглянемо *статистичну постановку задачі ідентифікації*, вважаючи, що вплив (вхідна змінна) $X(t)$ і реакція (вихідна змінна) $Y(t)$ представляють собою випадкові функції або випадкові величини.

Нехай для одновимірного об'єкта, характеристикою якого є оператор A_t (рис. 6.1), можуть бути виміряні випадкові функції входу $X(t)$ і виходу $Y(t)$. Тоді задача ідентифікації зводиться до визначення оператора A_t за результатами вимірювання цих функцій, причому через стохастичний характер функції визначається не сам оператор A_t , а його статистична оцінка A_t^* . Оскільки оцінка оператора A_t^* використовується як характеристика невідомого оператора A_t , необхідно наблизити оцінку оператора A_t^* до істинного значення оператора A_t в розумінні деякого критерію, тобто повинна бути виконана умова близькості випадкової функції $Y^*(t) = A_t^* X(t)$ до випадкової функції $Y(t)$, яка є вихідною змінною об'єкта.

При активній статистичній ідентифікації вхідні *випадкові сигнали* $u(t)$ створюються спеціальними *генераторами* і за своїми характеристиками близькі до *білого шуму*. Використання таких сигналів спрощує наступне визначення динамічних характеристик.

Для успішного проведення активного експерименту необхідно дотримуватись таких умов:

- точність, з якою задаються незалежні вхідні змінні x , які не є випадковими величинами, повинна бути високою. До точності вимірювань вхідної випадкової величини висуваються менш жорсткі вимоги;

- кожна з незалежних змінних не повинна бути лінійною комбінацією решти незалежних змінних;

– інтервал між значеннями вхідних змінних не повинен бути меншим (або дорівнювати) похибці, з якою задають цей інтервал.

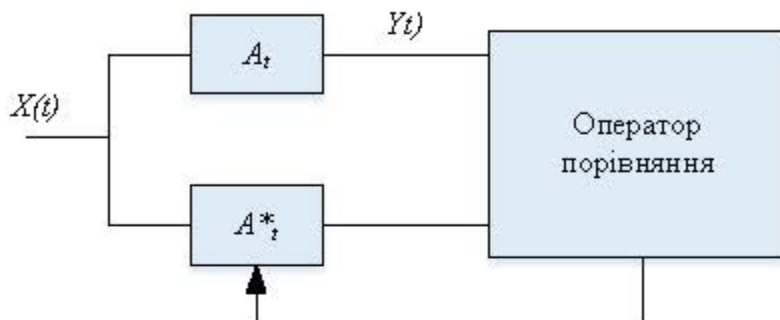


Рисунок 6.1 – Схема процесу ідентифікації

6.1.1 Статистична оцінка законів розподілу випадкових величин

При функціонуванні системи або її елемента протягом деякого часу t випадкова величина X може прийняти n певних значень. Сукупність значень випадкової величини називається *статистичною вибіркою* об'єму n . Якщо розташувати окремі значення випадкової величини X в зростаючому або спадному порядку і вказати щодо кожного значення, як часто воно зустрічалося в даній сукупності, то вийде емпіричний розподіл випадкової величини, або варіаційний ряд, на підставі якого визначаються: аналітична форма невідомої щільності ймовірності $f(x)$, функція розподілу $F(x)$ і оцінюються її параметри.

Розглянемо детальніше процедуру побудови варіаційного ряду.

Весь діапазон значень неперервної випадкової величини X розбивається на інтервали. Далі підраховується кількість значень m_i випадкової величини X , що припадає на кожний інтервал, і визначається частота її потрапляння в даний інтервал за формулою 6.1:

$$p_i^* = \frac{m_i}{n} \quad (6.1)$$

Якщо випадкова величина X приймає значення, що потрапляє на межу i -го та $(i+1)$ - інтервалів, то це значення враховується в числі потраплянь в $(i+1)$ -й інтервал.

Оптимальна довжина інтервалу визначається за формулою 6.2:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.21 \cdot 1.6n} \quad (6.2)$$

де $x_{\max} - x_{\min}$ – розмах варіації випадкової величини X .

Число інтервалів буде $k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta x}$.

Якщо k не ціле число, то як кількість інтервалів потрібно взяти найближче до k ціле число, не менше за k . Варіаційні ряди можуть бути зображені графічно у вигляді полігону розподілу і гістограми.

Полігони розподілу найчастіше використовуються для зображення дискретних варіаційних рядів.

Гістограми найчастіше використовуються для зображення варіаційних рядів з неперервними значеннями випадкової величини X . При зменшенні величини кожного інтервалу гістограма буде наближатися до деякої плавної кривої, що відповідає графіку функції щільності розподілу випадкової величини X .

