МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

В. В. Кузьменко, Г. Г. Швачич, В. М. Пасинков, Г. М. Бартєнєв

ОСНОВИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

Довідкове керівництво з вправами та задачами

Затверджено на засіданні Вченої ради академії
як навчальний посібник

Дніпропетровськ НМетАУ 2004

УДК 510.6

Кузьменко В. В., Швачич Г. Г., Пасинков В. М., Бартєнєв Г. М. Основи дискретної математики. Довідкове керівництво з вправами та задачами – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2004. – 36 с.

В посібнику розглянуті основні визначення, приклади розв'язання задач, представлені задачі та вправи по темам, які потрібні при вивченні дисципліни "Основи дискретної математики". Посібник необхідно використовувати сумісно з конспектами лекцій по розділах "Множини", "Елементи алгебри логіки", "Елементи теорії графів"

Призначений для студентів спеціальності 7.080401 – інформаційні управляючі системи та технології.

Іл. 12. Бібліогр.: 17 найм.

Відповідальний за випуск Г. Г. Швачич, канд. техн. наук, проф.

Рецензенти: Б. І. Мороз, д-р техн. наук, проф. (Академія митної Служби України)

Д. Г. Зеленцов, канд. техн. наук, доц. (УДХТУ)

ТЕМА 1 МНОЖИНИ
ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ З РОЗДІЛІВ МЕТОДИ ЗАВДАННЯ МНОЖИН. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ. ЗАКОНИ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ

РОЗДІЛ Методи завдання множин

ВИЗНАЧЕННЯ: Інтуїтивне поняття множини. Нехай **P(x)** означає деяку властивість, тоді **P(a)** буде означати ту саму властивість, але із заміною **x** на **a**. Завдання множин в термінах властивостей досягається за допомогою інтуїтивного принципу абстракцій.

Інтуїтивний принцип абстракції, або аксіома згортання. Всяка властивість **P(x)** визначає деяку множину **A** за допомогою такої умови: елементами множини **A** є ті і тільки ті предмети **a**, які мають властивість **P**.

Згідно з принципом абстракції всяка властивість **P(x)** визначає єдину множину, яку позначають {a | P(a)} і читають так: “Множина всіх тих предметів **a**, що **P(a)**”.

Зауважимо, що властивість **P** може являти собою спосіб побудови елементів множини **{a | P(a)}**.

Нехай **A** – деяка множина, а **P(x)** має вигляд **x ¹ x**. Тоді множина **{a Î A | P(a)} = {a Î A | a ¹ a}**, очевидно, не має елементів. Із принципу об’ємності випливає, що може існувати лише одна множина, яка немає елементів. Ця множина називається пустою множиною і позначається Æ.

Приклади вирішення задач з розділу Методи завдання множин

1. Які з перелічених виразів є властивостями множин:

a) 3 ділить x; b) x < x; c) $x^2 = 2$; d) $x^2 + 1 > 0$.

Розв’язок. Властивостями є таки записи:

a) 3 ділить x; b) x < x; c) $x^2 = 2$; d) $x^2 + 1 > 0$.

2. Чи є властивостями множин наступні вирази:

a) для всіх x, y xy = yx; b) існує таке x, що 2x < 0

Розв’язок. Вирази:

a) для всіх x, y $xy = yx$; b) існує таке x, що $2x < 0$ не є властивостями, тому що їх не можна характеризувати як вірні чи хибні для певного x.

Розділ Операції над множинами

Визначення: Введемо символи $\Leftrightarrow$, $\exists x$, $\forall x$, $\Rightarrow$ які надалі будуть служити для скорочення виразів "тоді і тільки тоді, коли", "існує x такий, що", "для всякого x" і "слідує" або "випливає" відповідно.

Множина A називається підмножиною множини B($A \subseteq B$), якщо всі її елементи є також елементами множини B($(A \subseteq B) \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$). При цьому множина B називається надмножиною множини A.

Тепер принцип об'ємності можна записати так:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ і } B \subseteq A).$$

Вираз $A \subset B$ означає, що $A \subseteq B$ і A не дорівнює B ($A \neq B$). Якщо $A \subset B$, то множина A називається власною підмножиною множини B, а множина B – власною надмножиною множини A.

Покажемо, що пуста множина є підмножиною будь-якої множини A. Припустимо, що твердження $\varnothing \subseteq A$ хибне, тобто існує хоча б один елемент x, що належить множині $\varnothing$, який не є елементом множини A. Але множина $\varnothing$ не має елементів. Отже, твердження $\varnothing \subseteq A$ є істиною.

Приклади вирішення задач з розділу Операції над множинами

1. Чи є множина $A = \{a, b, c\}$ підмножиною множини $B = \{a, b, c, d, e\}$?

   Розв'язок. Множина $A = \{a, b, c\}$ є власною підмножиною множини $B = \{a, b, c, d, e\}$.

2. Чи є множина студентів юридичного факультету підмножиною множини всіх студентів університету?

Розв'язок. Множина студентів юридичного факультету – підмножина множини всіх студентів університету.

3. Чи є множина парних натуральних чисел власною підмножиною множини всіх натуральних чисел?

Розв'язок. Множина парних натуральних чисел є власною підмножиною множини всіх натуральних чисел.

4. Чи є множина натуральних чисел підмножиною множини всіх цілих чисел, а множина цілих чисел – підмножиною множини всіх раціональних чисел?

Розв'язок. Множина натуральних чисел є підмножиною множини всіх цілих чисел, а множина цілих чисел – підмножиною множини всіх раціональних чисел.

Розділ Закони операцій над множинами

Визначення: Нехай U – деяка множина. Тоді B(U) – множина всіх підмножин множини U. У цьому випадку множину U називають універсальною, а множину B(U) – множиною-степенем або булеаном множини U. Наприклад, якщо U = {1, 3, 5}, то B(U) = {∅, {1}, {3}, {5}, {1, 3}, {1, 5}, {3, 5}, {1, 3, 5}}. Об'єднанням множин A і B називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які входять до складу хоча б однієї з цих множин. Одержана множина позначається $A \cup B$ тобто $A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ або } a \in B\}$.

Приклади вирішення задач з розділу Закони операцій над множинами

5. Визначте елементи множин A = {1, 2, 3} та B = {1, 3, 4, 6 }, які входять до об'єднання цих множин.

Розв'язок. Якщо A = {1, 2, 3} та B = {1, 3, 4, 6 } тоді $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 6}.

6. Яке нове утворення матимемо при об'єднанні П – множини всіх парних натуральних чисел, та Н – множини всіх непарних натуральних чисел?

Розв'язок. Нехай П – множина всіх парних натуральних чисел, а Н – множина всіх непарних натуральних чисел; тоді $П \cup Н = N$, де N – множина всіх натуральних чисел.

Визначення: Перетином множин A і B називається множина, яка складається з елементів, що входять до складу як множини A, так і множини B. Одержана множина позначається $A \cap B$, тобто $A \cap B = \{a \mid a\ A \text{ і } a \in B\}$. Якщо $A \cap B = = \varnothing$, то множини A і B називаються такими, що не перетинаються.

7. Яке нове утворення матимемо при об'єднанні А – множини прямих, які проходять через точку **а** деякої площини, В – множини прямих, які проходять через точку **с** цієї ж площини.

Розв'язок. Нехай А – множина прямих, які проходять через точку **а** деякої площини, В – множина прямих, які проходять через точку **с** цієї ж площини. Тоді $A \cap B = \{l\}$, де l – пряма, яка проходить через точки а і **с**.

Визначення: Якщо множина А являє собою об'єднання підмножин A_1, A_2, …, A_n, …, то сукупність підмножин $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ називається покриттям множини А. Якщо ж сукупність підмножин покриття множини А такі, що $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i = j$, то сукупність $\{A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$ називається розбиттям множини а, а підмножини A_i – класами цього розбиття, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$

8. Нехай А – множина всіх студентів деякого вузу Х, які його закінчили, а A_i – підмножина тих студентів вузу Х, які закінчили і-тий факультет цього вузу. Чи є сукупність підмножин $A_1, A_2, \ldots A_к$ покриттям множини А?

Розв'язок. Оскільки невиключена можливість, що якась людина з множини А закінчила кілька факультетів даного вузу, і така людина попадає в кілька відповідних підмножин сукупностей, то ясно, що сукупність підмножин $A_1, A_2, \ldots A_к$ є покриттям множини А. Якщо ж взяти сукупність всіх студентів вузу Х, які навчаються в даний час, то сукупність студентів $A_1, A_2, \ldots, A_к$ є, очевидно, розбиттям множини всіх студентів даного вузу, які навчаються в динний час.

Визначення: Різницею множин А і В називається множина $B \setminus A = \{a \mid a \in B \text{ і } a \notin A\}$. Очевидно, що $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$. Якщо $A \subseteq B$, то $B \setminus A$ називається доповненням множини А в множині В і позначається $A'_в$ або просто A', коли В можна визначити із контексту.

