МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

В. В. Кузьменко, Г. Г. Швачич, Г. І. Рижанкова, В. М. Пасинков

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

РОЗДІЛ “Множини”

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як конспект лекцій

Дніпропетровськ НМетАУ 2004

УДК 510.6

Кузьменко В. В., Швачич Г. Г, Рижанкова Г. І., Пасинков В. М. Основи дискретної математики. Розділ “Множини”: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2004. – 36с.

Викладені основні поняття теорії множин, яка розвивалася в XIX сторіччі в трудах Г. Кантора, Р.Дедекінда, Г. Фреге та ін., в контексті сучасних концепцій дискретної математики та основ програмування.

Призначений для студентів спеціальності інформаційні управляючі системи та технології.

Іл. 17.Бібліогр.: 15 найм.

Відповідальний за випуск Г. Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенти: Б. І. Мороз., д-р техн. наук, проф. (Академія митної Служби України)

Д. Г. Зеленцов., канд. техн. наук, доц. (УДХТУ)

ТЕМА 1 МНОЖИНА, ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ, ВКЛЮЧЕННЯ МНОЖИН

Під множиною розуміється клас, сукупність, збори різноманітних предметів, байдуже якої природи. Відповідно до визначення, що дав засновник теорії множин Г. Кантор, множиною є будь-які збори визначених і різноманітних об'єктів нашої інтуїції, які мисляться як єдине ціле. Істотно насамперед те, що збори предметів розглядаються як один предмет, мислиться як єдине ціле.

Не слід розуміти множину як сукупність дійсно існуючих предметів, що володіють усіма реальними характеристиками, наприклад, визначеними просторовими або тимчасовими властивостями. Приналежність до множини не потребує співіснування в часі і просторі: усі математики утворять один клас, хоча і живуть у різних країнах; Аристотель і Г. В. Ф. Гегель належать до множини видатних філософів, хоча вони жили в різний час.

Множина в математичній логіці – це «абстрактний об'єкт», у котрому кожна його складова розглядається лише з погляду ознак, що утворюють зміст визначеного поняття. Всім предметам однієї множини ми приписуємо однакові ознаки, відмінність їх один від одного визначається по їх іменам.

Предмет, що належить даній множині, називається його елементом. Елементи множини позначаються – x, y, z, … (або x_1, x_2, x_3, …) а самі множини – A, B, C, …

Якщо множина містить кінцеве число елементів, її називають кінцевою, якщо в неї нескінченно багато елементів – безкінцевою.

Знаком Î позначається відношення приналежності елемента до тої або іншої множини. Вираз $\boxed{x \in A}$ означає, що елемент **x** належить множині **A.** Якщо **x** не є елементом множини **A**, то це записується так $\boxed{x \notin A}$.

Якщо дві множини A и B складаються (кількісно та якісно) з одних і тих самих елементів, то вони рахуються рівними. Якщо A і B рівні, то записують A = B, у іншому випадку – A ≠ B. Так {2, 4, 6} є множина, що складається з трьох перших позитивних парних чисел. Оскільки {2, 4, 6} і

{2, 6, 4} складаються з тих самих елементів, вони є рівними множинами. По цій же причині {2, 4, 6} = {2, 4, 4, 6}.

Елементи якоїсь множини самі можуть бути множинами. Наприклад: {{1, 3}, {2, 4}, {5, 6}} є множина з трьох елементів, саме {1, 3}, {2, 4}, {5, 6}.

Множини {{1, 2}, {2, 3}} і {1, 2, 3} не рівні, елементами першої є {1, 2} і {2, 3}, а елементами другої – 1, 2 і 3.

Множини {{1, 2}} і {1, 2} також не рівні, оскільки перша множина, складається з одного і тільки одного елемента – {1, 2} (одноелементна множина), а друга має своїми елементами 1 і 2. У загальному вигляді, слід розрізняти предмет і множину, єдиним елементом якої є цей предмет.

Множину вважають заданою, якщо володіємо засобом, котрий дозволяє для будь-якого даного предмета вирішити, чи належить він цій множині або ні, тобто визначити істинно або ні висловлення $x \in A$ (при відповідному значенні змінних x і A).

Задати множину можна різноманітними засобами. Один із них складається в тому, що задається повний список елементів, які входять у множину. Якщо необхідно сказати, що множина A складається з елементів x_1, x_2, x_3, … $x_{п}$, то записуємо $A: = \{x_1, x_1, x_3, \dots x_n\}$... Наприклад, множина арифметичних дій складається з елементів додавання, вирахування, множення і розподілу.

Засіб завдання елементів списком застосовується тільки для кінцевих множин, але не до усіх. Наприклад, хоча множина риб кінцева, навряд чи можна задати її списком. Тим більш, список неможливий у випадку безкінцевої множини.

Застосовується інший засіб, що складається в завданні множини характеристичними предикатами, тобто вказівкою такої властивості, (предиката), яка належить будь-якому предмету, котрий є елементом даної множини, і не належить жодному предмету, що не є її елементом

($M: = \{x \mid P(x)\}$ - «множина усіх x, що володіють властивістю P»).

У математичній логіці варто ототожнювати такі поняття: **<u>властивість ° предикат</u>**

Множина може бути задана також процедурою, що породжує саму множину $M: \{x \mid x: = f\}$.

ЗАСОБИ ЗАВДАННЯ МНОЖИН

<u>Перерахуванням елементів</u>:	**M: = {a_1, a_2, … a_n};**
<u>Характеристичним предикатом</u>	**M: = {x ½ P (x)};**
<u>Процедурою, що породжує множину</u>	**M: = {x ½ x : = f}.**

Два перші засоби завдання множин припускають, що є можливість ототожнювати та розрізняти предмети. Але така можливість існує не завжди, у цьому випадку виникають різноманітного роду ускладнення. Так, може бути, що дві різноманітні характеристичниі властивості задають ту саму множину, тобто кожний елемент, що володіє однією властивістю, володіє й іншим, і навпаки. Наприклад, в арифметиці властивість «ціле число ділиться на 2» задає ті ж множини, що і властивість «остання цифра числа ділиться на 2». У багатьох випадках мова йде про збіг двох множин (наприклад: множини рівнобічних трикутників із множиною рівнокутних трикутників). Крім того, при завданні множин характеристичним предикатом труднощі виникають через недостатню визначеність, неоднозначність природної мови. Розмежування об'єктів на приналежні і ті, що не належать даній множині, ускладнюється також і наявністю великого числа проміжних форм.

Особо виділяється універсальна множина, тобто така множина, яка складається з усіх елементів досліджуваної предметної області (вона позначається літерою U, а в геометричній інтепретації зображується множиною крапок у середині прямокутника).

Порожня множина – не містить жодного елемента (позначається символом ∅). Якщо множина задана своїми характеристичними властивостями, то вона не завжди заздалегідь відома, але дійсно існує хоча б один елемент із такими властивостями. Наприклад, невідомо, чи порожня множина всіх натуральних чисел n таких, що $n > 2$, а рівняння $x_n + y_n = z_n$ має позитивні цілочислені рішення (у цьому складається знаменита проблема Ферма). Багато математичних (і не тільки математичних) проблем можна сформулювати як твердження про порожню множину.

Парадокс Бертрана Рассела

Завдання множини характеристичним предикатом може призводити до протиріч. Наприклад, усі множини не містять себе в якості свого елемента Y = {X │ X ∉ X} – множина Y не містить сама себе в якості свого елемента. Якщо множина Y існує, то ми повинні мати можливість відповісти на таке питання:

Нехай Y Î Y, тоді Y Ï Y. Нехай Y Ï Y, тоді Y Î Y

У цьому випадку утворюється логічне протиріччя, що відомо як парадокс Бертрана Расела. <u>Існують три засоби уникнути цього протиріччя</u>.

1. **Обмежити використовувані характеристичні предикати у вигляді**

P(x) = x Î A L **Q(x)**

A – відома, існуюча множина (універсум). При цьому використовується позначення {x ∈ A │ Q(x)}, для Y універсум не зазначений, а тому, Y множиною не є.