На основі гістограми звичайно роблять припущення про вид закону розподілу ймовірностей. Параметри закону розраховують статистичною обробкою даних.

1. Середнє значення змінної визначається за формулою

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (6.3)$$

де x_i – емпіричне значення змінної x ; n – число спостережень.

2. Дисперсія

$$D_x = \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}. \quad (6.4)$$

При невеликій кількості даних ($n < 30$)

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}.$$

Правильність визначення виду закону розподілу ймовірностей обов'язково перевіряють за допомогою критеріїв узгодження. Найпоширенішим є критерій Стьюдента, який використовує розподіл помилок обчислення ймовірностей χ^2 (хі-квадрат).

6.1.2 Кореляційний аналіз

Кореляційний аналіз призначений для виявлення лінійних статистичних залежностей між параметрами системи (кореляція на множині параметрів) і для ідентифікації моделі динаміки системи (кореляція у часі).

Статистичний зв'язок полягає в тому, що одна випадкова змінна реагує на зміну значення іншої змінної відповідною зміною свого закону розподілу ймовірності (порівняйте: між x та y існує *функціональна залежність*, якщо кожному можливому значенню x відповідає однозначно визначене значення y). Най-

частіше розглядається зміна не всього закону, а окремих його моментів, наприклад

$$M(Y / X = x) = \varphi_Y(x).$$

Тоді статистична залежність між випадковими процесами – *модель регресії* – має вигляд:

$$y(t) = \bar{y}(t) + \varepsilon, \quad (6.5)$$

де $y(t)$ – реальне значення випадкового процесу; $\bar{y}(t)$ – значення випадкового процесу, отримане за допомогою функції регресії $\bar{y}(x) = M(Y/x) = \varphi_Y(x)$; ε – випадкова величина, що характеризує вплив неврахованих факторів, найчастіше – білий шум.

Дослідження кореляційних зв'язків ми називаємо кореляційним аналізом. Але не кожна функція або кореляція відповідає причинній залежності між явищами. Тому потрібне обов'язкове дослідження причинно-наслідкових зв'язків.

Завдання кореляційного аналізу.

– Вимірювання ступеня зв'язності (тісноти, сили) двох і більше явищ. Тут мова йде, в основному, про підтвердження вже відомих зв'язків.

– Відбір факторів, що роблять найбільш істотний вплив на результативну ознаку на основі вимірювання тісноти зв'язку між явищами.

– Виявлення невідомих причинних зв'язків. Кореляція безпосередньо не виявляє причинних зв'язків між явищами, але встановлює ступінь необхідності цих зв'язків і достовірність суджень про їх наявність. Причинний характер зв'язків з'ясовується за допомогою логічно-професійних міркувань, які розкривають механізм зв'язків.

Нехай x, y – випадкові величини, які мають спільний нормальний розподіл. Зв'язок між x та y можна описати за допомогою *коефіцієнта кореляції*:

$$\rho = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = M \left\{ \frac{X - M(x)}{\sigma_x} \cdot \frac{Y - M(y)}{\sigma_y} \right\}, \quad (6.6)$$

де $M(*)$ – математичне сподівання (операція усереднення); K_{xy} – взаємна коваріаційна функція випадкових величин; σ_x, σ_y – середні квадратичні відхилення.

При обмеженій вибірці розраховується вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)\sigma_x \sigma_y}, \quad (6.7)$$

де n – розмір вибірки.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. Коефіцієнт кореляції приймає значення на проміжку (-1;1).
2. Коефіцієнт кореляції не залежить від одиниць вимірювання величин та від кількості спостережень.

3. Якщо коефіцієнт кореляції $r_{xy} > 0$, то має місце позитивна кореляція, тобто зі збільшенням значень однієї змінної (x) значення іншої (y) відповідно збільшується, а при зменшенні – навпаки.

4. Якщо коефіцієнт кореляції $r_{xy} < 0$, то має місце негативна кореляція, тобто зі збільшенням значень (x) значення (y) відповідно зменшуються.

5. Якщо величини x і y незалежні, то $r_{xy} = 0$.

