МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

Г.Г. ШВАЧИЧ, Г.М. БАРТЕНЄВ, О.Г. ТКАЧЕНКО,
В.В. ТОЛСТОЙ, В.І. ХРИСТЯН, Н.В. ЦЕЛУЙКО

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Друкується за Планом навчальної та методичної літератури,
затвердженим Вченою радою НМетАУ
Протокол №1 від 27.01.2017

Дніпро НМетАУ 2017

УДК 543. 211/.205+543.4
Дослідження операцій: Навч. посібник / Г.Г. Швачич, Г.М. Бартенєв, О.Г. Ткаченко, В.В. Толстой, В.І. Христян, Н.В Целуйко. – Дніпро: НМетАУ, 2017. – 58 с.

Органічно поєднує теоретичні положення щодо дослідження операцій з їх використанням для розв’язку практичних завдань відповідного напрямку.

Наведені приклади розв’язування типових задач і задач для самостійної роботи студентів з дисципліни «Оптимізаційні методи та моделі».

Призначений для студентів напряму 6.030601 – менеджмент.

Іл. 11. Бібліогр.: 8 найм.

Друкується за авторською редакцією.

Відповідальний за випуск Г.Г. Швачич, д-р техн. наук, проф.

Рецензенти: Холод О.Г., канд. техн. наук, проф. (Дніпропетровський університет ім. А. Нобеля)
Поліщук А.В., канд. техн. наук, доц. (ДВНЗ «УДХТУ»)

ЗМІСТ

ВСТУП

Дослідження операцій – це наука, що займається розробкою та практичним впровадженням методів найбільш ефективного керування організаційними структурами.

Мета і завдання дисципліни: отримання теоретичних знань і практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціалізованих оптимізаційних методів, а також кількісне обґрунтування прийнятих управлінських рішень. Рішення, що є найбільш вигідним для всієї організації, називається оптимальним. Рішення, що є оптимальним лише для деякого підрозділу, називається субоптимальним.

Предмет: моделі та методи системного аналізу, методи дослідження і оптимізації операцій.

Основні етапи організаційного дослідження:

– постановка задачі;

– побудова математичної моделі;

– розв’язування економіко-математичної задачі;

– перевірка й коректування математичної моделі;

– реалізація знайденого розв’язку на практиці.

Найбільш типові задачі дослідження операцій:

– задачі керування запасами;

– задачі вибору маршруту;

– транспортні задачі;

– задачі масового обслуговування;

– комбінаторні задачі.

1. ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ (ЗЛП)

1.1. Загальна постановка задачі лінійного програмування (ЗЗЛП)

Загальною постановкою задачі лінійного програмування, представленою в довільній формі запису, називається задача, у якій необхідно визначити оптимум цільової функції

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to opt \qquad (1.1)$$

при наступних обмеженнях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; \quad (i = \overline{1,s}), \qquad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \quad (i = \overline{s+1,m}), \qquad (1.3)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (1.4)$$

Тут a_{ij}; b_i; c_j – деякі коефіцієнти.

Функція (1.1) називається функцією цілі (мети), або лінійною формою. Співвідношення (1.2), (1.3) є обмеженнями задачі. Умови (1.4) називаються умовами невід’ємності, що накладають на змінні.

Для розв’язування практичних задач частіше використовуються інші форми постановок ЗЛП, а саме симетрична і канонічні.

1.2. Симетрична форма постановки ЗЛП

В подальшому викладанні теорії математичного програмування надзвичайно важливе місце займає симетрична форма постановки ЗЛП, при якій необхідно знайти максимум лінійної форми

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \qquad (1.5)$$

при наступних обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (1.6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{1.7}$$

Відзначимо, що для симетричної форми запису ЗЛП характерна наявність тільки обмежень типу «≤».