2. **Теорія типів**. Об'єкти мають тип 0, множини мають тип 1, множини множин мають тип 2 і т.д. Y не має типу і множиною не є.
3. **Характеристичний предикат P(x) заданий у вигляді функції**, що обчисляється. Засіб обчислення значення предиката X ∈ X не заданий, а тому Y множиною не є.

Останній із перерахованих засобів лежить в основі конструктивізму – напрямку в математиці, у рамках якого розглядаються тільки такі об'єкти, для яких відомі процедури їх породження. У конструктивній математиці виключаються з розгляду деякі поняття і методи класичної математики, що чреваті можливими парадоксами.

Підмножини

Будь-яку частину множини називають підмножиною. Якщо деяку універсальну множину задати характеристичним предикатом P – U= {x │ P (x)}, то множини A, B, C, …, які є частинами U , визначаються властивостями P_a, P_b, P_c, … Отже підмножина A визначається $A \overset{Dt}{=} \{x \mid x \in U \ \ и \ \ P_a \ \ (x)\}$ («A є по визначенню множина всіх тих і тільки тих x, що належать U і мають властивість P_a»). Якщо, наприклад U –

множина людей, а P_a – бути учнем вищого навчального закладу, то А – множина студентів.

Якщо властивості, якими задана множина і її підмножина, збігаються, то ці множини будуть рівні. Рахується, що множина є частиною самої себе, або «цілком частиною».

Якщо предикат, котрим задається підмножина, суперечить предикату, за допомогою якого задана сама множина, то ця підмножина буде порожньою. Порожня множина є частиною будь-якої множини.

Повну і порожню частини називають невласними множинами. Всі інші підмножини є власними.

Якщо відомо число елементів даної множини, то загальне число підмножин буде 2^n (де n - число елементів). З порожньої множини можна утворити тільки одну підмножину – сама порожня множина (при n = 0, $2^0 = 1$).

Якщо предмет позначити X, а його характеристичний предикат P, то об`єм поняття, що відбиває цей характеристичний предикат, буде множиною, кожний елемент якої, підставлений на місце перемінної X в формулі P(x), буде давати істене судження.

Нехай у формулі P(x) P означає «бути непарним», тоді замість x можуть бути підставлені змінні 1, 3, 5, 7 і т.д., при цьому ми одержуємо істині судження («1 – непарне число», «3 – непарне число» і т.д.).

Вираз P(x) однаковий за змістом з виразом $x \in P$. Так говорячи про властивість «бути непарним», розуміємо множину предметів, кожен з яких має цю властивість.

Говорячи про будь-який предмет, визначаємо не тільки властивості, якими він володіє, але й відношення до інших предметів, які його характеризують.

Відношення позначаються буквою R (перша буква латинського слова Relatio - відношення). Вираження xRy або R(x, y) читається: «предмет x знаходиться до предмета в y відношенні R».Такі поняття як «більше», «менше», «дорівнює» «причина», «функція», відбивають визначене відношення між предметами. Наприклад, для відношення «менше» необхідно два предмети, щоб відбити значуще припущення («2 менше 3», «5 менше 4» – пропозиції, перша з яких виражає істене висловлення, а друга – помилкове).

Пари предметів, утворюючі об`єм поняття «менше», є упорядкованими, тому, пара 2 і 3 входить в об`єм даного поняття, а 5 і 4 ні. У загальному виді цю обставину можна записати $<x, y> \in R$, що означає «упорядкована пара x, y, є елементом R». Розглядаємо відношення R як множину упорядкованих пар елементів. Такого роду відношення називають двомісними. Можуть бути трьохмісні і т.д. відношення.

Об`єм поняття, який відбиває відношення між предметами, складає множину упорядкованих пар (трійок, четвірок і т.д.), що пов'язані з R визначеними властивостями. Пари, які входять у визначене поняття, утворюють істині висловлення.

Знаком $\subseteq$ позначаються відношення включення множини, тобто $A \subseteq B$ («множина A включена в B»). Це означає, що кожний елемент множини A є також і елементом множини B. При цьому A називається підмножиною, а B – надмножиною.

$A \subseteq B$ – це включення у широкому змісті. Не виключено, що $A = B$. Якщо A включено у B, і при цьому $A \neq B$ (тобто існують елементи B, що не належать A), то A строго включається у B. У цьому випадку A буде власною підмножиною B, що записується $A \subset B$. Інколи вживають вирази $B \supset A$ – «B містить у собі A».

ТЕМА 2 ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Нехай A, B, C, … – підмножини деякої універсальної множини U.

В універсальнії множини U всіх можливих підмножин (включаючи $\varnothing$ – порожню множину та U – саму універсальну множину) визначємо чотири операції: 1) доповнення, 2) перетинання, 3) об'єднання, 4) різницю.

Доповненням множини A (позначається ~A або A`, читається «не-**A**») називається множина, яка складається з елементів U (універсальної множини), котрі не належать множині A.

Вираз має форму запису: $\overline{A} \overset{Df}{=} \{x \mid x \in U \ i \ x \notin A\}$ (не-А дорівнює множині всіх елементів <u>**x**</u> із <u>U</u>, які не належать множині **А**).

Графічний результат операції доповнення множини А

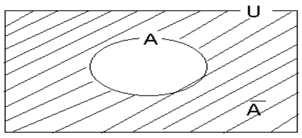


Рис.1

Будь-який елемент універсальної множини належить або А, або $\overline{A}$, але не може належати їм обом.

Доповненню множини відповідає операція над поняттями, яку називають запереченням поняття.

Перетинанням множин А та В (позначається А∩В, та А*В; читається «перетинання А і В») називається множина яка складається з елементів, що належать як множині **А**, так і множині В.

Вираз має форму запису: $A \cap B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \ i \ x \in B\}$ (перетинання А і В дорівнює множині елементів **x**, де **x** є елементом як **А**, так і **В**). Інакше кажучи, x ∈ A ∩ B тоді і тільки тоді, коли x ∈ A та x ∈ B.

Наприклад, {1, 2, 3} ({1, 3, 4} = {1, 3}

Графічний результат операції перетинання множин **А** і **В**.

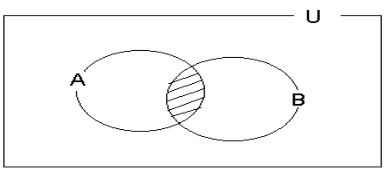


Рис.2

Відповідно визначається і результат перетинання будь-якого числа n множин $A_1, A_2, \ldots, A_п$ – як множина всіх елементів, що належать і A_1, і A_2, і …, A_n. Отримана множина позначається: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

Якщо множини А і В видалані з універсальної множини характеристичними предикатами, P_a і $P_в$, то перетинання $A \cap B$ – це множина, що складається з елементів, які володіють обома зазначеними властивостями.

Перетинання множин є операція усюди визначена, тобто вона має місце для множин, що знаходяться в будь-яких ставленнях. Якщо є дві непустих множини (А і В), то існує п'ять взаємовиключних засобів, котрими можуть бути логічно пов'язані ці множини (малюнок 3).

Такі відношення називають: 1. лівобічне включення;

3. правобічне включення.

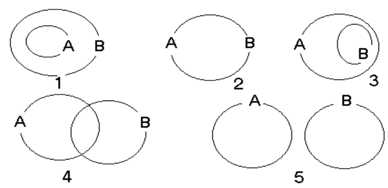


Рис.3

Операція перетинання множин має на меті знаходження загальних елементів двох або більшої кількості множин. Перетинанню відповідає операція над поняттями, яку називають множенням понять.

Знаходити загальні елементи множин доводиться для розв'язання задач у різноманітних областях науки і практичної діяльності. Наприклад, множина всіх квадратів є результатом перетинання множини всіх прямокутників із множиною всіх ромбів. Результатом перетинання множини натуральних чисел, що діляться на 2 та множини натуральних чисел, що діляться на 3, є множина натуральних чисел, яка ділиться на 6.