Симетричною різницею множин А і В називається множина $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

9. Визначте елементи, які є різницею множин $A = \{1, 2, 3\}$та $B = \{1, 3, 4, 5\}$

Розв’язок. Нехай A = {1, 2, 3}, B = {1, 3, 4, 5}. Тоді B \ A = {1, 3, 4, 5} \ {1, 2, 3} = {4, 5} = B \ (A $\cap$ B) = {1, 3, 4, 5} \ {1, 3} = {4, 5}.

10. Яке нове утворення є різницею П – множини всіх парних натуральних чисел, та Н – множини всіх непарних натуральних чисел?

Розв’язок. Множина N \ П = Н, тобто N \ П являє собою множину віх непарних натуральних чисел. Навпаки, N \ Н = П.

Визначення: Введені операції (малюнок 1) називають теоретико-множинними операціями. Їх можна ілюструвати графічно за допомогою так званих діаграм Венна. На цих діаграмах множини-аргументи зображуються у вигляді областей площини, а результат виконання операцій – у вигляді заштрихованої області.

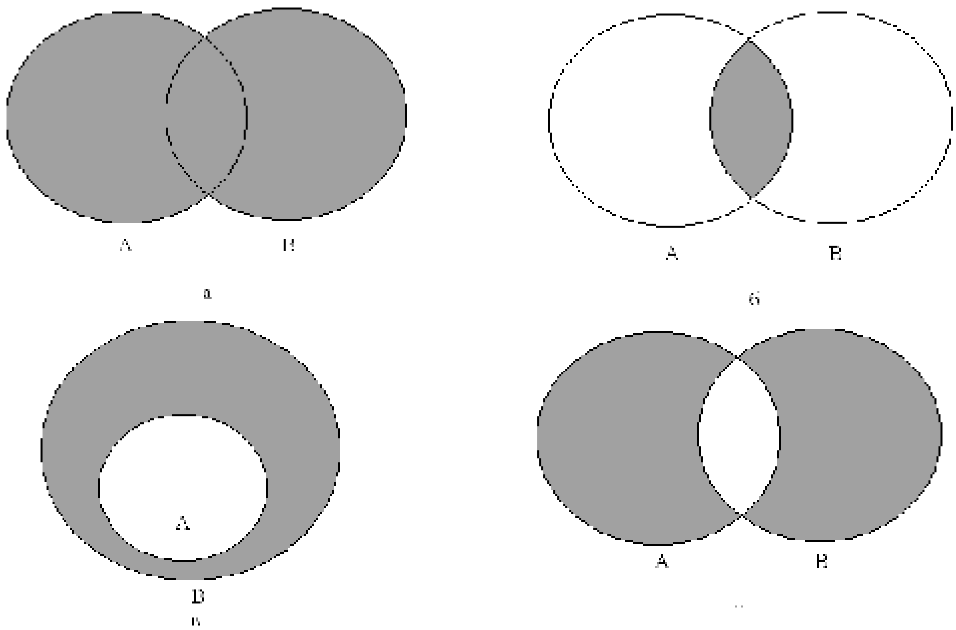


Рис. 1

а – діаграма для A $\cup$ B; б – діаграма для A $\cap$ B;

в – діаграма для A′; г – діаграма для A $\div$ B

Задачі та вправи до теми Множини

І Множини, операції над множинами

1. Довести, що умови $A \subseteq B$, $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ еквівалентні між собою.
2. Довести, що $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$, $A \setminus B \subseteq A$.
3. Довести, що $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\} \neq \{a, b, c\}$.
4. Пояснити, чому $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ $\{1, 2\} \notin \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$.
5. Описати словами кожну з множин:

a) $\{x \in \mathbf{N} \mid x$ ділиться на 2 і x ділиться на $3\}$;

b) $\{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$;

c) $\{x \mid x \in A$ і $x \notin B\}$;

d) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

e) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid y = 2x$ і $y = 3x\}$.

6. Нехай універсальною множиною U служить множина натуральних чисел $\mathbf{N}$, тобто $U = \mathbf{N}$, а

a) $A = \{x \in \mathbf{N} \mid$ для деякого $y \in \mathbf{N}^+$ $x = 2y\}$,

b) $B = \{x \in \mathbf{N} \mid$ для деякого $y \in \mathbf{N}^+$ $x = 2y - 1\}$,

c) $C = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 10\}$.

Побудувати або описати словами множини

A', $(A \cup B)'$, C', $A \setminus C'$, $C' \setminus (A \cup B)$.

7. Знайти множини: $\varnothing \cap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing\} \cap \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\{\varnothing\}\}$.
8. Довести, що множина всіх коренів многочлена $F(x) = f_1(x) * f_2(x)$ – це об'єднання множин коренів многочленів $f_1(x)$ і $f_2(x)$.
9. Довести: $((A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap X')) =$
$= A \cap B \cap X$.
10. Довести тотожності:

a) $A \cup A' = U$;

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

f) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

g) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;

h) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$;

i) $(A' \cup B) \cap A = A \cap B$;

j) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;

k) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

Довести співвідношення:

a) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ і $B \subseteq C$;

b) $A \subseteq (B \cap C) \Leftrightarrow A \subseteq B$ і $A \subseteq C$;

c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$;

d) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = (A \cup B) \cap (A \cup B') = A$;

e) $A = B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$ і $A' \cup B = U$,
   де U – універсальна множина, а A' – доповнена множина A в U.

11. Чи існують такі множини A, B, C, що
   $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

12. Знайти всі підмножини множин: $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{x\}$, $\{1, 2\}$.

13. Довести, що множина A, яка складається з n елементів, має 2^n підмножин.

14. Що являє собою множина **D** ´ **D**, якщо **D** – множина дійсних чисел.

15. Довести, що $A \subseteq (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B') \subseteq C$.

16. Які з наведених нижче тверджень справедливі для будь-яких множин A, B, C: $A \subseteq B$ і $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$; $A \neq B$ і $B \neq C \Rightarrow A \neq C$;
   $A \subseteq (B \cup C)'$ і $B \subseteq (A \cup C)' \Rightarrow B = 0$.

17. Нехай U – універсальна множина і $A \subseteq U$. Довести, що $U = A \Rightarrow A = U$.

18. Довести, що $A = B' \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$ і $A \cup B = U$.

19. Довести, що коли $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots A_n \supseteq A_1$, то $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ для довільних множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

20. Довести, що:

a) $A \div B = B \div A$;

b) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$;

c) $A = B \Leftrightarrow A \div B = \varnothing$;

d) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$;

e) $A \div (A \div B) = B$;

f) $A \cup B = A \div B + (A \cap B)$;

g) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$;

h) $A \div \varnothing = A$;

i) $A \div A = \varnothing$

j) $A \div U = A'$.

21.Довести, що:

a) $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$;

b) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C = A$;

c) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;

d) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$;

e) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus C \subseteq B \setminus C$;

f) $A \subseteq B \Rightarrow C \setminus B \subseteq C \setminus A$;

g) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$;

h) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.

22.Довести, що коли A, B, C, D – непусті множини, то:

a) $A = B$ і $C = D \Leftrightarrow A \times C = B \times D$;

b) $A \subseteq B$ і $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$.

23.Довести, що:

a) $\mathbf{B}(A \cap C) = \mathbf{B}(A) \cap \mathbf{B}(C)$;

b) $\mathbf{B}(\cap A_i) = \cap \mathbf{B}(A_i)$;

c) $\mathbf{B}(\cup A_i) = \{\cup C_i \mid C_i \in \mathbf{B}(A_i)\}$,

де *i* пробігає деяку множину цілих чисел *I*.

24.Довести, що $\bigcap_{i=1}^{n} (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}_i) = \boldsymbol{B} \cap (\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}_i)$.

25.Довести, що $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, u\}\} \Leftrightarrow x = z$ і $y = u$.

26.Довести, що

a) $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$,

b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

II Відносини на множинах, булеві функції та відображення

27.Дати геометричну інтерпретацію відношень:

a) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid y = x\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid y \geq x\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid 0 \le x \le 1$ або $0 \le y \le 1\}$;

d) $\{(x, y) \in \mathbf{D}^2 \mid 0 \le x \le 1$ і $0 \le y \le 1\}$.

28. Знайти R^2 і R^{-1} для відношення $R = \{(x, y) \mid x, y \in N^+$ і x ділить y$\}$.

29. Довести, що для будь яких бінарних відношень мають місце нерівності:

$$(R \cup R_1)^{-1} = R^{-1} \cup R_1^{-1}, \qquad (R')^{-1} = (R^{-1})'.$$

Довести, що коли бінарне відношення R на A:

a) симетричне, то $R = R^{-1}$;

b) рефлексивне і транзитивне, то $R^2 = R$;

c) рефлексивне і антисиметричне, то $R \cap R^{-1} = i$.