1.3. Канонічні форми постановки ЗЛП

ЗЛП, заданою в канонічній формі, називається задача, у якій необхідно знайти оптимум лінійної форми

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to opt \tag{1.8}$$

при обмеженнях-рівностях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.9}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \qquad (1.10$$

Якщо цільова функція F досліджується на екстремум типу мінімум, то говорять, що задача задана в першій канонічній формі, а якщо на екстремум типу максимум – у другий.

Набір чисел $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняє системі обмежень ЗЛП, називається планом ЗЛП.

Набір чисел $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, що задовольняє не тільки системі обмежень ЗЛП, але й умовам невід’ємності, що накладаються на змінні, називається припустимим планом ЗЛП.

Припустимий план $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, що доставляє екстремум лінійній формі, називається оптимальним планом ЗЛП.

1.4. Приведення ЗЛП до канонічних форм

Представлені три форми постановок ЗЛП є еквівалентними в тому розумінні, що після нескладних перетворень можна перейти від однієї до іншої.

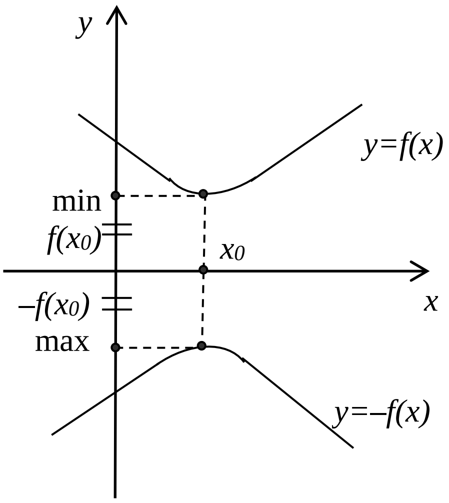
Для цього необхідно вміти переходити від *opt min* до *opt max* і навпаки, від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей і навпаки.

Наступні два твердження дозволяють здійснювати перехід від однієї форми запису ЗЛП до іншої.

Твердження 1. Мінімум лінійної форми *F* дорівнює максимуму лінійної форми (-*F*), узятому із протилежним знаком, тобто

$$\min F = -\max(-F)$$

Таке твердження досить просто довести, побудувавши графік функції однієї незалежної змінної (рис. 1.1).



$$\min f(x) = -\max\left[-f(x)\right]$$

Рис. 1.1. Функція однієї незалежної змінної

Твердження 2. Обмеження-нерівність вихідної задачі вигляду «≤» перетвориться в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової (балансової) невід'ємної змінної, а обмеження-нерівність вигляду «≥» перетвориться в обмеження-рівність вирахуванням з його лівої частини додаткової (балансової) невід'ємної змінної.

Теорема. Усякому розв'язку $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ нерівності вигляду

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le a_0 \qquad (1.11$$

відповідає цілком певний розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n,} \alpha_{n+1})$ рівності вигляду

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = a_0 \\ x_{n+1} \ge 0 \end{cases} \qquad (1.12$$

І навпаки, кожному розв'язку $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n,} \alpha_{n+1})$ рівності (1.12) відповідає цілком певний розв'язок $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ нерівності (11).

Доведення**.** Нехай $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – деякий розв'язок нерівності (1.11), тоді цілком очевидно, що буде виконуватися наступна нерівність

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \le a_0. \qquad (1.13$$

Позначимо різницю між правою й лівою частинами нерівності (13) через α_{n+1}:

$$\alpha_{n+1} = a_0 - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n) \ge 0. \qquad (1.14$$

Співвідношення (14) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n + \alpha_{n+1} = a_0 \\ \alpha_{n+1} \ge 0 \end{cases} \qquad (1.15$$

З (1.15) витікає, що сукупність чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n,} \alpha_{n+1})$ є розв'язком рівняння (1.12).

Таким чином, пряма частина теореми доведена, а зворотна частина доводиться аналогічно.

Приклад 1.1. Привести до першої канонічної форми ЗЛП

$$F = 3x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 2 \\ 2x_1 - x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Задача сформульована в загальній постановці, тому що для симетричної форми характерна наявність тільки обмежень типу «≤».