Об'єднанням множин А і В (позначається $A \cup B$, читається «об'єднання А з В») називається множина, яка складається з елементів, котрі належать хоча б одній з множин А або В.

Вираз має форму запису: $A \cup B \overset{Df}{=} \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$
(Об'єднання А з В дорівнює по визначенню множині елементів **x**, де **x** є елемент А або елемент В). Потрібно мати на увазі, що спілка «або» вживається у змісті «і/або». На малюнку 4 заштрихована область яка зображує результат об'єднання А і В.

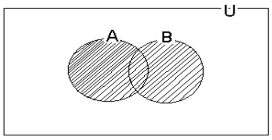


Рис. 4

Результатом об'єднання будь-яких n множин $A_1, A_2, \ldots, A_п$ зветься множина всіх елементів, котрі належать хоча б одній з них. Нова множина позначається $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_п$.

Об'єднанню множин відповідає операція над поняттями, яку називають додаванням понять. Операція об'єднання множин є усюди визначеною, так само, як і операція перетинання множин.

Множини, які об'єднуються мають спільні елементи, тобто їх перетинання не буде порожнім. Повторювані елементи в об'єднанні рахуються тільки по одному разу, тому для кінцевих множин число елементів об'єднання може виявитися меншим, чим загальна сума елементів множин, які об'єднуються. По визначенню $x \in A \cup B$, коли x є елементом хоча б однієї з множин А або В. Наприклад, $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. На малюнку 5 зображений результат об`єднання множин з повторюваними елементами.

Приклад додавання понять: якщо об'єднаємо множини усіх студентів **(**А**)** і молоді у віці від 17 до 22 років **(**В**)**, то кількість елементів $A \cup B$ буде подано сумою трьох чисел:

1) кількість студентів, які не досягли 17 років,
2) кількість студентів, котрим більш 22 років,
3) кількість молоді, що не є студентами.

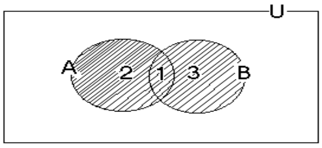


Рис.5

Різницею множини А и В (позначається А\ В або А Ç $\overline{B}$**,** іноді **А – В**) називається множина, котра складається з елементів множини А, які не належать множині В. Вираз має форму запису: $A\cap\overline{B} \overset{Df}{=}$ {x | x ∈ А і x ∉ В}. (Перетинання А з не-В дорівнює, по визначенню, множині елементів **x**, де **x** є елементом множини А та **x** не є елементом множини В).

Отже, x ∈ А ∩ $\overline{B}$ тоді і тільки тоді, коли x ∈ А и x ∉.

Діаграма Эйлера-Венна (на малюнку 6) подає графічне зображення результату цієї операції.

Множини А та В мають також іншу різність – $\overline{A}$ ∩ В, вона складається з елементів множини В, котрі не належать множині **А**.

Вираз має форму запису: $A\cap\overline{B} \overset{Df}{=}$ {x | x ∉ А і x ∈ В}.

Таким чином, x ∈ $\overline{A}$ Ç В тоді і тільки тоді, коли x ∉ А и x ∈ В.

Різниці двох множин бувають порожніми і непорожніми.

Доповнення множини А є окремий випадок різниці множин $\overline{A}$ = U \ A.

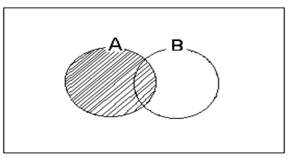


Рис.6

Над множинами, отриманими в результаті чотирьох визначених операцій, можна у свою чергу робити ті ж самі операції. Так, можна утворювати доповнення перетинання **(**$\overline{A \cap B}$**)**, об'єднання ($\overline{A \cup B}$) або різниці **(**$\overline{A \cap \overline{B}}$**)**; можна утворити перетинання об'єднань (A ∪ B) ∩ (C ∪ D) або об'єднання перетинань (A ∩ B) ∪ (C ∩ D) і т.д.

Для вказівки порядку операцій застосовуються скобки. Відношення між скобками, знаками Ç і È таке ж, як між скобками, зі знаками * і + в елементарній алгебрі. Доповнення береться від усього виразу, над якими стоїть штрих (або від усього виразу, що стоїть в дужках, поруч із якими стоїть штрих).

Потрібно пам'ятати, що всі наведені операції можна робити тільки над множинами, що належать до однієї універсальній множині.

ТЕМА 3 ОСНОВНІ ЗАКОНИ АЛГЕБРИ МНОЖИН

ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Операції над множинами підпорядковані законам елементарної алгебри. Підпорядкованість більш очевидна, якщо знаки перетинання й об'єднання множин замінити на знаки множення і додавання. Цим визначається назва вивчаємого підрозділу “Алгебра множин”. Алгебру множин називають також булевою алгеброю, що пов`язано з ім'ям англійського математика і логіка Дж. Буля, який поклав в основу своїх логічних досліджень ідею аналогії між алгеброю і логікою.

Закони алгебри множин

1. Закон тотожністі A = A.
2. Закон протиріччя A ∩ $\overline{A}$ = ∅.
3. Закон виключного третього A ∪ $\overline{A}$ = U.

Перші три закони є виразом, на мові булевої алгебри множин, основних законів мислення.

4. Закон ідемпотичності (лати. Idem – те ж, potentia – сила):

I. для перетинання A ∩ A = A;

II. для об'єднання $A \cup A = A$.

5. Комутативний закон

I. для перетинання $A \cap B = B \cap A$;

II. для об'єднання $A \cup B = B \cup A$.

6. Асоціативний закон

I. для перетинання $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$;

II. для об'єднання $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.

7. Дистрибутивний закон

I. для перетинання з об'єднанням $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

II. для об'єднання з перетинанням $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

8. Закон поглинання

I. для перетинання з об'єднанням $A \cap (A \cup B) = A$;

II. для об'єднання з перетинанням $A \cup (A \cap B) = A$.

Якщо довільна непорожня множина A перетинається й об'єднується з універсальною і порожньою множинами, то одержимо такі чотири правила:

I. $A \cap U = A$;

II. $A \cup U = U$;

III. $A \cap \varnothing = \varnothing$;

IV. $A \cup \varnothing = A$.

9. Закон де Моргана

I. для доповнення перетинання $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

II. для доповнення об'єднання $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

10. Закон подвійного доповнення (заперечення) $\overline{\overline{A}} = A$.

11. Доповненням універсальної множини є порожня множина, а доповнення порожньої множини є універсальна множина, тобто:

I. $\overline{U} = \varnothing$;

II. $\overline{\varnothing} = U$.

Закони алгебри множин по відношенню до операцій перетинання й об'єднання підпорядковані принципу двоїстості: якщо в будь-якій вірній тотожності алгебри множин усі знаки перетинання замінити знаками об'єднання, а всі знаки об'єднання – знаками перетинання, знак універсальної множини замінити знаком порожньої множини, а знак порожньої множини – знаком універсальної множини, то одержимо знову вірну тотожність. У силу цього принципу, наприклад, з А $\cap$ $\overline{A}$ = $\varnothing$ випливає, що А $\cup$ $\overline{A}$ = U і т.п.

Якщо в булевій алгебрі множин знаки перетинання й об'єднання замінити на знаки множення і додавання, то при такій заміні всі приведені вище закони перейдуть у відомі закони елементарної алгебри.

Закони тотожності, комунікативний і асоціативний мають місце в елементарній алгебрі. У ній буде справедливим також перший дистрибутивний закон, проте другий – не має сенсу. Виявляться зрадливими закони ідемпотичності (вони показують відсутність у булевій алгебрі ступенів і коефіцієнтів), поглинання і подвійного доповнення, а принцип двоїстості в звичайній алгебрі просто не визначений.