6. Якщо $r_{xy} = 0$, то випадкові величини x і y є некорельовані, але це не означає, що вони незалежні, між ними може існувати нелінійна залежність, яка при розкладанні її у степеневий ряд не має лінійного члена. Якщо є підґрунтя для посилення, що між x і y існує статистична залежність, яка близька до деякої функції $f(x)$, то можна спробувати шукати кореляцію $r_{x'y}$ між змінною $x' = f(x)$ і y . Категоричніший висновок можна зробити на основі дослідження повніших характеристик випадкових величин (процесів), а саме: законів розподілу ймовірностей. Процеси є незалежними, якщо

$$f(x, y) = f(x) * f(y) \quad (6.8)$$

або

$$f(y/x) = f(y).$$

При вивченні явища, залежного від багатьох факторів, для характеристики тісноти зв'язку використовується *коефіцієнт множинної кореляції*:

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y - y_{/x_i x_j})^2}{n\sigma_y^2}}. \quad (6.9)$$

Кореляційне відношення використовується для оцінювання тісноти зв'язку між двома явищами, зокрема для визначення тісноти зв'язку вихідного ряду y_i з теоретичним рядом.

Залишкова дисперсія визначається за такою формулою

$$\sigma_{\text{зал}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{iT})^2}{n-1}, \quad (6.10)$$

де y_{iT} – теоретичні значення змінної.

Залишкова дисперсія характеризує ту частину розсіювання змінної y , яка виникає через різного роду випадковості і вплив неврахованих факторів.

Коефіцієнт детермінації слугує для оцінювання точності регресії, тобто відповідності отриманого рівняння регресії наявними емпіричними даними, і обчислюється за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_{зал}^2}{\sigma_{нов}^2}, \quad (6.11)$$

де $\sigma_{нов}^2$ – повна дисперсія, тобто $\sigma_{нов}^2 = \sigma_Y^2$.

Змінюється R^2 в межах від 0 до 1, тобто

$$0 \leq R^2 \leq 1.$$

Модель вважається тим точнішою, чим ближче R^2 до 1.

Коефіцієнт детермінації характеризує статистичну залежність навіть у тих випадках, коли лінійна частина цієї залежності відсутня.

Чутливість однієї змінної до іншої $\beta_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x^2}$.

Кореляційний аналіз найчастіше є першим етапом статистичної ідентифікації, і його результати використовуються у інших видах аналізу: спектральному, факторному, регресійному.

6.1.3 Факторний аналіз

При побудові моделі будь-якої системи завжди постає питання, які впливи на систему (*фактори*) є суттєвими і повинні бути враховані в моделі, а якими можна знехтувати без втрати адекватності та значного зменшення точності. Задача може бути розв'язана повним перебором усіх можливих комбінацій значень факторів. Але трудомісткість такого підходу зростає пропорційно факторіалу від кількості факторів. Методи *факторного аналізу* дозволяють розв'язати цю проблему з меншою трудомісткістю.

Для проведення факторного аналізу інформація повинна бути подана у вигляді двовимірної таблиці чисел (матриця вхідних даних). Рядки цієї матриці повинні відповідати окремим спостереженням $X(i=1, 2, \dots, n)$, стовпці – вихідним величинам $Y(j=1, 2, \dots, m)$.

Основна модель факторного аналізу має вигляд

$$X = \{V, U\}$$

$$Y_j = a_{j1}V_1 + a_{j2}V_2 + \dots + a_{jp}V_p + d_jU_j \quad (j=1, 2, \dots, m), \quad (6.12)$$

де y_j – j -а вихідна величина; V_1, V_2, \dots, V_p – загальні фактори (вхідні випадкові величини, які мають нормальний закон розподілу); U_j – характерний фактор; $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jp}$ – факторні навантаження, які характеризують степінь впливу кожного фактора (це саме ті параметри моделі, які підлягають визначенню); d_j – навантаження характерного фактора.

Термін «загальний фактор» підкреслює, що кожен такий фактор має суттєве значення для аналізу всіх величин y_j .

$$\begin{cases} r_{y_j V_1} = a_{j1} + a_{j2} r_{V_1 V_2} + \dots + a_{jp} r_{V_1 V_p}, \\ \dots \\ r_{y_j V_k} = a_{j1} r_{V_k V_1} + a_{j2} r_{V_k V_2} + \dots + a_{jp} r_{V_k V_p}, \\ \dots \\ r_{y_j V_p} = a_{j1} r_{V_p V_1} + a_{j2} r_{V_p V_2} + \dots + a_{jp} \\ r_{y_z U} = d_j \end{cases} \quad (6.16)$$

де $r_{y_j V_k}$ – коефіцієнт кореляції між j -ю вихідною величиною і k -м фактором;
 $r_{V_k V_p}$ – коефіцієнт кореляції між k -м і p -м факторами.

Якщо припустити, що загальні фактори між собою некорельовані, то рівняння (6.16) можна записати у вигляді

$$r_{y_j V_k} = a_{jk} \quad (j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, p), \quad (6.17)$$

тобто факторні навантаження дорівнюють елементам факторної структури.

Наявність попарної кореляційної залежності між факторами називають мультиколінеарністю.