У першій канонічній формі задача запишеться в такий спосіб

$$F_1 = -F = -3x_1 + x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}$$

Приклад 1.2. Привести до першої канонічної форми ЗЛП

$$F = 4x_1 - 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 \ge 2 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

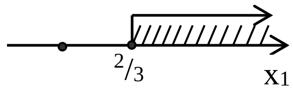


Рис. 1.2

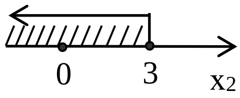


Рис. 1.3

З рис. 1.2, 1.3 бачимо, що для змінної x_1 виконується умова невід’ємності.

Замість змінної x_2 введемо нові змінні $x_3 \ge 0$ і $x_4 \ge 0$ за формулою

$$x_2 = x_3 - x_4 \qquad \text{(1.16}$$

З урахуванням (1.16), з вихідної постановки ЗЛП можна виключити змінну x_2, і задача отримає вигляд

$$F = 4x_1 - 2x_3 + 2x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 \ge 2 \\ x_3 - x_4 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_3 \ge 0; \quad x_4 > 0$$

Додаючи балансові змінні $x_5 \ge 0$ і $x_6 \ge 0$, запишемо задачу в першій канонічній формі.

$$F_1 = -F = -4x_1 + 2x_3 - 2x_4 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1{,}6}, \quad j \ne 2$$

2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ (ГРАФІЧНИЙ) МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗЛП

Графічний метод доцільно використовувати в тих випадках, коли цільова функція ЗЛП залежить від двох змінних. Графічно можна розв’язувати й багатомірні задачі, однак вони повинні містити до двох вільних змінних. Геометрична інтерпретація розв’язків ЗЛП дозволить зрозуміти надалі суть аналітичних методів розв’язування.

Постановка задачі. Знайти оптимум лінійної форми

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to opt \qquad (2.1)$$

при наступних обмеженнях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le a_{10}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le a_{20} \\ ------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le a_{m0} \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \qquad (2.3)$$

Областю припустимих розв’язків задачі (2.1) – (2.3) можуть бути замкнуті опуклі багатогранні тіла, розімкнуті опуклі багатогранні тіла або єдина крапка. Система нерівностей (2.2) – (2.3) моделює на площині зазначені області.

Функція (2.1) моделює на площині x_1ox_2 сімейство прямих, які називаються лініями рівня. Кожна з таких ліній відповідає за цілком певні значення функції цілі:

$$\begin{aligned} &F = C_1 \Rightarrow c_1x_1 + c_2x_2 = C_1 \\ &F = C_2 \Rightarrow c_1x_1 + c_2x_2 = C_2 \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &F = C_n \Rightarrow c_1x_1 + c_2x_2 = C_n \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned}$$

Серед ліній рівня виділяють одну, котра називається лінією нульового рівня, рівняння якої має вигляд:

$$F = 0 \text{ або } c_1x_1 + c_2x_2 = 0$$

Лінію нульового рівня можна інтерпретувати як геометричне місце точок площини, у кожній з яких значення цільової функції дорівнює нулю.

Розглянемо вектор-градієнт цільової функції

$$\overline{\nabla F} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right\} \text{ або } \overline{\nabla F} = \{c_1; c_2\}$$

Цей вектор вказує напрямок найшвидшого зростання цільової функції. Відзначимо, що вектор-градієнт $\overline{\nabla F}$ у кожній точці координатної площини x_1ox_2 перпендикулярний до лінії рівня функції F, що проходить через цю точку.