Перевірка істинності тотожностей за допомогою діаграми Эйлера-Венна

Два кола (у загальному положенні, тобто пересічні) поділяють всю універсальну множину на чотири області (малюнок 7):

I. А $\cap$ В;

II. А $\cap$ $\overline{B}$;

III. $\overline{A}$ $\cap$ В;

IV. $\overline{A}$ $\cap$ $\overline{B}$.

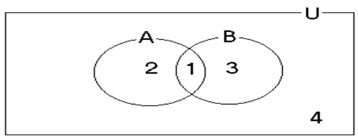


Рис.7

Не важко зауважити, що множина (А $\cap$ В) $\cup$ (А $\cap$ $\overline{B}$) $\cup$ ($\overline{A}$ $\cap$ В) збігається з множиною А $\cap$ В. Звідси слідує тотожність:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B.$$

З малюнка 1 видно, що $\overline{(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})}$ = (A $\cap$ $\overline{B}$) $\cup$ ($\overline{A}$ $\cap$ B), тому що множина, записана ліворуч, від знака рівності, і множина, записана праворуч, зображуються однією і тією ж областю.

Три кола (у загальному положенні, тобто взаємно пересічні) оділяють універсальну множину на вісім частин (малюнок 8):

I. $A \cap B \cap C$;

II. $A \cap B \cap \overline{C}$;

III. $A \cap \overline{B} \cap C$;

IV. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

V. $\overline{A} \cap B \cap C$;

VI. $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$;

VII. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$;

VIII. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

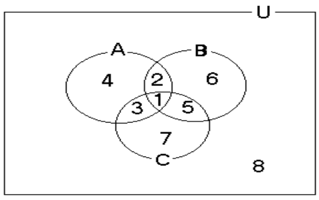


Рис.8

Малюнок дає можливість сформулювати:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = (A \cup B) \cap C.$$

Так само й

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = A.$$

Для того, щоб довести тотожність множин за допомогою діаграми Эйлера-Венна, необхідно:

I. Накреслити відповідну діаграму, і заштрихувати усі множини, що стоять у лівій частині рівності;

II. Накреслити другу діаграму і зробити теж для правої частини рівності;

III. Якщо на обох діаграмах буде заштрихована та сама область, то дана тотожність – істинна.

ТЕМА 4 БУЛЕВІ ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Сукупність усіх підмножин множини **X**, включаючи порожню множину, зветься булеаном X і позначається $\mathbf{2^x}$. Елементи булеана $\mathbf{2^x}$ (X_1, X_2, …, X_1) утворюють його розбивку, якщо $X_i \neq \varnothing$, i = 1, 2, …, r, i

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_г; \qquad X_i \cap X_j = \varnothing, \qquad i \neq j. \qquad (1)$$

Множини $X_1, X_2, \ldots, X_г$ – блоки розбивки булеана.

Сукупність всіх упорядкованих пар (x, y) при $x \in X$, $y \in У$, називається декартовым множенням множин X та У і позначається X*У, тобто
$$X*У = \{(x, y) : x \in X, y \in У\}.$$

Аналогічно визначається декартове множення r множин
$$X_1*X_2*\ldots*X_г = \{(x_1, x_2, \ldots, x_г) : x_1 \in x_1, x_2 \in X_2, \ldots, x_г \in X_г\},$$
При збігу множин визначається їх декартова ступінь $X^{(г)} = X*X*\ldots*X$.

Нехай X – кінцева множина та |X| – число її елементів. Сформулюємо аксіоматичне правило, яке лежить в основі багатьох комбінаторних обчислень і оцінок.

I Правило суми. Якщо X – кінцева множина, то
$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_г, X_i \in 2^x,$$
$i = 1, 2, \ldots, r$, то $$|X| \leq |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_г|, \qquad (2)$$
При цьому рівність досягається, коли $X_1, X_2, \ldots, X_г$ утворять розбивку X.

II Правило утворення блоків розбивки для кінцевих множин $(X_1, X_2, \ldots, X_г)$ $$|X_1*X_2*\ldots*X_г| = |X_1| * |X_2| * \ldots * |X_г|. \qquad (3)$$

Бінарні відповідності і бінарні відношення

Пара $R \subseteq X*У$ є бінарною відповідністю на множинах X та У.

Якщо $(x, y) \in R$, то x і y є проекціями на кардинатні осі X та У. Відповідною буде форма запису: I $x = \pi_1(x, y)$,

II $y = \pi_2(x, y)$.

Для бінарної відповідності $R \subseteq X*У$ визначимо проекції на X та У:
$$\pi_1 (R) = \{x : x = \pi_1(x, y), \qquad (x, y) \in R\},$$
$$\pi_2 (R) = \{y : y = \pi_2(x, y), \qquad (x, y) \in R\}.$$

Проекції $\pi_1(R)$ і $\pi_2(R)$ називають областю визначення R.

Образом елемента $x \in X$ при відповідності R є множина
$$\delta_1(x; R) = \{y : y \in У, \qquad (x, y) \in R\}.$$

Аналогічно прообразом елемента $y \in У$ при відповідності R є множина $$\delta_2(y; R) = \{x : x \in X, \qquad (x, y) \in R\}.$$

Бінарна відповідність $\varphi \subseteq X*У$ називається функціональною, якщо образ кожного елемента $x \in X$ містить рівно один елемент.

Для множин $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_п\}$, $У = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ бінарній відповідності $R \subseteq X*У$ можна зіставити матрицю:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|,\ i = 1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,m,\quad \text{таку, що}\quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in R, \\ 0, & (x_i, y_j) \notin R. \end{cases}$$

Матриці, елементи яких приймають значення 0 та 1, называют 0, 1-матрицями.

0, 1-матрицю А, яка відповідає подвійності R, називають матрицею інцедентності.

При $X = У$ бінарна відповідність $R \subseteq X*X$ буде називатися бінарним відношенням на множині X. Прикладом бінарного відношення на множині X є відношення рівності $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$, яке назване діагоналлю множини X.

Бінарному відношенню R на кінцевій множині X ставиться у відповідність геометричний об'єкт, названий орієнтованим графом.

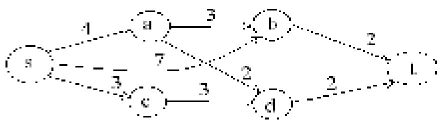


Рис.9

Кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність точка на площині, яка зветься вершиною. Якщо $(x, x`) \in R$, то об`єкт між двома точками **x** та **x`** звуть дугою. Діаграма (X, R) є сукупністю вершин і дуг, відношення R.

Для бінарного відношення R на множині X, якщо $(x, x`) \in R$, записуємо: xRx'. Використовуючи введене позначення, сформулюємо ряд властивостей, якими володіють бінарні відношення:

I. Рефлективність xRx для усіх $x \in X$;

II. Антирефлективність $R \cap \Delta_X = \varnothing$;

III. Симетричність із xRx' випливає $x'Rx$;

IV. Антисиметричність із xRx' і $x'Rx$ слідує $x = x`$;

V. Транзитивність із xRx', $x'Rx''$ слідує xRx'';

VI. Дихотомія або xRx', або $x'Rx$, $x, x` \in X$.

Бінарне відношення R на множині X зветься відношенням еквівалентності, якщо воно одночасно рефлексивно, симетрично і транзитивно.

Якщо R – відношення еквівалентності і xRx', то пишуть $x \sim x'$. Множина елементів $K(x) = \{x`: x` \sim x\}$ є класом еквівалентності, який містить **x, x Î X**. Класси еквівалентності утворюють розбивку множини **X.** Сформулюємо й обернене висловлення: будь-якій розбивці **X** відповідає відношення еквівалентності, класи якого збігаються з правим та лівим кордонами зазначеної розбивки. Множина всіх класів еквівалентності називається фактормножиною даного відношення еквівалентності.

Бінарне відношення R на множині X є відношенням часткового порядку, якщо воно рефлексивно, антисиметрично і транзитивно. Множина X є частково упорядкованою множиною. Якщо R – відношення часткового порядку і xRx', то пишуть: $x \preccurlyeq x`$.