30. Навести приклад бінарного відношення, яке:

a) рефлексивне, симетричне, нетранзитивне;

b) рефлексивне, несиметричне, транзитивне;

c) рефлексивне, антисиметричне, нетранзитивне;

d) нерефлексивне, симетричне, транзитивне;

31. Нехай A = {a, b, c, d, e}, а R = {(a, b), (a, c), (b, b), (c, c), (e, e), (d, d), (d, a), (d, b), (c, d), (e, d)} і R_1 = {(a, d), (d, a), (c, d), (c, c), (b, b)} – бінарні відношення на множині A.

Побудувати R^{-1}, $R \cap R_1$, $R \cup R_1$, $R \setminus R_1$, $R \div R_1$.

Чи буде відношення R, $R \cap R_1$, $R \div R_1$, $R \cup R_1$, $R \setminus R_1$ рефлексивним, симетричним, транзитивним?

Побудувати матриці відношень для R, R_1, $R \cap R_1$, $R \cup R_1$, R_i R_s, R_t, $R_1 \cup R_s$, R^2, R^3.

32. Яке відношення є транзитивним замиканням відношення “X – прямий нащадок Y”?

33. Нехай A = {2, 3, 5, 6, 11, 12, 14} та $\le$ – відношення часткового порядку на A, таке, що $x \le y \Leftrightarrow$ x ділить y.

Побудувати множину відношення $\le$ та упорядкувати множину A відносно цього порядку.

34. Показати, що відношення $\subseteq$ для множин є відношенням часткового порядку.

Для яких множин A булеан **B**(A) буде лінійно упорядкованою множиною відносно відношення $\subseteq$?

35. Довести, що коли f – функція із A в B, fg – функція із B в C, то f * g є функцією із A в C.
36. Довести, що для того щоб відображення R: $A \to B$ було взаємно однозначним, необхідно і достатньо, щоб $i_A = R * R^{-1}$, $R^{-1} * R = i_{B.}$
37. Довести, що коли f – довільна функція, то $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, $(A \subseteq B) \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$.
38. Встановити взаємнооднозначну відповідність між множинами $A \times B$ і $B \times A$.
39. Нехай F = {a, b, c, d, e, f, g, h}, R = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Тоді множиною шахових кліток буде $S = F \times R$. Визначити бінарне відношення C – множину допустимих ходів для тури на множині S.
40. Нехай X = {2, 4, 6, 8} і $\varsigma = \{(x, y)\colon x, y \in X \text{ і } x < y\}$;виписати усі елементи ς і ς^{-1}
41. Нехай $\varepsilon = P(\{a, b, c\})$. Знайти усі елементи $\subset$ (включення).
42. Задати відношення N на множині жителів однієї вулиці H, таке що h_i і h_j – сусіди ($h_i, h_j, \in H$)
a) символьне,
b) графічне,
c) у вигляді матриці.
43. Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ побудувати бінарне відношення
a) рефлексивне, симетричне, не транзитивне;
b) рефлексивне, антисиметричне, не транзитивне;
c) нерефлексивне, симетричне, не транзитивне.
44. Перевірити властивості відношень
a) A = {1, 2, 3, 5}
b) $\varsigma = \{(a, b)$ a - b – чотне, для $a, b \in A\}$
c) $\varsigma = \{(a, b)$ a + b – чотне, для a, b (A}
d) P - множина людей $\varsigma = \{(a, b) : a, b \in P$, a і b мають загального предка}
45. Нехай A - множина всіх прямих на площині. Чи є еквівалентностями такі відношення: рівнобіжність; перпендикулярність.
46. На множині Q – раціональних чисел визначити відношення R у такий спосіб, a R b $\Leftrightarrow$ (a - b) – раціональне число. Довести, що R – еквівалентність.

47.Нехай τ і π відношення на N^2:

a) $(a, b)\ \tau\ (c, d) \Leftrightarrow a \le c$ і $b \le d$

b) $(a, b)\ \pi\ (c, d) \Leftrightarrow a \le c$ і $b \ge d$

Чи є τ і π відношеннями порядку.

48.Нехай R і S визначені на P - де P - множина людей

$R = \{(x, y) \mid x, y \in p$ і x - батько в};

$S = \{(x, y) \mid x, y \in p$ і x - дочка в}.

Описати явно R^2; S^2; RS; SR; SR^1;

R^1S; R^1S^1; S^1R; S^1S^1; S^1R^1.

49.Описати замикання R і S

50.Зазначити області визначення і значення для відповідності «Більше», якщо A = {2, 4, 6}; R = {1, 4, 6, 7}

51.Скільки відповідностей можна встановити між елементами множин A = {k, m, n} і B = {B1, B2, B3}. Які з цих відповідностей є відображеннями? До яких типів ставляться приведені відповідності?

52.Зазначити область визначення і значення відповідності «рівність», якщо A= {-4, 5}; B = {-2, 6, 8, 9}

53.Нехай $x \in X$ и $y \in Y$ і A - відношення між елементами множин X і Y. т. е. xAy. Зазначте, у яких випадках A можна розглядати як функцію:

a) X - множина студентів, Y - множина навчальних дисциплін, xAy - «x вивчає y»

b) X - множина студентів, Y - ріст в одиницях довжини, xAy - «x має ріст y»

c) X - множина інтегральних схем друкарського вузла, Y - множина друкарських вузлів, xAy - «x входить в y».

54.Нехай A = {a, b, c, d}; B = {1, 2, 3} задати функцію з A в B

a) довільну;

b) ін'єктивну;

c) сюр'єктивну;

d) бієктивну.

ТЕМА 2 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

Приклади вирішення задач

1. Скількома способами на першості світу з футболу можуть розподілитися медалі, якщо у фінальній частині грають 24 команди?

Розв'язок. Золоту медаль може отримати будь яка з 24-х команд, тобто маємо 24 можливості. Срібну медаль може виграти одна з 23-х команд, а бронзову – одна з 22-х команд. За основними правилами комбінаторики загальне число способів розподілу медалей: 24 * 23 * 22 = 12144.

2. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

a) цифри можуть повторюватися;
b) ні одна з цифр повторюються двічі;
c) цифри непарні і можуть повторюватися.

Розв'язок

Варіант 1. Першою цифрою може бути одна із цифр 1, 2, 3, 4, 5, оскільки 0 не може бути першою цифрою, бо в такому випадку число не буде тризначним. Якщо перша цифра вибрана, то друга може бути вибрана шістьма способами, як і третя цифра. Отже, загальне число тризначних цифр 5 * 6 * 6 = 180.

Варіант 2. Першою цифрою може бути одна з п'яти цифр – 1, 2, 3, 4, 5, якщо перша цифра вибрана, то другою може бути теж одна з п'яти цифр (тут враховується 0), а третя може бути вибрана чотирма способами з чотирма способами з чотирьох цифр, що залишилися. Отже, загальна кількість таких тризначних чисел 5 * 5 * 4 = 100.

Варіант 3. Першою цифрою може бути одна з трьох цифр: 1, 3, 5. Другою теж може бути одна з цих трьох цифр. Аналогічно і третя цифра може бути вибрана трьома способами. Таким чином, загальна кількість таких чисел дорівнює 3 * 3 * 3 = 27.

3. Збірна команда університету з волейболу налічує 15 чоловік. Скільки різних варіантів повинен розглянути тренер перед грою, щоб заявити список гравців на гру?

Розв'язок. Число гравців волейбольної команди дорівнює шести. Значить, число всіх можливих варіантів – це число різних підмножин, які складаються з шести елементів у множині з 15-ти елементів. Отже маємо:

$$C_{15}^{6}=\frac{15!}{6!9!}=\frac{15*14*13*12*11*10}{6*5*4*3*2*1}=5*7*13*11=5005$$

4. У скількох точках перетинаються діагоналі випуклого десятикутника, якщо ніякі три з них не перетинаються в одній точці.

Розв'язок. Кожній точці перетину двох різних діагоналей відповідають чотири вершини десятикутника, а кожним чотирьом вершинам – одна точка перетину. Таким чином, число всіх точок перетину дорівнює числу способів, якими з десяти вершин можна вибрати чотири вершини, тобто $C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!6!}=\frac{10*9*8*7}{4*3*2}=210$ точок перетину.

5. Скількома різними способами можна розмітити п'ять книжок на книжковій полиці?

Розв'язок. Шукане число розміщень є числом способів упорядкування множин з п'яти елементів. Значить, це число дорівнює

$$P_5 = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120.$$

6. Скількома способами можна упорядкувати n-елементну множину $A = \{1, 2, \dots, n\}$ $(n \geq 2)$ так, щоб останні два елементи були $n – 1$ і n?