Мультиколінеарна залежність присутня, якщо коефіцієнт парної кореляції $r_{V_j V_k} \geq 0,70/0,80$.

Негативний вплив мультиколінеарності полягає в нижческазаному:

- 1) ускладнюється процедура вибору головних чинників;
- 2) спотворюється зміст коефіцієнта множинної кореляції (він припускає незалежність факторів);
- 3) ускладнюються обчислення при побудові самої моделі;
- 4) знижується точність оцінки параметрів регресії, спотворюється оцінка дисперсії.

Наслідком зниження точності є ненадійність коефіцієнтів регресії і частково неприйнятність їх використання для інтерпретації як міри впливу відповідного фактора на залежну змінну. Оцінки коефіцієнтів стають дуже чутливими до вибірових спостережень. Невелике збільшення обсягу вибірки може призвести до дуже сильних змін у значеннях оцінок. Крім того, помилки оцінок входять у формули критерію значущості, тому застосування самих критеріїв стає також ненадійним. Зі сказаного зрозуміло, що дослідник повинен намагатися встановити стохастичну мультиколінеарність і, по можливості, усунути її.

Для вимірювання мультиколінеарності можна використовувати коефіцієнт множинної детермінації.

При відсутності мультиколінеарності факторів

$$\eta = \sum_{i=1}^m d_{yj}, \quad (6.18)$$

де d_{yj} – коефіцієнт парної детермінації, обчислюється за формулою (6.11).

При наявності мультиколінеарності співвідношення (6.18) не виконується. Тому як міра мультиколінеарності використовується різниця

$$M = \eta - \sum_{i=1}^m d_{yj}. \quad (6.19)$$

Чим менша ця різниця, тим менша мультиколінеарність.

Для усунення мультиколінеарності використовується метод виключення змінних. Цей метод полягає в тому, що сильно корельовані фактори усуваються з регресії і вона заново оцінюється. Відбір змінних, що підлягають виключенню, проводиться за допомогою коефіцієнтів парної кореляції. Досвід показує, що якщо $|r_{yj}| \geq 0,70$, то одну зі змінних можна виключити.

Використовуючи побудовану факторну модель, можна знову обчислити коефіцієнти кореляції між вихідними величинами і порівняти їх з початковими коефіцієнтами кореляції. Різниця між ними є залишковим коефіцієнтом кореляції.

У випадку незалежності факторів для обчислення коефіцієнтів кореляції між параметрами достатньо взяти суму добутків відповідних факторних навантажень:

$$r'_{jk} = a_{j1} a_{k1} + a_{j2} a_{k2} + \dots + a_{jp} a_{kp} \quad (j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, p),$$

де r'_{jk} – коефіцієнт кореляції між j -ю і k -ю вхідними величинами.

Залишковий коефіцієнт кореляції

$$\bar{r}_{jr} = r_{jr} - r'_{jr}. \quad (6.20)$$

Матриця залишкових коефіцієнтів кореляції називається залишковою матрицею чи матрицею залишків

$$\bar{R} = R - R',$$

де \bar{R} – матриця залишків; R – матриця вибірових парних коефіцієнтів кореляції чи повна матриця; R' – матриця обчислених за коефіцієнтів кореляції.

Має місце співвідношення між дисперсією вхідних величин, дисперсією факторів і факторними навантаженнями

$$\sum_{k=1}^p D_k = \sum_{j=1}^m h_j^2 = \sum_{ir} a_{ik}^2 = D.$$

Матрицю факторних навантажень можна отримати різними способами. Найбільше розповсюдження отримав метод головних факторів. Цей метод ос-

нований на принципі послідовних наближень і дозволяє досягти будь-якої точності.

Редукованою матрицею називається матриця вибірових коефіцієнтів кореляції \tilde{R} , у якій по головній діагоналі стоять значення дисперсій загальних факторів h_k^2 ($1, 2, \dots, p$):

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} h_1^2 r_{21} r_{31} \dots r_{m1} \\ r_{12} h_2^2 r_{32} \dots r_{m2} \\ \dots \dots \dots \\ r_{1m} r_{2m} \dots h_m^2 \end{bmatrix}.$$

Редукована і повна матриця пов'язані співвідношенням

$$\tilde{R} = R - \{D\}, \quad (6.21)$$

де $\{D\}$ – матриця дисперсій, зумовлених характерними факторами.