Відношення часткового порядку R, яке задовольняє умові дихотомії, зветься відношенням лінійного порядку або відношенням порядку. Запис $x \preccurlyeq x``$ використовується для позначення того, що x і x` пов'язані відношенням R лінійного порядку: xRx'.

На множині X можна визначити відношення суворого часткового (лінійного) порядку $\prec$ (<) вважаючи $x \prec x`$ ($x < x`$), якщо $x \preccurlyeq x`$($x \le x`$) і $x \ne x`$.

На кінцевій множині X завжди можна задати відношення суворого порядку, які визначають перестановку елементів множини. Число відношень дорівнює $|X|!$

На булеані 2^x можна задати відношення часткового порядку, вважаючи $X \preccurlyeq X`$ тоді і тільки тоді, коли $X \subseteq X`$ для всіх $X, X` \in 2^x$.

На декартовій ступені $X^{(г)}$ кінцевої множини X з заданим суворим лінійним порядкам установлюються відношення лінійного порядку, якщо: $(x_1, x_2, \dots, x_г) < (x_1`, x_2`, \dots, x_г`)$ для $(x_1, x_2, \dots, x_г), (x_1`, x_2`, \dots, x_г`) \in X^{(г)}$.

Для найменшого індексу I з властивістю xi $\neq$ xi', має місце висловлення порядку xi < xi'. Названий порядок іменують дискриптивним, або лексикографічним, тому що він використовується для упорядкування слів у словниках.

ТЕМА 5 ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ ПРО УПОРЯДКУВАННЯ МНОЖИН

Символи N, Z, Q, R, C використовуються для позначення різноманітних числових систем; припустимо, що

$$N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\},\ N_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Позначення, застосовувані при упорядкуванні в теорії множин

- Потужність множини (2^M) (кардинальне число) множини M. Позначається через |M|; якщо M нескінченна упорядкована множина, то |M| = ¥.
- Для будь-якої множини M символ $M^к$ позначає декартове множення:

$$M^к = \{(a_1, \ldots, a_к): a_i \in M\}.$$

- $M^{(к)}$ – сімейство k-підмножин множини M: $M^{(к)} = \{A \subseteq M: |A| = k\}$.
- Кінцева потужність множини n називається n-множиною: |M| = n.
- Символ Кронекера – δ_{ij} позначає тотожне відображення множини M на себе через $id_м$, множину усіх своїх підмножин.
- Символи **(: =)** або **(: Û)** вживаються в тих випадках, коли визначаються уявлення про конкретну множину.

Основні правила теорії перерахувань

I. Правило рівності**.** Якщо N і R – кінцеві множини й існує взаємоодназначне відображення між ними, то |N| = |R|.

II. Правило суми**.** Якщо $\{A_i: i \in I\}$ – кінцеве сімейство кінцевих попарно не пересічних множин, то $|\cup_{i \in I} A_i| = \sum_{i \in I} |A_i|$.

III. Правило множення**.** Якщо $\{A_i : i \in I\}$ – кінцева множина кінцевих множин, то для декартова множення $\prod_{i \in I} A_i$ має місце тотожність

$$|\prod_{i \in I} A_i| = \prod_{i \in I} |A_i|.$$

Для опису множин, що входять в об'єднання, але не пересікаються, використовуються символи $A \cup B$ або $\cup_{i \in I} A_i$.

Мультимножина (на множині S) – це множина S разом із функцією

$r: S \to N_0$ яка задає кратність елементів множини S.

Вираз має форму запису: мультимножина k відображена на S

$$k = \{ a^{k_a} : a \in S\}, \text{ где } k_a := r(a),\ a \in S.$$

Звичайні поняття, визначені для множин, переносяться і на мультимножини. Наприклад, якщо

$k = \{ a^{k_a} : a \in S\}$ та $L = \{ a^{l_a} : a \in S\}$ то

$k \subseteq L : \Leftrightarrow k_a \le L_a$ для всіх $a \in S$;

$k \cap L := \{ a^{\min(k_a, l_a)} : a \in S\}$,

$k \cup L := \{ a^{\max(k_a, l_a)} : a \in S\}$.

Сімейство мультимножин на множині S утворює структуру, яка зветься штахетом щодо операції вкладення множини в мультимножину; цей штахет – завжди повний. Будь-який штахет представляється у вигляді графа.

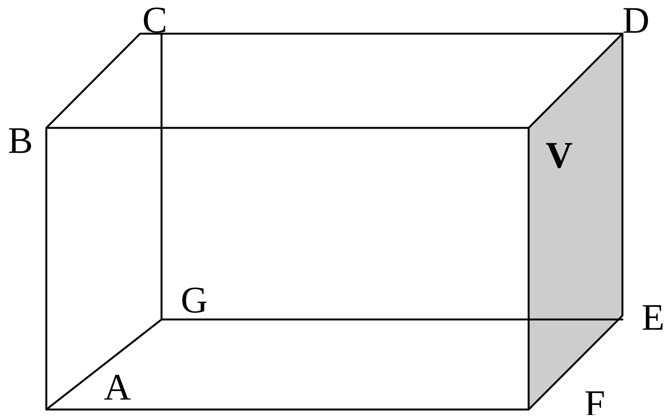


Рис.10

На малюнку 10 зображений штахет у вигляді графа, у якого, множина вершин {A, B, C, D, E, F, V, G}. Граф неорієнтований, оскільки кожне з його ребер {AB, BC, CD, DE, EF, FA, FV, VD, VB, AG, GE, GC} не має векторної спрямованості. Ребра графа утворять мультимножину всіх його ребер.

Початкові відомості про графи і їх застосування в теорії множин

Неориентований граф G(V, E) складається з непорожньої **V,** множиною вершин, і мультимножини E неупорядкованих пар {a, b} ребер.

Простий граф – це граф, який не містить петель {a, a} і паралельних ребер {a, b}, {a, b}, тобто граф, у якого $E \subseteq V^{(2)}$ – звичайна множина.

Орієнтований граф (орграф), $\vec{G}(V, E)$ – це непорожня множина V вершин і мультимножина E орієнтованих пар (a, b) із V. Елементи E називають стрілками, або орієнтованими ребрами, або дугами.

Орієнтація на неорієнтованому графі G(V, E) – це напрямок, який приписують кожному ребру k = {a, b}. В разі напрямку (a, b); пишемо a=k, b = k^+. Граф кінцевий, якщо V, та E кінцеві.

Два графи G(V, E) і G'(V', E') ізоморфні, якщо існує взаємне відображення φ: $V \to V'$, таке, що ребра $\{a, b\} \in E$ та $\{\varphi(a), \varphi(b)\} \in E`$ входять в E і E` з однаковою кратністю. Ступінь $\gamma(\nu)$ вершини ν = це число ребер, инцидентних ν (петлі $\{\nu, \nu\}$ рахуємо двічі). Отже, для кінцевого графа G(V, E) завжди справедливо $\sum_{n \in V} g(n) = 2|E|$.

Двома важливими типами графів є повні графи K_n та повні двочасткові графи $K_{m,n}$

K_n – простий граф із n вершинами, кожна пара яких сполучена ребрами.

$K_{m,n}$ – простий граф, множина вершин якого є об'єднанням двох пересічних множин потужності m і n відповідно, при цьому дві вершини сполучені ребрами тільки тоді, коли вони належать різним множинам.

Двочастковий граф – це підграф повного двочасткового графа, який позначається через $G(V_1 \cup V_2, E)$, щоб відзначити множини вершин $\mathbf{V_1, V_2}$, у яких кожне ребро з'єднує вершину $\mathbf{V_1}$ з вершиною $\mathbf{V_2}$.

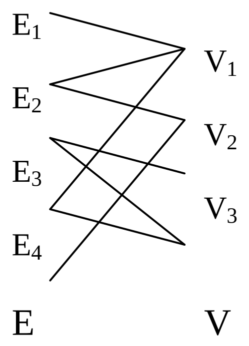
Останнє правило – найбільш корисний засіб у теорії перерахувань

IV. Правило підрахунку підмножин і простих елементів мультимножини.

Нехай G $(V_1 \cup V_2, E)$ – кінцевий дводольний граф із визначальними множинами вершин V_1 V_2, тоді $\sum_{n \in V_1} g(n) = \sum_{n \in V_2} g(n) \quad (= |E|)$.