Розв'язок. Число способів буде $P_{n-2} = (n – 2)!$

7. Скільки різних слів можна побудувати перестановкою букв у слові "лаваш"?

Розв'язок. Слово "лаваш" містить по одному екземпляру букв л, в, ш і два екземпляри букв а, а загальна кількість букв 5. За формулою знаходимо

$$\frac{5!}{2!1!1!1!}-5*4*3=60$$

8. Скільки слів довжини 8 можна скласти з а і б, таких, що кількість букв а у цих словах не перевищує три?

Розв'язок. Такими словами будуть всі слова, які не мають ні однієї букви а, всі слова, які мають лише одну букву а, всі слова, які мають дві букви а, і, нарешті, всі слова, які мають три букви а, тобто загальна кількість слів становить

$$\boldsymbol{C}_8(0{,}8)+\boldsymbol{C}_8(1{,}7)+\boldsymbol{C}_8(2{,}6)+\boldsymbol{C}_8(3{,}5)=\frac{8!}{0!8!}+\frac{8!}{1!7!}+\frac{8!}{2!6!}+\frac{8!}{3!5!}=$$

$$=1+8+28+56=93$$

9. У групі студентів кожний студент або блондин, або брюнет. Серед студентів 10 блондинів, решта – брюнети. 12 студентів люблять читати детективи. Серед 12-ти студентів, які люблять читати детективи, 5 блондинів і сім брюнетів. Скільки чоловік налічує вся група, якщо два брюнети не люблять читати детективи?

Розв'язок. Нехай A означає множину блондинів: $|A| = 10$; B – множину брюнетів: $|B| = 9$; C – множину любителів читати детективи: $|C| = 12$. Тоді $A \cap B = \varnothing$, оскільки множини блондинів і брюнетів не можуть мати спільних елементів; $A \cap C$ – множина блондинів, які люблять читати детективи: $|A \cap C| = 5$; $B \cap C$ – множина брюнетів, які люблять читати детективи: $|B \cap C| = 7$. Множина $A \cap B \cap C = \varnothing$. Отже,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cup C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= 10 + 9 + 12 - 0 - 5 - 7 + 0 = 19.$$

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ ДО ТЕМИ ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРНОГО АНАЛІЗУ

1. Група студентів налічує 25 чоловік. Із них 15 люблять математику, 10 – фізику, 8 – не люблять ні математики ні фізики. Скільки студентів люблять і математику і фізику?
2. На зборах студентів-відмінників були як студенти першого так студенти і третього курсу. Всі вони або любителі прози, або любителі поезії. Студентів-хлопців було 16, а любителів прози – 24. Студентів-дівчат буде

рівно стільки, скільки хлопців любителів прози. Скільки студентів було на зборах?

3. У групі з 100 студентів англійською мовою володіють 28 чоловік, німецькою – 30, французькою 42, англійською і німецькою – 8, англійською і французькою – 10, німецькою і французькою – 5, а всіма трьома мовами володіють 3 студенти. Скільки студентів не знають жодної з заданих мов?
4. На кафедрі математики працює сім викладачів. Скількома способами можна скласти комісію з трьох чоловік для прийому "хвостів"?
5. В шаховому турнірі брали участь 30 чоловік, і кожні два шахісти зіграли між собою лише один раз. Скільки партій було зіграно в турнірі?
6. Скільки існує п'ятизначних чисел, в яких кожна наступна цифра

a) менша за попередню;

b) більша за попередню.

7. На площині проведено 10 ліній так, що ніякі дві з них не паралельні між собою і неякі три з них не перетинаються в одній точці. Знайти:

a) число точок перетину цих прямих;

b) число трикутників які утворюють ці прямі;

c) на скільки частин ділять площину ці прямі.

8. Скільки прямих можна провести через n точок, якщо ніякі три з них не лежать на одній прямій?
9. У корзині знаходиться p білих і x чорних м'ячів. Скількома способами можна викласти ці м'ячі в ряд так, щоб ніякі два чорних м'ячі не були поряд?
10. Скількома способами можна:

a) упорядкувати множину {1, 2, …, 2n} так, щоб кожне парне число мало парний номер?

b) розмістити 8 тур на шахівниці так, щоб вони не били одне одну?

11. В змаганнях по метанню списа беруть участь чотири спортсмени (A, B, C, D). Скількома способами їх можна розмістити в списку виходів у сектор для метання, якщо спортсмен B не може виходити раніше спортсмена A?

12. Скільки слів із п’яти букв можна скласти, якщо X = {a, b, c, d}і буква a зустрічається у слові не більше двох разів, буква b – не більше одного разу і буква c – не більше трьох разів?
13. Нехай X = {a, b, c, d} – алфавіт. Слово p = x y z …u v в алфавіті X називається паліндромом, якщо слово p′ = v u … z y x дорівнює p. Скільки паліндромів в алфавіті X існує серед слів із п’яти букв?
14. Скільки різних слів можна скласти перестановкою букв у слові “чачача”?

ТЕМА 3 ЕЛЕМЕНТИ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ
ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ ТА ПРИКЛАДИ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ З РОЗДІЛУ НЕСУПЕРЕЧНІСТЬ І ПОВНОТА ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ

Основні визначення

Застосування союзу і при побудові висловлень зветься **кон`юнкцією**.

Форма запису таблиці істинності кон`юнкції:

1. p = 1 і q = 1, то (p і q) = 1;
2. p = 1 і q = 0, то (p і q) = 0;
3. p = 0 і q = 1, то (p і q) = 0;
4. p = 0 і q = 0, то (p і q) = 0.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Якщо істині висловлення, які складають, кон`юнкцію, то кон`юнкція істина, і навпаки, якщо кон`юнкція істина, то істина кожна її складова. Кон`юнкція помилкова якщо помилкова хоча б одна її складова.

Імплікативними силогізмами є теореми, які подібні логічним схемам, називаним силогізмами. В імплікаціях обидва посилання, як і висновок, мають однаково визначений вид.

Форма запису таблиці істинності імплікації:

1. p = 1 і q = 1 то (p →q) = 1;
2. p = 1 і q = 0 то (p →q) = 0;
3. p = 0 і q = 1 то (p →q) = 1;
4. p = 0 і q = 0 то (p →q) = 1.

p	q	$p \to q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Коли обидві посилки вірні, то висновок вірний. Якщо одна з посилок зрадлива, то і весь алгоритм зрадливий.

Диз'юнкція завжди є комунікативною. Вона характерна спілкою **або.**

Форма запису таблиці істинності диз'юнкції:

1. якщо p = 1 і q = 1 то (p або q) = 1;
2. якщо p = 1 і q = 0 то (p або q) = 1;
3. якщо p = 0 і q = 1 то (p або q) = 1;
4. якщо p = 0 і q = 0 то (p або q) = 0.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Диз'юнкція істина тоді, коли один з її членів є істинним.

Закон, що характеризує еквівалентність

Форма таблиці істинності еквівалентності:

1. якщо p = 1 і q = 1, то $(p \leftrightarrow q) = 1$;
2. якщо p = 1 і q = 0, то $(p \leftrightarrow q) = 0$;
3. якщо p = 0 і q = 1, то $(p \leftrightarrow q) = 0$;
4. якщо p = 0 і q = 0, то $(p \leftrightarrow q) = 1$;

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Еквівалентність істинна коли обидва її члена одночасно або істинні, або помилкові.

Закони де-Моргана

1. [Не (**p** або **q**)] тоді і тільки тоді, коли [(**не p**) і (**не q**)].
2. [Не (**q** і **не p**)] тоді і тільки тоді, коли [(**не p** або **не q**)].

Обидва закони мають численні застосування, у першу чергу при підстановках.

Лема. Нехай А – формула, а $B_1, B_2, \ldots, B_к$ – пропозиційні змінні, що входять до формули А, і нехай задана деяка інтерпретація h. Покладемо B_i' рівним B_i, якщо $h(B_i) = 1$, і рівним $\neg B_i$, якщо $h(B_i) = 0$, і, нарешті, A' рівним А, коли $h(A) = 1$, і рівним $\neg A$, коли $h(A) = 0$.

Визначення. **Літерою** називається атом або заперечення атома. Диз'юнктом називається диз'юнкція літер. Одиничним диз'юнктом називається однолітерний диз'юнкт. Якщо диз'юнкт не має жодної літери, то він називається пустим диз'юнктом і позначається 0. Літери L і ¬L називаються **контрарними.**

Правило тавтології (ДП1). Викреслити всі тавтологічні диз'юнкти із S. Множина диз'юнктів $S^|$, що залишились, суперечна тоді і тільки тоді, коли S суперечна.

Правило однолітерних диз'юнктів (ДП2). Якщо існує одиничний диз'юнкт L в S, то $S^|$ одержано з S шляхом викреслення з S тих диз'юнктів, які містять L. Якщо $S^|$ пустий, то S істина. В протилежному випадку будуємо множину $S^{||}$ шляхом вилучення з $S^{|}$ всіх входжень ¬L. $S^{||}$ суперечна тоді і тільки тоді, коли S суперечна.