Процедура знаходження факторних навантажень, тобто матриці A , складається з декількох кроків: на першому кроці шукають факторні навантаження при першому факторі так, щоб сума внесків даного фактора в сумарну загальну дисперсію

$$D_1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{p1}^2$$

була максимальною. Максимум D_1 повинен бути знайдений за умови

$$r_{j\xi} = \sum_{k=1}^p a_{jk} a_{\xi k} \quad (j, \xi = 1, 2, \dots, m), \quad (6.22)$$

де $r_{j\xi} = r_{\xi j}$; r_{jj} – дисперсія h_j^2 загального параметра z_j .

Потім розраховують матрицю коефіцієнтів кореляції з врахуванням тільки першого фактора $R'_2 = a_1 a_1'$. Маючи таку матрицю, отримаємо першу матрицю залишків: $R_1 = \tilde{R} - R'_1$.

На другому кроці визначають навантаження на другому факторі так, щоб сума внесків другого фактора у залишкову загальну частину (тобто повну загальну частину без врахування тої частини, яка припадає на частину першого фактора) була максимальною. Сума квадратів навантажень при другому факторі

$$D_2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{p2}^2.$$

Максимум D_2 знаходять за умови

$$\bar{r}_{j\xi}^1 = \sum a_{jk}^1 a_{\xi k}^1 \quad (j, \xi = 1, 2, \dots, m),$$

де $\bar{r}_{j\zeta}^1$ – коефіцієнт кореляції з першої матриці залишків; $a_{jk}^1, a_{\zeta k}^1$ – факторні навантаження з урахуванням другого фактора.

Потім розраховують матрицю коефіцієнтів кореляції з урахуванням другого фактора і обчислюють другу матрицю залишків: $\bar{R}_2 = \bar{R}_1 - R_2'$ і так далі.

Адекватність факторної моделі оцінюється за матрицею залишків (якщо величини її коефіцієнтів малі, то модель вважається адекватною).

6.1.4 Регресійний аналіз

Регресійний аналіз призначений для побудови моделі статистики шляхом статистичної обробки результатів пасивного експерименту.

Одностороння імовірнісна залежність між випадковими величинами – це регресія. Регресія є окремим випадком апроксимації, коли для побудови залежності використовується достатня для статистичного аналізу кількість експериментальних даних.

Види регресії

1. За кількістю змінних розрізняється:
 - проста регресія $y = f(x)$ – регресія між двома змінними y і x ;
 - множинна регресія $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – регресія між залежною змінною y і декількома впливовими факторами x_1, x_2, \dots, x_m .
2. За формою залежності:
 - лінійна регресія, виражається лінійною функцією параметрів;
 - нелінійна регресія, виражається нелінійною функцією параметрів.
3. За типом впливу величин:
 - безпосередня регресія: в цьому випадку залежна змінна і впливові фактори пов'язані безпосередньо одна з одною;
 - непряма регресія: у цьому випадку впливовий фактор діє на залежну змінну через ряд інших змінних;
 - помилкова регресія: виникає при формальному підході до досліджуваних явищ без з'ясування того, які причини зумовлюють даний зв'язок.

Поняття «регресія» тісно пов'язане з «кореляцією». У кореляційному аналізі оцінюється сила зв'язку, а в регресійному аналізі досліджується його форма.

Завдання регресійного аналізу

- Встановлення форми залежності (лінійна або нелінійна);
- Визначення функції регресії і встановлення впливу факторів на залежну змінну. Важливо не тільки визначити форму регресії, вказати загальну тенденцію зміни залежної змінної, але і з'ясувати, яка була б дія на залежну змінну головних чинників, якби інші не змінювалися і якби були виключені випадкові елементи;

– Оцінка невідомих значень залежної змінної, тобто розв’язання задач екстраполяції та інтерполяції.

Вихідні передумови регресійного аналізу та властивості оцінок

Передумова 1. При знаходженні оцінок змінної у припускається існування залежності змінної у тільки від тих факторів, які увійшли в модель (регресію). Вплив інших факторів і випадковостей враховується випадковою збурювальною змінною z . При цьому вважаємо, що середнє значення змінної z дорівнює нулю.

Передумова 2. Передбачається, що вплив неврахованих факторів постійний. Так, при розгляді часових рядів в різні періоди ці невраховані фактори справляють однаковий вплив.

Передумова 3. Відсутня автокореляція між збурювальними змінними.

Передумова 4. Число спостережень має перевищувати число параметрів регресії, інакше оцінювання цих параметрів неможливе.

Передумова 5. Передбачається одностороння залежність змінної у від факторів $x_i (i = \overline{1, m})$.

Передумова 6. Залежна змінна і фактори $x_i (i = \overline{1, m})$ розподілені нормально.

За допомогою регресійного аналізу при зазначених вище передумовах знаходять оцінки параметрів, що найкраще узгоджуються з дослідними даними. Ці оцінки повинні мати нижчезказані властивості.