Дводольний граф $G(V_1 \cup V_2, E)$ слід також розглядати як орієнтований граф, усі ребра якого спрямовані з V_1 у V_2. Інакше кажучи, дводольниі графи з визначальними множинами вершин V_1 і V_2 ототожнюються з бінарними відношеннями між V_1 і V_2. Для позначення множини ребер використовується буква R**,** а в графі G $(V_1 \cup V_2, R)$ читаємо $R(E)$: $= \cup_{V \in E}\{ V_1 \in E:(x, y) \in R\}$ для $E \subseteq V_1$ та, аналогічно, $R(V)$: **=** $\cup_{E \in V}\{E \in V_1: (x, y) \in R\}$ для $E \subseteq V_1$. Для одноэлементної множини {E} пишемо R(E).

Схема дводольного графу G(V E)



Система множин

E = {1, 2, 3, 4,}
V = {{1, 2, 3}, {2,}, {3}}.

Системою множин (V, E) називається множина **V** разом із сімейством підмножин множини E (які не обов'язково перетинаються) Будь-яка система множин (V, E) задає двочастковий граф у якому $(p, V) \in R :\Leftrightarrow p \in V$. Обернено, любой двочастковий граф $V(V \cup E, R)$ породжує систему множин (V, E)**,** якщо $V \in E$ з множиною $R(V) \subseteq E$.

Тема 6 Ізоморфізм множин

Поняття лінійного простору складається з двох різноманітних частин:

I. Лінійний простір є сукупністю векторів.

II. На лінійному просторі діють операції додавання та множення на число.

При аналізі лінійного простору, або множин, визначають як природу і властивості векторів, так і властивості арифметичних операцій, незалежно від природи елементів, над якими вони відбуваються.

Дві множини, влаштовані однаково стосовно операцій додавання і множення на число, володіють однаковими властивостями, які називають ізоморфними.

Поняття ізоморфізму формулюється таким чином:

Два лінійних простори над одним і тим самим тілом коефіцієнтів, або дві множини, називаються ізоморфними, якщо між їх елементами можливо встановити таку взаємно однозначну відповідність, при якій сумі векторів першого простору буде відповідати сума відповідних векторів другого простору, а добутку якогось числа на вектор першого простору буде відповідати добуток того ж числа на відповідний вектор другого простору.

Взаємно однозначна відповідність, яка володіє зазначеними властивостями, називається ізоморфізмом.

Властивості ізоморфізмів

- При ізоморфній відповідності нульовий вектор першого простору обов`язково переходить у нульовий вектор другого простору.
- При ізоморфному відображенні лінійного простору ς на линійний простір ς_1 вектор a лінійного простору ς переходить у a_1 відповідного лінійного простору ς_1.
- Відповідно до визначення ізоморфізму добуток 0*a переходить у добуток $0*a_1$, тобто нульовий вектор першого простору переходить в нульовий вектор другого.

При ізоморфному відображенні система відображень векторів першого простору переходить у систему відображень векторів другого простору.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ – утворюючі вектори першого простору та $b_1, b_2, \dots, b_s$ – відповідні їм вектори другого простору. Візьмёмо у другому просторі довільний вектор b та розглянемо вектор a, що відповідає йому, у першому просторі. Вираз, який описує вектор a, уявимо у формі:

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s.$$

По визначенню ізоморфного відображення сума $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s$ перейде в суму $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_s b_s$, отже, вектор b співпаде з сумою $\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_s b_s$. З цього виходить, що вектори $b_1, \ldots, b_s$ складають систему утворюючих другого простору.

При ізоморфізмі линийно незалежні вектори першого простору переходять у линийно незалежні вектори другого простору.

Нехай, линийно незалежні вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ першого простору переходять у вектори $b_1, b_2, \ldots, b_m$ другого простору. Між векторами двох просторів існує співвідношення: $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m = 0_1$.

Відповідно до визначення ізоморфізму, лівій частині наведеної рівності відповідає в першому просторі вектор $\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_m a_m$. Нульовому вектору 0_1 відповідає в першому просторі нульовий вектор 0. Отже, $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_m b_m = 0$.

Відповідно тому, що вектори $a_1, \ldots, a_m$ линийно незалежні

$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = 0$, вектори $b_1, \ldots, b_m$ також линийно незалежні.

З двох останніх властивостей безпосередньо витікає:

База першого лінійного простору, при ізоморфізмі, переходить в базу другого лінійного простору. Таким чином, ізоморфні лінійні простори, а також ізоморфні множини, мають однакову розмірність.

Зворотне так само справедливо:

Якщо два лінійних простори над одним тілом коефіцієнтів мають однакову розмірність, то вони ізоморфні.

Для доказу виберемо в кожному з заданих просторів певну базу, наприклад $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Вектори $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$, та $b = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n$ будуть називатися відповідними, якщо $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$.

Тому що кожний вектор лінійного простору може бути виражений через базу тільки одним засобом, відповідність стає взаємооднозначною. Нехай $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$, та $b = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n$ два відповідних вектори. Тоді

$$\alpha a = \alpha\alpha_1 a_1 + \alpha\alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha\alpha_n a_n,$$

$$\alpha b = \alpha\alpha_1 b_1 + \alpha\alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha\alpha_n b_n.$$

Виходячи з того, що відповідні коефіцієнти в вищезазначених розкладаннях рівні, αa та αb будуть відповідними векторами, тобто добуток числа на вектор першого простору переходить у добуток того ж числа на відповідний вектор другого простору.

Аналогічно доводиться і та властивість, що сума векторів одного простору переходить у суму відповідних векторів другого простору. Тому побудована відповідність являються ізоморфізмом, що і було потрібно довести.

Перераховані вище властивості ізоморфних відповідностей показують, що при заданому основному тілі К кожний лінійний простір визначається своєю розмірністю з точністю щодо ізоморфізму. Простір рядків довжини n, з елементами тіла К, при n = 1, 2, …, з точністю до ізоморфізму вичерпує взагалі всі простори кінцевої розмірності над К. Зокрема, звичайний простір спрямованих відрізків, изоморфний просторові рядків, певнї довжини $\Im$ над полем речовинних чисел. Простір функцій, визначених на множині $\Im$, що містить s елементів, із значеннями в тілі К изоморфний простору рядків довжини s з елементами з К і т. д.

Унітарним модулем над кільцем К з одиницею називається алгебра, сигнатура якої складається з бінарної операції та символу, F_α ($\alpha \in$ К) одномісних операцій, за умови, що в цій алгебрі виконуються тотожності:

M_1: $x + y = y + x$;

M_2: $x + (y +z) = (x +y) + z$;

M_3: $x + (y + (-y)) = x$;

M_4: $F_\alpha(F_\beta(a)) = F_{\alpha\beta}(a)$;

M_5: $F_\alpha (a + b) = F_\alpha(a) + F_\alpha(b)$;

M_6: $F_{\alpha+\beta}(a) = F_\alpha(a) + F_\beta(a)$;

M_7: $F_1(a) = a$.

Основне кільце К нескінченне. В якості окремих основних операцій, множення елементів основної множини (векторів), на любий фіксований елемент застосовуються вираз $\alpha \in$ К. При такому визначенні, сигнатура модуля так само нескінчена. Змінюючи кільце К, змінюємо і сигнатуру класу модулів.