Правило чистих літер (ДП3). Літера L деякого диз'юнкта з S називається чистою в S тоді і тільки тоді, коли літера ¬L не з'являється ні в якому диз'юнкті з S.

Правило розщеплення (ДП4). Якщо множину S можна подати у вигляді $(A \vee L) \wedge \ldots \wedge (A_m \vee L) \wedge (B_1 \vee \neg L) \wedge \ldots \wedge (B_n \vee \neg L) \wedge R$, де A_i, B_i, і R чисті від L і ¬L, $S_1 = A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge R$ і $S_2 = B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge R$, то S суперечна тоді і тільки тоді, коли $(S_1 \wedge S_2)$ суперечна.

Приклади вирішення задач з розділу Несуперечність і повнота числення висловлень

1. Довести, що ¬P є логічним наслідком формул $P \to Q$ і ¬Q.

Розв'язок. За наслідком **леми** формула $(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$ має бути тавтологією. Користуючись таблицями істинності, знаходимо:

P	Q	¬P	¬Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge \neg Q$	$(P \to Q) \wedge \neg Q \to \neg P$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

Отже, ¬P є наслідком формул $P \to Q$ і ¬Q.

2. Довести, що $S = (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \neg P \wedge R \wedge U$ суперечна.

Розв'язок.

(1) $(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge \neg P \wedge R \wedge U$,

(2) $(Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q) \wedge R \wedge U$ – правило **ДП2** з ¬P,

(3) $\neg R \wedge R \wedge U$ – правило **ДП2** з ¬Q,

(4) $0 \wedge U$ – правило **ДП2** з ¬R.

Оскільки останній диз'юнкт включає пустий диз'юнкт 0, то формула S суперечна.

3. Показати, що $S = (P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ несуперечна.

Розв'язок.

(1) $P \vee Q) \wedge \neg Q \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$,

(2) $P \wedge (\neg P \vee \neg R)$ – правило **ДП2** з $\neg Q$,

(3) $\neg R$ – правило **ДП2** з P,

(4) 0 – правило **ДП2** з $\neg R$.

Остання множина являє собою пустий диз'юнкт. Отже, S несуперечна.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ З РОЗДІЛУ НЕСУПЕРЕЧНІСТЬ І ПОВНОТА ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ

1. Користуючись таблицями істинності, спробуйте впевнитись у тому, що логічні зв'язки $\neg$, $\wedge$, $\vee$, які розглядаються як операції над формулами, задовольняють закони булевої алгебри.
2. Виясніть, чи є формулою числення висловлювань вираз:

a) $(A \wedge B)\ C\ \neg D$;

b) $(A \wedge B) \to C$;

c) $(A \to B) \wedge \neg B$;

d) $(((\neg A) \to B) \to \neg(C \vee D))$.

4. Скількома способами можна розставити дужки у таких виразах:

a) $A \to B \vee \neg B \wedge C$;

b) $A \to B \to C \to \neg A \to \neg B$;

c) $A \wedge B \vee C \wedge D \wedge C \wedge\vee A$?

5. Напишіть всі підформули формули:

a) $(((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (\neg A \vee C))$;

b) $((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg B))$.

5. Побудуйте таблиці істинності для таких формул:

a) $((P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P)))$;

b) $(\neg P \to \neg(Q \wedge P)) \to (P \vee R))$;

c) $((P \wedge (Q \to P))\to \neg P)$;

d) $(((P \wedge \neg Q) \to Q) \to (P \to Q))$;

e) $((P \to (Q \vee R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$;

f) $((P \wedge (Q \wedge \neg P)) \wedge ((\neg Q\to P) \vee Q))$.

6. Доведіть, що існують інтерпретації, в яких виконуються формули:

a) $\neg(P \to \neg P)$;

b) $((P \to Q) \to (Q \to P))$;

c) $]((Q \to (P \wedge R)) \wedge \neg ((P \vee R) \to Q))$.

7. Доведіть, що приведені нижче формули є тавтологією:

a) $((P \to Q) \vee (Q \to P))$;

b) $((P \to Q) \vee (P \to \neg Q))$;

c) $(P \to (Q \to (P \wedge Q)))$;

d) $((P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R)))$;

e) $((\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P))$;

f) $(P \to (Q \to P))$;

g) $P \vee \neg P$;

h) $(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R)))$;

i) $(P \to Q) \to P$;

j) $P \to (P \vee Q)$;

k) $Q \to (P \vee Q)$;

l) $(P \vee P) \to P$;

m) $(\neg P \to (P \to Q))$.

8. При яких значеннях змінних x, y, z, u, v, w наведені нижче формули хибні:

a) $(((x \to (y\wedge z)) \to (\neg y \to \neg x)) \to \neg y)$;

b) $((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg z)$;

c) $(((x \vee y) \vee z) \rightarrow ((x \vee \ ) \wedge (x \vee z)))$;

d) $(((x \vee y) \wedge ((y \vee z) \wedge (z \vee x))) \rightarrow ((x \wedge y) \wedge z))$;

e) $((x \vee y) \rightarrow ((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)))$?

9. Побудуйте доведення формули $(A \rightarrow B) = (\neg B \rightarrow \neg A)$, не користуючись теоремою дедукції.
10. Знайдіть для формули $\neg(A \rightarrow (C \Leftrightarrow B)) \rightarrow D$ еквівалентну їй формулу, яка містить лише логічні зв'язки: $\vee$ і $\neg$, $\wedge$ і $\neg$.
11. Впевніться в тому, що аксіоми логіки висловлювань і аксіоми логіки предикатів – тотожно істинні формули.
12. Знайдіть формулу логіки висловлювань, яка еквівалентна функції

x	y	f(x, y)
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

13. Покажіть, що відношення R на множині всіх формул логіки висловлювань, яке визначається у вигляді $ARB \Leftrightarrow h(A) = h(B)$ для інтерпретації h, є відношенням еквівалентності.
14. Побудуйте інтерпретацію логіки висловлювань в алгебрі множин.
15. Чи буде логічним наслідком формула $\neg C \vee \neg D$ множини формул $(C \rightarrow$ $\rightarrow G) \wedge (D \rightarrow S)$, $\quad S \wedge G \rightarrow E$, $\quad \neg E$?
16. Запищіть у вигляді формул числення висловлювань наведені нижче висловлювання і знайдіть інтерпретації, при яких вони істинні.

a) Я піду до дому (H) або залишусь тут і послухаю музику (S). Я не піду до дому. Значить, я залишусь тут і послухаю музику.

b) Якщо Джон ляже спати сьогодні пізно (S), він буде вранці не в формі (D). Якщо він ляже спати не пізно, то йому буде здаватися, що не варто жити (L). Значить, або Джон завтра буде не в формі, або йому здаватиметься, що йому не варто жити.

c) Заробітна плата зросте на (W), якщо буде інфляція (J). Якщо буде інфляція, то збільшиться вартість життя (C). Заробітна плата зросте. Значить збільшиться вартість життя.
d) Якщо 2 – просте число (P), то це найменше просте число (L). Якщо 2 – найменше просте число, то 1 не є простим числом (N). Число 1 не є простим числом. Значить, 2 – просте число.
e) Джон або перевтомився (E), або хворий (S). Якщо він перевтомився, то він дратується (C). Він не дратується. Значить він хворий.
f) Якщо я поїду автобусом (B), а автобус запізниться (L), то я пропущу важливе побачення (M). Якщо я пропущу важливе побачення я почну засмучуватись (D), то мені не слід їхати до дому (H). Якщо я не отримаю цієї роботи (I), то я почну засмучуватись і мені треба поїхати до дому. Значить, якщо я поїду автобусом і автобус запізниться, то я отримаю цю роботу.
g) Якщо 6 – складне число (S), то 12 – складне число (W). Якщо 12 – складне число, то існує росте число, то існує просте число, більше, ніж 12 (P). Якщо існує просте число, більше, ніж 12, то існує складне число більше 12 (C). Якщо 6 ділиться на 2 (D), то 6 – складне число. Число 12 складне. Отже, 6 – складне число.
h) Якщо завтра буде холодно (C), я одягну тепле пальто (H), якщо рукав буде полагоджений (S). Завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений, значить, я не одягну тепле пальто.