1. *Незміщеність оцінок* параметрів регресії. Оцінка параметрів регресії називається незміщеною, якщо при збільшенні числа спостережень оцінка параметра наближається до його математичного сподівання. Треба відзначити, що оцінки, отримані методом найменших квадратів, мають властивість незміщеності.

2. *Ефективність оцінок* параметрів регресії. Незміщена оцінка параметра регресії називається незміщеною ефективною, якщо вона серед всіх інших незміщених оцінок цього ж параметра має найменшу дисперсію.

3. *Достатність оцінки.* Якщо β являє собою достатню оцінку параметра, то не існує іншої оцінки цього параметра, яку можна отримати за вибіркою з деякою генеральної сукупності і яка дала б додаткову інформацію про нього. Р. Фішер показав, що кількість вимірювальної інформації, що міститься в деякій оцінці, дорівняє оберненій величині від її дисперсії. Таким чином, поняття достатності еквівалентно вимозі мінімальної дисперсії. Достатня оцінка з необхідністю має бути ефективною і, таким чином, також незміщеною.

Вибіркові рівняння регресії

Умовне математичне сподівання випадкової величини $M(Y|X)$ є функція від X , яка називається функцією регресії і дорівнює $f(x)$, тобто

$$M(Y|X) = \bar{y}_x = f(x); \quad (6.23)$$

аналогічно

$$M(X|Y) = \bar{x}_y = \varphi(y). \quad (6.24)$$

Графічне зображення $f(x)$ або $\varphi(y)$ називається лінією регресії, а записані рівняння (6.23) і (6.24) – рівняннями регресії.

Оскільки умовне математичне сподівання M випадкової величини Y є функція від x , то його оцінка \bar{y} (умовна середня) також є функцією від x . Позначимо цю функцію через

$$\bar{y}_x = f^*(x). \quad (6.25)$$

Рівняння (6.25) визначає вибіркоче рівняння регресії y на x . Сама функція $f^*(x)$ називається вибірковою регресією Y на X , а графік $f^*(x)$ – вибірковою регресією.

Функція регресії незворотна, тому що мова йде про середні величини для деякого конкретного значення фактора.

Лінійна регресія

Нехай задана система випадкових величин X і Y .

Модель регресії має вигляд:

$$y(t) = \bar{y}(t) + \varepsilon, \quad (6.26)$$

де $y(t)$ – реальне значення випадкового процесу; $\bar{y}(t)$ – значення випадкового процесу, отримане за допомогою функції регресії; ε – випадкова величина, що характеризує вплив неврахованих факторів, найчастіше – білий шум.

Функція регресії випадкової змінної y відносно x – це умовне математичне сподівання $M(Y/x)$ випадкової змінної y , тобто

$$\bar{y}(x) = M(Y/x) = \varphi(x, b_1, b_2, \dots, b_m).$$

Крива регресії є емпіричною оцінкою функції регресії.

Для знаходження параметрів регресії застосовується метод найменших квадратів. Практичний спосіб визначення коефіцієнтів рівняння регресії ґрунтується на припущеннях:

- 1) лінійна залежність між змінними;
- 2) значення помилки нормально розподілене з середньою і постійною дисперсією D ;
- 3) всі процеси є стаціонарними.

Тоді функція лінійної регресії має вигляд:

$$M_{y/x} = M_y + r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} [x - M_x] \quad (6.27)$$

де $\beta = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ – коефіцієнт регресії.

Залишкова дисперсія лінійної регресії

$$D_{y/x} = D_y(1 - r_{xy}^2) \quad (6.28)$$

При побудові багатовимірних залежностей використовується *коефіцієнт множинної регресії*.

Множинна лінійна регресія має такий вигляд:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m, \quad (6.29)$$

де y – функція регресії; x_1, x_2, \dots, x_m – незалежні змінні; a_1, a_2, \dots, a_m – коефіцієнти регресії; a_0 – вільний член рівняння; m – число факторів, що входять в модель.

Метод найменших квадратів застосовується і для знаходження параметрів множинної регресії. У цьому випадку число лінійних рівнянь зростає, і такі системи рівнянь вирішуються за допомогою ЕОМ.

Важливим етапом побудови регресійної моделі є *аналіз залишків* (похибок) у вигляді різниць $y_i - y_i^*$. Можна виділити найхарактерніші результати аналізу залишків.

1. Виявлення *викидів*, тобто різних екстремальних значень відхилення y_i від розрахункового значення y_i^* . При виявленні викиду необхідно повторити експеримент в точці викиду, попередньо перевіривши правильність його умов. Якщо викид стійкий, то його потрібно чи відкинути і перерахувати коефіцієнти моделі без нього, чи зайнятись дослідженням природи його існування.