ТЕМА 7 УПОРЯДКОВАНІ МНОЖИНИ

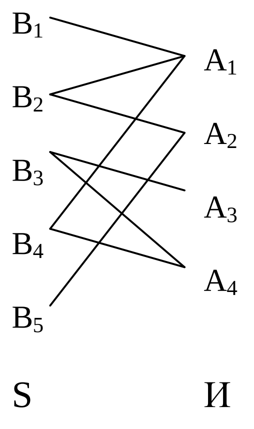
Якщо P – упорядкована множина, то P* – подвійна упорядкована множина, отримана обертанням відношення порядку у множині P. Якщо P містить єдиний мінімальний елемент, то він називається найменшим, або 0-елементом, та позначається 0. Аналогічно, єдиний максимальний елемент називається найбільшим**,** або 1-елементом, та позначається 1. Множина b покриває множину a**,** якщо a < b, або множина a покрите множину b, якщо b < a. З співвідношення $a < x \le b$ випливає $x = b$.

- Атоми – це елементи, які покривають 0 (якщо 0 існує).
- Коатоми – елементи, що покриваються одиницею.

Упорядкована множина P подається за допомогою її діаграми, орієнтованого графа P, у якому з вершини a до вершини b проведене орієнтоване ребро. Це можливо тільки тоді, коли b покриває a. Діаграма будується знизу нагору і без стрілк.

Приклад

Схема орієнтованого графу



Упорядковані множини

$S = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$

$И = \{\{A_1, A_2, A_4\}, \{A_2, A_5\}, \{A_3\}, \{A_3, A_4\}\}.$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(0, 1)-матриця.

I Ланцюг – це упорядкована множина, у котрій будь-які два елементи порівнянні. Для ланцюга $\{a_1 < a_2 < \dots < a_п\}$ використовується скорочене позначення $\{a_1, \dots, a_п\}$.

II Довжина ланцюга на одиницю меньше потужності множини яка названа ланцюгом.

III Висота L(a) – це елемент $a \in P$ – де довжина самого довгого ланцюга складається з елементів множини P, та закінчується елементом a.

IV Антиланцюг – це множина у якій ніякі два елементи не порюються.

Ланцюг в упорядкованій множині P не роздріблений, якщо будь-який його елемент покривається наступним елементом. Нехай L – штахет, в такому разі порожня підмножина M зветься підштахетом, якщо виконується умова $x, y \in M$, яка тягне за собою визначені співвідношення:

$$x \wedge y \in M \text{ та } x \vee y \in M.$$

Подмножина $M \subseteq L$ може бути штахетом щодо своїх власних законів, які індуцировані відношенням порядку. Інтервал в упорядкованій множині P – це будь-яка множина $[a, b]: = \{x \in P: a \leq x \leq b\}$, $a, b \in P$.

Добуток $\prod_{i \in I} P_i$ упорядкованих множин Pi – це упорядкована множина з координатним відношенням порядку. Добуток штахетів знову є штахет.

Сума $\sum_{i \in I} L_i$ штахетів, кожен з який містить 0-элмент, – це підштахет у добутку $\prod_{i \in I} L_i$, який складається з векторів, у котрих лише кінцеве число координат відрізняється від 0. Якщо не обговорений зворотній вираз, то вважається, що множини N_0, N_i, N_n, наділені природним відношенням порядку.

Повний штахет – це такий штахет, у якому будь-яка непорожня підмножина має найменший і найбільший елементи. Якщо W – слово, яке складається тільки з штахету L та символів $\wedge$, $\vee$, $\leq$ і (,), то подвійний вираз W* утворюється за допомогою заміни символів $\wedge$ на $\vee$ та $\leq$ на $\geq$.

Упорядкованість у множині (слові) W для всіх значень його перемінних x_i тягне за собою упорядкованість в подвійно упорядкованій множині (слові) W* для всіх значень перемінних x_i. Таке твердження зветься принципоп бінарності для штахетів. Слово W називається самоподвійним, якщо W* = W.

Різноманітні необхідні позначення при упорядкуванні множин

- Нехай a $\in$ R. Символом [a] позначається найменьше ціле число множини R, якщо [a] $\leq$ a. Відповідно позначається найбвльше ціле число множин R, якщо[a] $\geq$ a.
- Іноді використовується символом #**{…},** для позначення потужність порожньої множини {…}.
- Розбивкою множини S називається об'єднання, яке не перетинається з самою множиною S = $\bigcup_{i \in I} A_i$.
- Щоб зазначити розбивку множини також використовується позначення S = $A_1|A_2|$.
- Множина A_i вважається непорожньою, якщо не обгрунтоване зворотнє твердження.

Щоб спростити запис операції підсумовування, іноді відзнається індекс, по якому ведется підсумовування, зіркою. Наприклад, нехай M = $[m_{ij}]$ – матриця розміру n*n. Тоді $\sum_{1 \leq i^* < j \leq n} m_{ij} = m_{1j} + m_{2j} + \ldots + m_{j-1,j}$.

Класи відображень

Дано дві множини позначені N та R та відображення f: N → R, яке задовольняє визначеним умовам. Трійка (N, R, f) називається морфізмом. Нове відображення, що утворилося замість N та R розбивається на класи з наступним перерахуванням і упорядкуванням в них. Завжди насамперед потрібно описати умови комбінаторного характеру, які накладаються на поперетжнє відображення.

Нехай (N, R, f) – морфізм. У більшості випадків N і R кінцеві множини. Для позначення їх потужності використовуються символи n = |N| та r = |R|, f описується за допомогою виразу f = $\begin{pmatrix} \mathbf{K} & a & \mathbf{K} \\ \mathbf{K} & f(a) & \mathbf{K} \end{pmatrix}$, (a $\in$ N). У цьому випадку f: N → R. – зветься стандартним уявленням відображення Частіше за все область N буде природньо упорядкованою. Наприклад, три вирази $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ a & a & b & b\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 4 & 3 & 2\\ a & b & b & a\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 2\\ b & b & a & a\end{pmatrix}$ подають одне і теж відображення.

Символьні позначення відображень

Відображенню f: N → R співставимо образ im(f) і ядро ker(f);

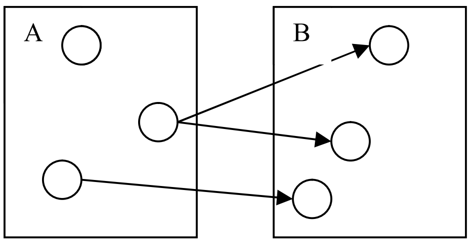
$$\mathrm{im}(f) := \bigcup_{a \in N} f(a), \qquad \ker(f) := \bigcup_{b \in im(f)} f^{-1}(b).$$

Ядро відображення f – це розбивка множини N, яка індуцирована відношенням еквівалентності $a \approx a: \Leftrightarrow f(a) = f(a')$ $(a, a' \in N)$.

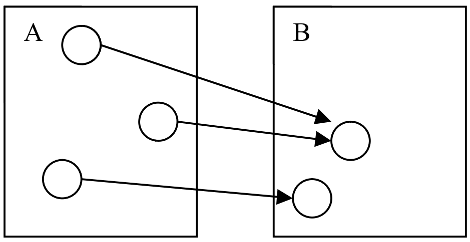
Зручно ввести порожнє відображення $f_{\varnothing}$ з образом $\mathrm{im}(f_{\varnothing}) = \varnothing$ із невизначеним ядром. Відображення f: N → R зветься сюр\`єктивним, якщо im(f) = R, та ін\`єктивним, якщо ker(f) = 0 (0 – мінімальний елемент у штахеті розбивок множини N), тобто якщо $a \neq a\grave{}\ \Rightarrow f(a') \neq f(a')$ для всіх $a, a\grave{} \in N$. Відображення котрі одночасно сюр\`єктивні та ін\`єктивні, звуться бієктивнымими.