17. Нехай P(x) означає “x – просте число”, E(x) – “x – парне число”, O(x) – “непарне число”, D(x, y) – “y ділиться на x”. Перекладіть такі формули логіки предикатів першого порядку:

a) $P(7)$;
b) $E(2) \wedge P(2)$;
c) $\forall x\ (E(x) \wedge D(x, 6))$;
d) $\forall\ (\neg E(x) \rightarrow \neg D(2, x))$;
e) $\forall x\ (E(x) \wedge \forall y\ (D(x, y) \rightarrow E(y)))$;

f) $x\ (P(x) \rightarrow (\exists y)\ (E(y) \wedge D(x, y)))$;

g) $\forall(O(x) \rightarrow (\forall y)\ (P(y) \rightarrow \neg D(x, y)))$;

h) $(\exists x)\ (E(x) \wedge P(x)) \wedge \neg(\exists x)\ ((E(x) \wedge P(x)) \wedge ((\exists y)\ (x\neg = y \wedge E(x) \wedge P(y)))$.

18. Нижче наведено п'ять речень українською мовою, за якими йде стільки ж речень символічної мови предикатів першого порядку. Знайдіть відповідні пари речень, так що кожний член пари був перекладом члена, який йому відповідає.

a) Всі судді ($J(x)$) – юристи ($L(x)$).

b) Деякі юристи – шахраї ($S(x)$).

c) Не всі юристи – судді.

d) Жоден суддя не є шахраєм.

e) Деякі юристи – політики ($P(x)$).

a') $\exists x\ (L(x)) \wedge (S(x))$.

b') $\exists x\ (L(x)) \wedge (P(x))$.

c') $'\neg(\forall x)\ (L(x) \rightarrow J(x))$.

d') $\forall x\ (J(x) \rightarrow L(x))$.

e') $\forall x\ (L(x) \rightarrow \neg S(x))$.

19. Вкажіть вільні і зв'язані входження змінних у таких формулах:

a) $\forall z\ (\forall x\ A(x, y) \rightarrow B(z, x))$;

b) $\forall y\ A(z, y) \rightarrow \forall z\ A(z, y))$;

c) $(\forall y\ \exists y\ (A(x, y, f(x, y))) \vee \neg\forall x\ B(y, f(x))$.

20. Перекладіть на мову формул такі речення:

a) Не всі птахи можуть літати;

b) Або кожний любить кого-небудь, і ні один не любить всіх, або хтось любить всіх, і хтось не любить нікого;

c) Якщо хтось може це зробити, то і я теж можу це зробити;

d) Не всі люди щирі і не всі щирі люди багаті.

21. Чи вільний терм $f(x, y)$ для x у формулах $A(x, y) \rightarrow \forall x\ B(x)$, $(\forall y\ A(y, a)) \vee \exists y\ A(x, y)$?

Розділ Застосування висловлень математичної логіки в контактних схемах

Приклади вирішення задач

1. Побудувати контактну схему висловлення, яка складається з трьох змінних, має таблицю істинності 11101000. Її основні кон’юнкції надані в таблиці 1.

Таблиця 1

№	p	q	r	Задана таблиця	Основні кон’юнкції
1	1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$
2	1	1	0	1	$p \wedge q \wedge \neg r$
3	1	0	1	1	$p \wedge \neg q \wedge r$
4	1	0	0	0	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
5	0	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$
6	0	1	0	0	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$
7	0	0	1	0	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$
8	0	0	0	0	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

Розв’язок. Використовуючи таблицю істинності, шукане висловлення запишемо формулою: $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

Побудуємо відповідну контактну схему (малюнок 2).

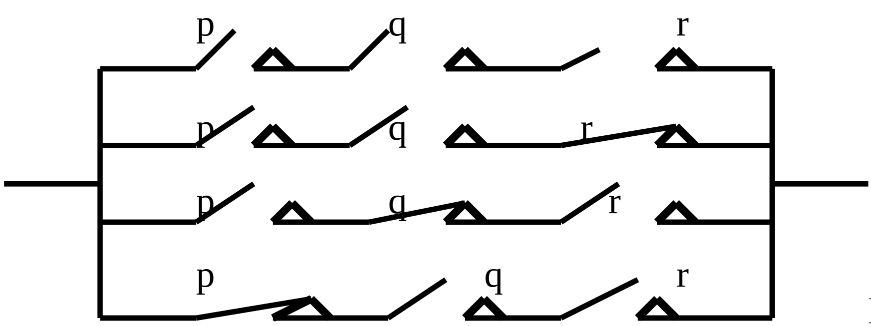


Рис.2

(p * q * r) + (p * q * r`) + (p * q` * r) + (p` * q * r)

Схема задовольняє такій умові: вона проводить струм тоді і тільки тоді, коли замкнуті, принаймні, два з трьох контактів.

2. Використовуючи таблицю 1, побудувати схему з трьома незалежними контактами, яка проводить струм якщо замкнуті лише два контакти.

Розв'язок. Формула, що відповідає даній схемі приймає значення істина тоді і тільки тоді, коли це значення приймають дві з трьох змінних. p, q, r. Це відповідає другому третьому і п'ятому рядкам таблиці 1. У цьому випадку задана таблиця усієї формули 011010000, а сама формула має вигляд: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.

Контактна схема, що моделює цю формулу представлена на малюнку 3.

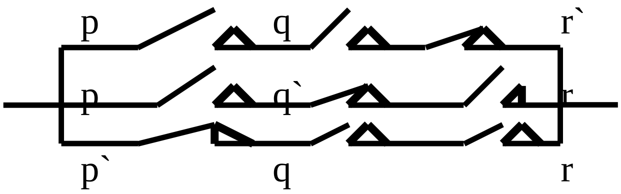
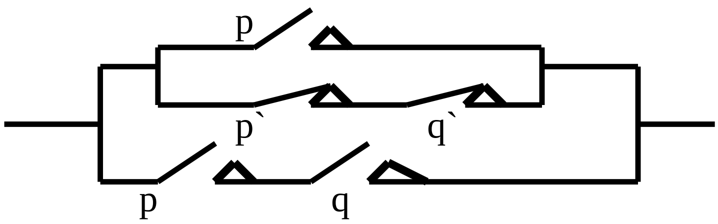


Рис.3

Формулу запишемо у наступному вигляді – (p * q * r') + (p * q' * r) + (p' * q * r).

При рішенні такого роду задач приймемо метод синтезу (побудови) контактної схеми по їх характеристиках.

3. Визначити умови роботи заданої схеми. Знайти, при яких положеннях контактів (малюнок 4) струм буде проходити або не проходити.



p + (p` * q`)) + (p * q) Рис.4

Розв'язок. Наданій схемі відповідає висловлення, вираз формулою:

$$p \vee (\neg p \wedge \neg q \vee (p \wedge q)$$

Задачі та вправи

1. Використовуючи основні послідовно сполучені схеми, побудуйте мережі відповідним формулам:

   a) $p \rightarrow q$; b) $p \vee q$ c) $p \leftrightarrow q$ d) $(p \rightarrow q) \vee q$.

2. Накреслити схему, що відповідає формулі

   $(p \wedge \neg q \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

3. Побудувати мережу, що відповідає формулі

   $((p \vee q) \wedge r) \vee ((p \wedge r) \vee q)$

4. Побудуйте формулу схеми, яка зображення на малюнку 5?

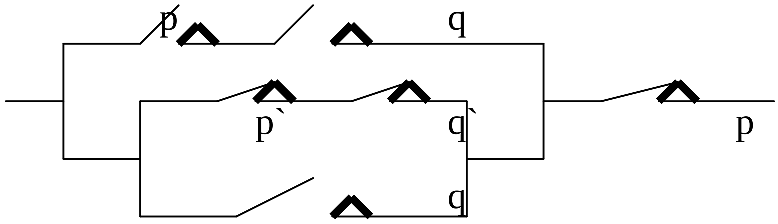


Рис.5

5. Побудуйте схеми, які відповідають формулі:

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r) \equiv (p \vee r) \wedge (\neg p \vee q).$$

6. Побудуйте схему, що відповідала б таблиці з набором значень 10110100.
7. Машина – екзаменатор дає сигнал «залік» (запалюється лампочка) тоді і тільки тоді, коли студент відповідає правильно хоча б на два з трьох питань квитка. При запровадженні в машину правильної відповіді замикається контакт у ланцюзі сигнальної лампочки. Побудуйте схему й опишіть її за допомогою правил логіки висловлень.
8. Складіть формулу, що відповідає приведеній на малюнку 6 схемі:

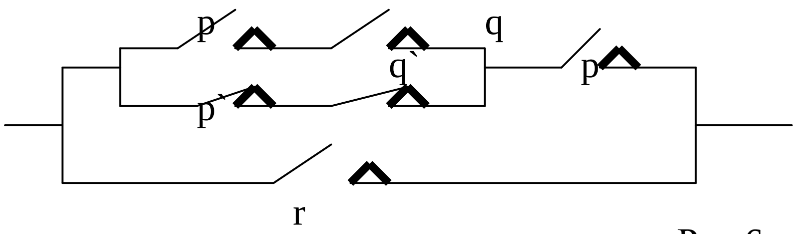


Рис.6

Побудувавши таблицю істинності формули, визначте умови, при яких ланцюг буде проводити струм.