2. Виявлення деякого *тренду* в залишках, тобто тенденції в їх зміні з плином часу. Наприклад, в залишках спостерігається тенденція до лінійного зростання. Для покращення моделі підраховують поправку у вигляді різниці $\left(\frac{y_i - y_i^*}{y_i^*} - a_i \right)$, де $a_i = k \cdot N$, $k = \operatorname{tg} \alpha$, α – кут нахилу усередненої “лінії залишків” до осі абсцис, N – номер експерименту.

3. Виявлення різкого зсуву рівня процесу. В цьому випадку можна з’ясувати причину різкого стрибка похибки, а потім розбити вибірку на дві і для кожного рівня побудувати модель.

4. Виявлення змін в дисперсії помилки. Якщо дисперсії помилки неоднорідні, то знайдена середня дисперсія може недостовірно описувати частину експериментальних даних.

5. Дослідження залишків для перевірки того, чи описуються вони нормальним законом розподілу. В цьому випадку можна перевірити випадковість значень.

Етапи побудови багатофакторної кореляційно-регресійної моделі

Розробка моделі і дослідження процесів повинні виконуватися за такими етапами:

- А) апріорне дослідження проблеми;
- Б) формування переліку факторів і їх логічний аналіз;
- В) збір вихідних даних та їх первинна обробка;
- Г) специфікація функції регресії
- Д) відбір головних факторів;
- Е) оцінювання функції регресії.

Розглянемо докладніше зміст етапів.

А. *Апріорне дослідження проблеми.* Відповідно до мети роботи конкретизуються явища, процеси, залежність між якими підлягає оцінюванню.

На цьому етапі дослідження повинні бути сформульовані осмислені і прийнятні гіпотези про залежність явищ.

Б. *Формування переліку факторів і їх логічний аналіз.* Для визначення найбільш розумного числа змінних у регресійній моделі, перш за все, орієнтуються на міркування професійно-теоретичного характеру. Виходячи з фізичного змісту явища, виробляють класифікацію змінних на залежну і впливові фактори.

В. *Збір вихідних даних та їх первинна обробка.* При побудові моделі вихідна інформація може бути зібрана в трьох видах:

- динамічні (часові) ряди;
- просторова інформація – інформація про роботу декількох об'єктів в одному розрізі часу.

Г. *Специфікація функції регресії.* На даному етапі дослідження дається конкретне формулювання гіпотези про форму зв'язку (лінійний або нелінійний, простий або множинний і т. д.). Для цього використовуються різні критерії для перевірки спроможності гіпотетичного виду залежності. На цьому етапі перевіряються передумови кореляційно-регресійного аналізу.

Д. *Відбір головних чинників.* Вибір факторів – основа для побудови багатофакторної кореляційно-регресійної моделі.

На етапі формування переліку чинників і їх логічного аналізу збираються всі можливі фактори, зазвичай більше 20–30 факторів. Але це незручно для аналізу, і модель, що містить 20–30 чинників, буде нестійкою.

Мало чинників – теж погано. Це може призвести до помилок при прийнятті рішень в ході аналізу моделі. Тому необхідно вибирати більш раціональний перелік факторів. При цьому проводять аналіз чинників на мультиколінеарність.

Для відбору факторів використовується факторний аналіз.

Е. *Оцінювання функції регресії.* Тут визначаються числові значення параметрів регресії і обчислюється ряд показників, що характеризують точність регресійного аналізу.

6.1.5 Спектральний аналіз

Для ідентифікації моделі динаміки лінійних систем використовують автота- взаємно- кореляційні функції. Проте це вимагає досить складних математич-

них перетворень. Значно простіше (як з огляду на складність обробки даних, так і на практичну реалізацію експериментів) здійснювати ідентифікацію на основі спектрів сигналів (для детермінованих сигналів в умовах активного експерименту), або на основі спектральних щільностей (для випадкових сигналів в умовах пасивного експерименту).

Методика ідентифікації моделі динаміки $W(p)$ на основі спектрів вхідного і вихідного детермінованих сигналів наведена у пункті 5.2.2. Гармонічний спектр детермінованого сигналу є функцією амплітуд гармонічних складових від частоти $A(\omega)$. Проте у пасивному експерименті практично не зустрічаються детерміновані сигнали. А для випадкових сигналів спектр не є коректною характеристикою, оскільки на кожному проміжку часу він різниться. Тому для стохастичних сигналів знаходять і використовують для ідентифікації усереднену спектральну характеристику – спектральну щільність.