Діаграми відображень

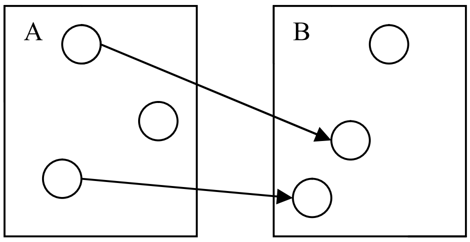
I Map (N, R) : = {f: N → R, f довільне}



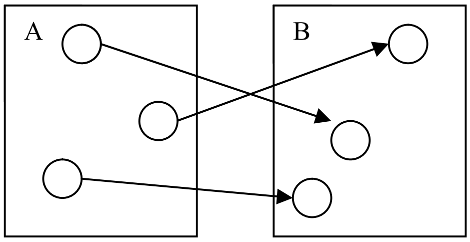
II Sur (N, R) : = {f: N → R, f сюр\`єктивне}



III Inj (N, R) : = {f: N → R, f ін\`єктивне}



IV Bij (N, R) : = {f: N → R, f біємтивне}



Якщо множини N і R кінцеві, то одержуємо такі співвідношення між їх потужностями:

$$\mathrm{Sur}\ (N, R) \neq \varnothing \Rightarrow |N| \geq |R|,$$

$$\mathrm{Ing}\ (N, R) \neq \varnothing \Rightarrow |N| \leq |R|,$$

$$\mathrm{Bij}\ (N, R) \neq \varnothing \Rightarrow |N| = |R|.$$

При відображенні f: N → N кінцевої множини N на себе поняття сюр\`єктивності, ін\`єктивності та бі\`єктивності збігаються. Для безкінечної множини це не вірно. Наприклад, f: N → R, f(k) = 2k ін\`єктивно, але не сюр\`єктивно.

Припустимо, що множини N та R частково упорядковані (малюнок 11)

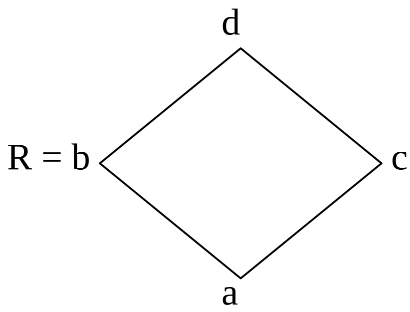


Рис.11

Відображення $f \in$ Map (N, R) називається монотонним, якщо воно зберігає відношення порядку, тобто якщо $a \leq_N b \Rightarrow f(a) \leq_R f(b)$ для всіх $a, b \in N$, та називається антимонотонним, якщо $a \leq_N b \Rightarrow f(a) \geq_R f(b)$ для всіх $a, b \in N$. Сімейство монотонних відображень утворить інший важливий клас:

Mon (N, R) : = {f: N → R, f монотонно}.

Якщо множина N – неупорядкована, то незалежно від відношення порядку на R маємо просто Mon (N, R) = Map (N, R). Будь-яке монотонне або антимонотонне відображення переводить ланцюг в подібний йому ланцюой. Приклад**.** Нехай N = {1 < 2 < 3 < 4} та відображення $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$, монотонне, тоді відображення $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ d & b & c & a \end{pmatrix}$, антиномне.

Алгебраїчний аналіз призводить до відомого класу відображень:

Припустимо, що N і R визначені алгебраїчні структури одного типу, наприклад групи, кільця або векторні простори з однією і тією же областю скалярів. Відображення f: N → R, яке зберігає всі операції називається гомоморфізмом. Визначемо клас усіх гоморфізмів із N у R через

Hom (N, R) : = {f: N → R, f гоморфізм}.

За допомогою перетинання алгебраїчних структур утворюються класи сюр`єктивних монотонних відображеннь або ін`єктивні гоморфізми.

Дискриптивні уявлення відображень

У морфізма (N, R, f) є дві корисні інтепретації:

I Нехай множина N упорядкована за допомогою фіксованого відношення повного порядку. Елементи множини N представимо як номера букв у слові. У цьому випадку на місці з номером i ∈ N стоїть буква L ∈ R, за умовою, що f(i)=L. У цьому випадку, відображення f можна розглядати як слово довжини n, що складене з букв алфавіту R, з індексами з N.

II Упорядкуємо за допомогою відношення повного порядку всі елементи множини R і розглянемо їх як блоки розбивки множини. Якщо f(a) = b, то предмет a∈ N втілений у блок b, та блок b містить предмет a. Таким чином, інтепретуємо морфізм f: N → R як засіб заповнення блоків множини R предметами з множини N. У результаті одержуємо:

$$f : N \to R = \begin{cases} \text{відображнння із N в R;} \\ \text{сліво з букв алфавіту R,} \\ \text{відмічених індексами із N;} \\ \text{заповненне R предметами із N.} \end{cases}$$

Якщо ланцюг N = {a_1, a_2, …, $a_п$} то відображенн $f = \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_n \\ f(a_1) \ldots f(a_n) \end{pmatrix}$ можна однозначно зіставити слово $f(a_1)\ f(a_2) \ldots f(a_n)$.

Назвемо таке слово уявленням відображення f (щодо заданого повного порядку на N). Аналогічно, якщо R = {b_1, …, $b_г$} – ланцюг, то

$f^{-1}(b_1) \cup f^{-1}(b_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(b_r)$ називається блоком-уявленням відображення f. У більшості випадків N або R будуть множинами {1, …, n} або {1, …, r}, у яких є природнє відношення порядку.

Приклад. Нехай N = {1 < 2 < 3}, R = {a < b < c}. Перерахуємо множину Map (N, R), задавши словесні уявлення його членів:

aaa	acc	aba	caa	cbc	acb
aab	ccc	baa	cac	ccb	bac
abb	bbc	bab	cca		cab
bbb	bcc	bba	bcb		bca
aac	abc	aca	cbb		cba

У перших двох колонках – монотонні відображення; відображення в останній колонці і відображення abc – бієктивне. Отже:

|Map (N, R)| = 27, |Bij (N, R)| = 6, |Mon (N, R)| = 10.

Визначення відображень можна тепер перенести у слова або заповнення спеціального виду. Наприклад відображення f ∈ Inj (N, R) називається точним словом, а f ∈ Sur (N, R) – повним заповненням**.** Нехай N = {1 < 2 < … < n} та К – довільна упорядкована множина. Клас Mon (N, R) складається з усіх R-слів $b_1\ b_2 \ldots b_п$,, для яких $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_п$. Тому, Mon (N, R) можна назвати класом монотонних слів. Якщо зокрема, множина R – ланцюг, то монотонні слово довжини n дають всі мультимножини потужності n, складені з елементів множини R.

Існує рівно стільки монотонних слів довжини n, складених з алфавіту R, стільки n-мультимножин на множині R. У прикладі наведеному вище, 3-мультимножини перераховані в двох перших стовпчиках. Якщо обмежиться строго монотонними словами**,** то утвориться сімейство всіх підмножин потужності n множини R.

Література

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 556с.
2. Акимов О. Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 376с.
3. Белов В. В. Теория графов. – М.: Высшая школа, 1976. – 392с.
4. Биркгоф Г. Теория решеток. – М.: Наука, 1984. – 566с.
5. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра. – М.: Мир, 1976. – 400с.
6. Гладкий А.В. Формальные грамматики и языки. – М.: Наука, 1973. – 368с.
7. Ершов Ю. А. Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. – 416с.
8. Ершов Ю. А. Палютин Е. А. Математическая логика. – М.: Наука, 1979. – 376с.
9. Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. – 429с.
10. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: Наука, 1986. – 368с.
11. Марков А. А., Нагорный Н.У. Теория алгоритмов. – М.: Наука, 1984. – 390с.
12. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1965. – 218с.
13. Новиков П. С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 400с.
14. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: ИА, 1957, – 536с.
15. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1977. – 320с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

В. В. Кузьменко	канд. філос. наук, асс.
Г. Г. Швачич	канд. техн. наук, проф
Г. И. Рижанкова	канд. фіз. мат. наук, доц.
В. М Пасинков	канд. фіз. мат. наук, доц.

Основи дискретної математики
розділ “Множини”

Конспект лекцій

Тем. План 2004, поз.

Підписано до друку 30. 03.04. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 2,11 Умов.-друк. арк. 2, 09. Тираж 100 пр. Замовлення № .

Національна металургійна академія України
49600, Дніпропетровськ – 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно – видавничий відділ НМетАУ