10. Побудуйте й опишіть за допомогою правил логіки висловлень схему «електрифікованої версії» гри з моментами: «По встановленому сигналу кожен гравець замикає або розмикає перемикач, яким він управляє. Якщо обидва роблять те саме, то виграє гравець А; якщо ж вони роблять протилежне те виграє гравець В». У схему введіть джерело току і лампочку. Побудуйте таку схему, щоб у випадку, коли виграє А, запалювалося світло.
11. Накресліть схему з двома контактами, яка повинна замикатися тоді і тільки тоді, коли замкнутий або один, або інший контакт, але не обидва разом.

12. Складіть схему з трьома незалежними контактами, котра замкнута тоді і тільки тоді, коли: a) замкнуті не більш чим два контакти; b) замкнутий тільки один контакт; c) розімкнутий тільки один контакт.
13. Потрібно, щоб у кімнаті можна було включити і виключити світло за допомогою любого з трьох перемикачів, розташованих на різних трьох стінах. Побудувати й описати за допомогою правил логіки висловлень таку схему.
14. Комітет, який складається з трьох чоловік, включно й голову, приймає рішення більшістю голосів, однак рішення не може бути прийняте, якщо за нього не проголосував голова. Голосування "за" проводиться натиском кнопки, яка замикає контакт. У випадку прийняття рішення замигається лампочка. Побудуйте схему, яка відповідає наведеним умовам.
15. Доведіть, що з'єднання S кінцевої кількості функціональних елементів $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ є схемою тоді і тільки тоді, коли:

a) серед елементів φ_i є один і тільки один елемент з вільним виходом не з'єднаним ні з яким із входів елементів φ_j (на кожному з виходів реалізується власна функція алгебри логіки);

b) вхід кожного з елементів φ_i може бути з'єднаний не більш чим з одним із виходів елементів φ_j.

c) в S немає зворотних зв'язків.

16. Визначити умови роботи схеми, яка задана формулою:

$$p \vee (\neg p \wedge \neg q \vee (p \wedge q)$$

Знайти, при яких положеннях контактів струм буде проходити або не проходити.

17. Чи отримаємо повну систему, якщо приєднаємо до елемента φ, який реалізує функцію Шеффера $\bar{xy}$ елементи, котрі реалізують константи.
18. Побудувати таблицю істинності формули: $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$. Визначити умови, при яких ланцюг буде проводити струм.
19. Побудуйте схему з чотирма контактами, котра повинна замикатися тоді і тільки тоді, коли замкнуто два парні контакти. Наведіть формули такої схеми. Побудуйте її таблицю істинності.

Тема 4 Елементи теорії графів
Основні визначення, задачі та вправи

Основні визначення

Неорієнтованим мультиграфом G називається пара (V, E), де $E \subseteq MV^{(2)}$. Елементи множини V називаються вершинами, а елементи множини E – ребрами. Ребра позначаються (u, v), де u, v – вершини з V.

Мультиграф G = (V, E) називається неорієнтованим графом, якщо $E \subseteq V^{(2)}$. Всякий граф є мультиграфом, але не всякий мультиграф буде графом. Якщо G = (V, E) – мультиграф, то E може мати кілька ребер, що з'єднують одні і ті ж вершини u і v. Такі ребра називаються кратними ребрами.

Два ребра називаються суміжними, якщо вони мають спільний кінець.

Вершина **u** і ребро **e** називаються інцидентними, якщо **u** є кінцем ребра **e**, і неінцидентними в протилежному випадку.

Степенем n(u) вершини u графа G називається число інцидентних їй ребер. Вершина степені 0 називається ізольованою, а вершина степені 1 – висячою, або кінцевою. Ребро, інцидентне кінцевій вершині, також називається кінцевим.

Якщо G = (V, E) – скінчений граф порядку n, то йому відповідає квадратна матриця A(G) розмірності n ∗ n, яка називаєтьяс матрицею суміжності

$$a_{ij} \begin{cases} 1, \text{ коли вершини } v_i \text{ і } u_j \text{ суміжні} \\ 0 \text{ – в протилежному випадку} \end{cases}$$

Приклад визначення ребер і вершин графа за допомогою матриці суміжності

Нехай маємо матрицю

0	1	1	1
1	0	1	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Цій матриці відповідає орграф (малюнок 7)

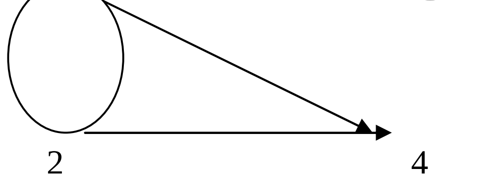


Рис.7

Всяка квадратна матриця, елементи якої 0 і 1, буде матрицею суміжності орієнтованого графа. Ранги матриць суміжностей ізоморфних графів рівні між собою.

Матриця I(G) графа G = (V, E), де V = {1, 2, … n}, E = {e_1, … e_m}, називаєтьяс матрицею інцидентності, вона задовольняє таким умовам

$$i_{kl} \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } k \text{ і ребро } e_l \text{ інцидентні} \\ 0 \text{ – в протилежному випадку} \end{cases}$$

Задачі і вправи

1. Неорієнтований граф G = (V, E, O) заданий аналітичним способом. V = (v1,v2,v3,v4,v5), E = (e1,e2,e3,e4,e5,e6,e7,e8,e9,e10), O = ((v1,v1), (v1,v3), (v1,v5), (v2,v3), (v2,v4), (v2,v5), (v3, v1), (v3,v4), (v4,v2), (v4,v5)).

Необхідно:

a) задати граф геометричним способом;
b) знайти матрицю суміжності;
c) визначити степені вершин графа.

2. Задано неорієнтований граф (малюнок 8).

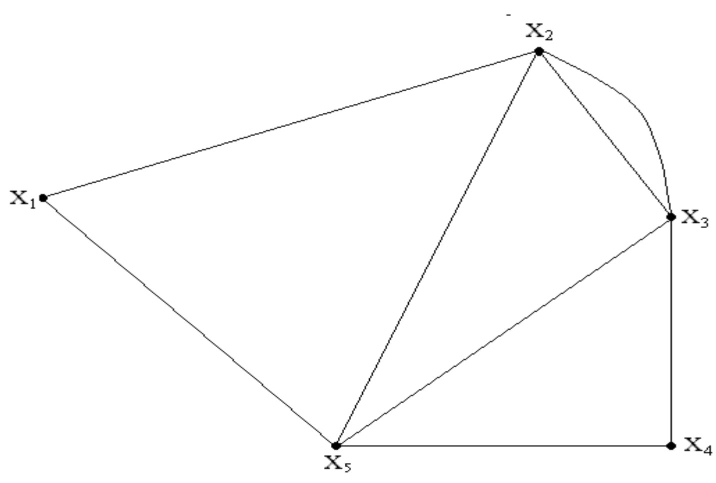


Рис.8

Необхідно:

a) знайти матрицю суміжності
b) визначити степені вершин графа;

3. Орієнтований граф G = (V,E,O) заданий аналітичним способом.

V = (v1,v2,v3,v4,v5), E = (e1,e2,e3,e4,e5,e6,e7,e8,e9,e10), O = ((v1,v1), (v1,v3), (v1,v5), (v2,v3), (v2,v4), (v2,v5), (v3, v3), (v3,v4), (v4,v5), (v5,v5)).

Необхідно:

a) задати граф геометричним способом;

b) знайти матрицю інцидентності;

c) визначити полу-степені вершин графа.

4. Задано орієнтований граф (малюнок 9).

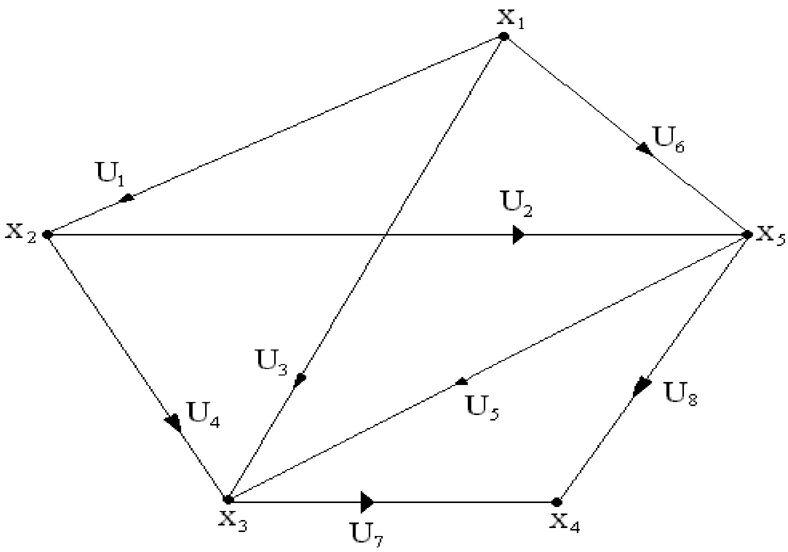


Рис.9

Необхідно:

a) знайти матрицю інцидентності;

b) визначити полу-степені вершин графа.