Спектральна щільність $G(\omega)$ стаціонарного випадкового процесу $x(t)$ – це частотна функція, що характеризує спектральний (частотний) склад процесу і являє собою частотну характеристику для середніх значень квадратів амплітуд гармонік, на які може бути розкладений випадковий процес. Спектральна щільність являє собою перетворення Фур'є від кореляційної функції

$$G_{xx}(j\omega) = \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (6.30)$$

$$G_{xy}(j\omega) = \int_0^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (6.31)$$

Відповідно $G_{xx}(\omega)$ – це автоспектральна щільність, а $G_{xy}(\omega)$ – взаємна спектральна щільність.

Примітка. Щоб визначити кореляційну функцію $R_{xx}(\tau)$ за відомою спектральною щільністю $G_{xx}(\omega)$ використовується обернене перетворення Фур'є

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(j\omega) e^{-j\omega\tau} d j\omega. \quad (6.32)$$

Для взаємної кореляційної функції аналогічно.

Для $\tau=0$ маємо

$$R_{xx}(0) = D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{xx}(j\omega) d j\omega. \quad (6.33)$$

За своїм фізичним змістом спектральна щільність є величиною, яка пропорційна середній потужності процесу в інтервалі частот від ω до $\omega+d\omega$. На рис. 6.2 зображені характеристики $R(\tau)$ і $|G(j\omega)|$ для різних випадкових процесів.

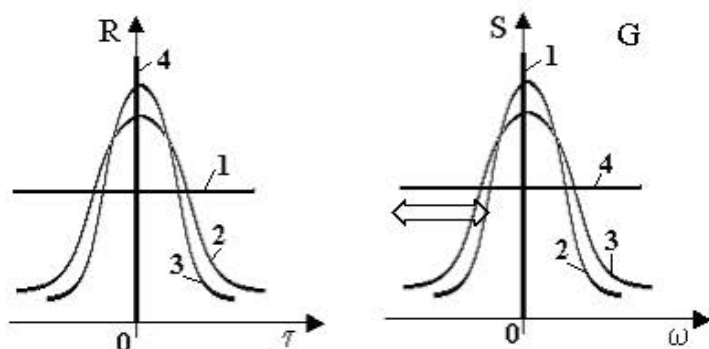


Рисунок 6.2 – Графіки спектральних щільностей і кореляційних функцій для різних випадкових процесів

Криві 4 на рис. 6.2. відповідають випадковому процесу, коли зв'язок між наступними значеннями $x(t)$ зовсім відсутній. Такий випадковий процес називається білим шумом, тобто $|G(\omega)| = \text{const}$, а $R(\tau \neq 0) = 0$.

Отже, для дослідження об'єктів і систем з випадковим входним впливом необхідно обчислення або кореляційних функцій $R(\tau)$, або спектральних щільностей $G(j\omega)$ входних і вихідних змінних.

Для встановлення взаємозв'язку між кореляційними функціями змінних входу і виходу системи, а також взаємозв'язки між їх спектральними щільностями використовується відоме інтегральне рівняння (інтеграл Дюамеля), на підставі якого

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\tau} R_{xx}(\tau_1)g(\tau - \tau_1)d\tau_1 \quad (6.34)$$

де $g(\tau)$ – імпульсна перехідна функція системи; τ_1 – допоміжний час інтегрування.

З наведених вище виразів можна отримати зв'язок між спектральними щільностями входної і вихідної величин об'єкта при випадкових стаціонарних процесах

$$\begin{aligned} G_{xy}(j\omega) &= G_{xx}(j\omega) \cdot W(j\omega); \\ G_{yy}(j\omega) &= G_{xy}(j\omega) \cdot W^*(j\omega); \\ |G_{yy}(\omega)| &= |W(j\omega)|^2 \cdot |G_{xx}(j\omega)|, \end{aligned} \quad (6.35)$$

де $W(j\omega)$ – частотна передатна функція системи; $W^*(j\omega)$ – комплексно спряжена частотна передатна функція.

Таким чином, передатну функцію системи можна визначити на основі спектральних щільностей стаціонарного випадкового процесу на вході і виході системи

$$W(j\omega) = \frac{G_{xy}(j\omega)}{G_{xx}(j\omega)}$$

Якщо відомі лише модулі спектральних щільностей (це буває, коли приладами реєструються лише амплітудні характеристики сигналів), то може бути визначена амплітудно-частотна характеристика системи

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{\frac{|G_{yy}(j\omega)|}{|G_{xx}(j\omega)|}} \quad (6.36)$$

Знаходження передатної функції на основі її модуля може здійснюватися аналогічно до викладеної у п. 5.2.2 методики отримання виразу передатної функції за допомогою активного експерименту з синусоїдальними сигналами.