5. Знайти **найкоротший шлях** у графі G (мал. 10) між вершинами x_1 і x_{10}.

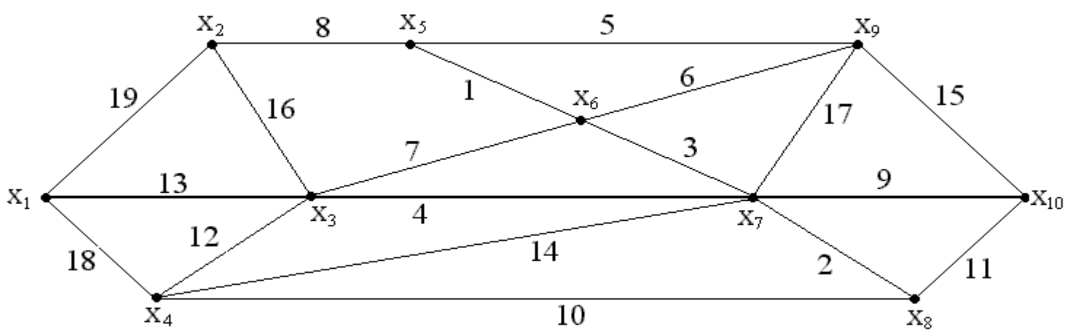


Рис.10

6. Знайти **остовне** дерево **найменшої ваги** для графа з задачі №5.
7. Вирішити задачу **комівояжера**, якщо задана **матриця відстаней**

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	22	26	56	38	60
X2	34	∞	12	51	37	27
X3	45	33	∞	44	47	37
X4	39	7	16	∞	57	8
X5	35	56	40	58	∞	27
X6	9	20	36	31	18	∞

8. Знайти **максимальну** течію у мережі (малюнок 11).

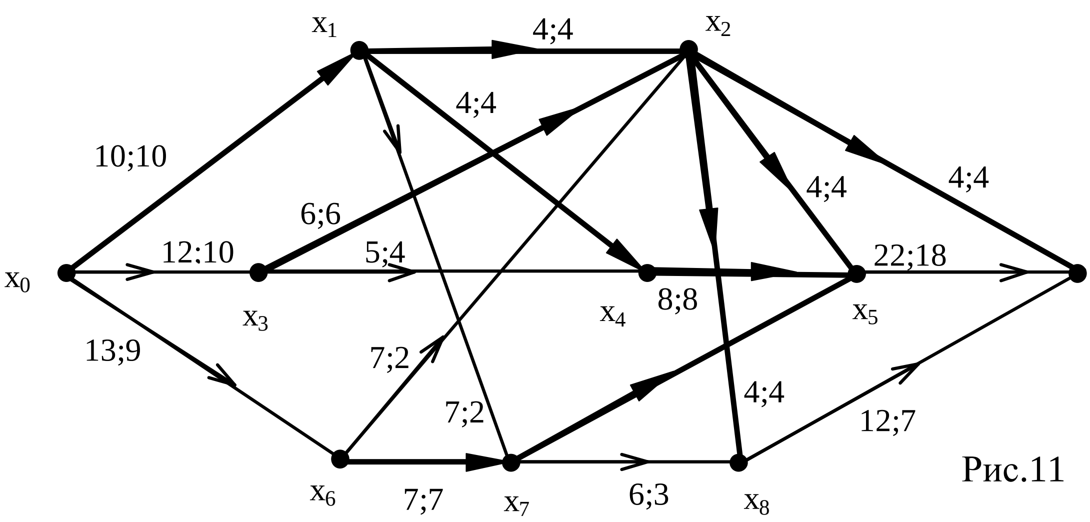


Рис.11

9. Нехай V – множина додатних цілих чисел від 1 до 20 і a|b – відношення подільності, тобто a|b означає, що число a є дільником числа b. Намалюйте граф відношення a|b для множини V.
10. Побудуйте матриці суміжності та інцидентності для платонових графів.
11. Нехай G – регулярний граф порядку n і степеня d. Покажіть, що $X_p(G) \geq$ $\geq n / (n - d)$.
12. Граф називається **критичним**, якщо вилучення будь-якої його вершини приводить до графа з меншим хроматичним числом.
   Доведіть, що:
a) K_n є критичним для всіх $n > 1$;
b) C_n критичний тоді, і тільки тоді, коли n непарне;

c) якщо n непарне, то з’єднання C_n і C_n є критичним графом, хроматичне число якого дорівнює 6.

13.Знайдіть Ейлерів ланцюг для графа, зображеного на малюнку 12.

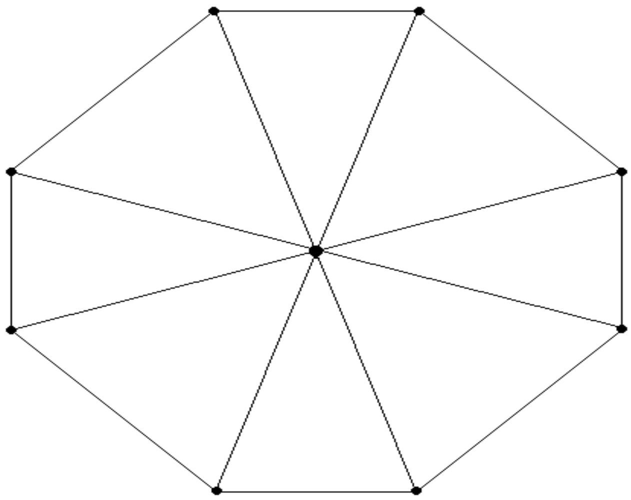


Рис.12

14.Побудуйте граф, множина вершин котрого відповідає множині курсів навчання, котрі вам необхідно пройти для отримання ступеня бакалавра. При цому, дугу от вершини x до вершини y включайте в граф тільки в тому випадку, якщо курс x попередній від курсу y. Інтерпретуйте наступні елементи побудови графа:

a) путь, b) ланцюг, c) цикл, d) контур,

d) зв’язану компоненту.

15.Степінь входження $d^-(x)$ вершини x визначається як число дуг, які заходять у вершину x. Степінь сходу $d^+(x)$ вершини x визначається як число дуг, які починаються у вершині x. Степінь d(x) вершини x визначається як сума степеней входження та сходу для даної вершини. Покажіть, що в будь-якому графі G кількість вершин з непарним степенем парно. Покажіть, що для будь-якого графа G = (X, A) має місце співвідношення

$$\sum_{x\in X} \boldsymbol{d}^{=}(\boldsymbol{x}) = \sum_{x\in X} \boldsymbol{d}^{-}(\boldsymbol{x}).$$

16.Нехай T – дерево, яке покриває для графа G. Покажіть, що в G для будь-яких двох вершин існує єдиний ланцюг, який складається тільки із ребер дерева T.

17.Чи можливо, щоб розтин і цикл вміщували в точності загальну дугу? Якщо неможливо, то чому?

ЛІТЕРАТУРА

1. Акимов О. Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. 376с.
2. Владимиров Д. А. Булевы алгебры. – М.: Наука, 1969. 316с.
3. Гаврилов Г. П. Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике. – М.: Наука, 1977. 367с.
4. Гжегорчик А. Популярная логика. – М.: Наука, 1979. – 111с.
5. Гильберт Д., Барнайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Наука, 1982. – 556с,
6. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высш. шк, 1986. – 311с.
7. Ершов Ю. Л. Палютин Е. А. Математическая логика. – М.: Наука, 1979. –318с.
8. Зинвьев А. А. Очерки комплексной логики. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. 557с.
9. Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985. 429с.
10. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К. Основи дискретної математики. / Підручник. – Київ: Наукова думка, 2002. – 578с.
11. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах. – М.: Мир, 1981. 325с.
12. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции, – М.: Наука, 1986. – 368с.
13. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука, 1971. – 320с.
14. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. – 400с.
15. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – С. Пб.: Москва – Харьков – Минск, 2002. 301с.
16. Рыжов Ю. М. Сущанский В. И. Булевы алгебры. – Киев. Вища школа, 1982. – 94с.
17. Татт У. Теория графов. – М.: Мир, 1988. – 349с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Кузьменко Вячеслав Віталійович
Швачич Геннадій Григорович
Пасинков Володимир Миколайович
Бартєнєв Георгій Михайлович

Основи дискретної математики

Навчальний посібник
Збірник задач та вправ

Тем. План 2004, поз. 224

Підписано до друку 20. 09.04. Формат 60x84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 2,17 Умов.-друк. арк. 2, 15. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України
49600, Дніпропетровськ – 5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно – видавничий відділ НМетАУ