2.1. Алгоритм розв’язування ЗЛП графічним методом

Розв’язок ЗЛП графічним методом складається з наступних етапів:

1) У площині x_1ox_2 будуємо область припустимих планів даної ЗЛП – область Ω;

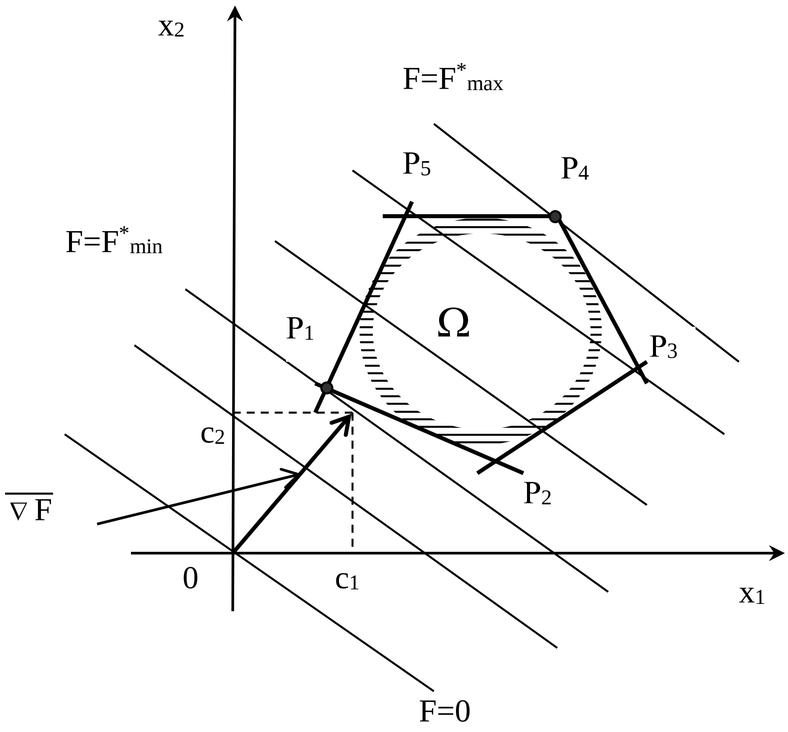


Рис. 2.1. Область припустимих планів ЗЛП

2) Знаходимо вектор-градієнт $\overline{\Delta F} = \{c_1 ; c_2\}$;

3) Будуємо лінію нульового рівня $F = 0$;

4) Лінію нульового рівня переміщаємо уздовж градієнтного напрямку (рис. 1.4) і визначаємо ту вершину опуклого багатогранника, що вперше стикається з лінією рівня. Ця вершина й буде відповідати оптимуму цільової функції типу мінімум $F^*_{min} = F(P_1)$.

Потім лінію рівня переміщаємо вглиб ОПЗ (рис. 1.4) і відшукуємо ту вершину багатогранника, після якої лінія рівня буде залишати зазначену область. Ця вершина й буде відповідати оптимуму цільової функції типу максимум $F^*_{max} = F(P_4)$.

5) Для одержання чисельного розв'язку задачі знаходимо координати відповідних вершин багатогранника й обчислюємо значення цільової функції в цих точках.

Приклад 2.1. Деяке підприємство освоїло виробництво продукції двох видів А і В, використовуючи при цьому сировину чотирьох типів S_1, S_2, S_3, S_4. Запаси сировини й норма її витрат на виробництво одиниці продукції зазначені в таблиці. Відомо, що прибуток підприємства від реалізації одиниці продукції виду А становить 7 у.о., а від реалізації одиниці товару типу В – 5 у.о. Визначити такий план випуску продукції, який би дозволив підприємству отримати максимальний прибуток.

Вид продукції / Вид сировини	A	B	Запаси сировини
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
S_3	1	0	6
S_4	0	1	5
Прибуток	7	5	

Сформулюємо задачу математично. Через x_1 позначимо кількість виробів виду А, а через x_2 – кількість виробів виду В, які необхідно виготовити за планом. Умова функції $F = 7x_1 + 5x_2$ – прибуток підприємства від реалізації виробленої продукції.

$$F = 7x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Дотримуючись послідовності дій при використанні графічного методу розв'язку, будуємо область припустимих планів Ω (використовуючи систему обмежень ЗЛП і умови невід'ємності, вектор-градієнт цільової функції $\overline{\Delta F} = \{7; 5\}$, лінію нульового рівня $7x_1 + 5x_2 = 0$).

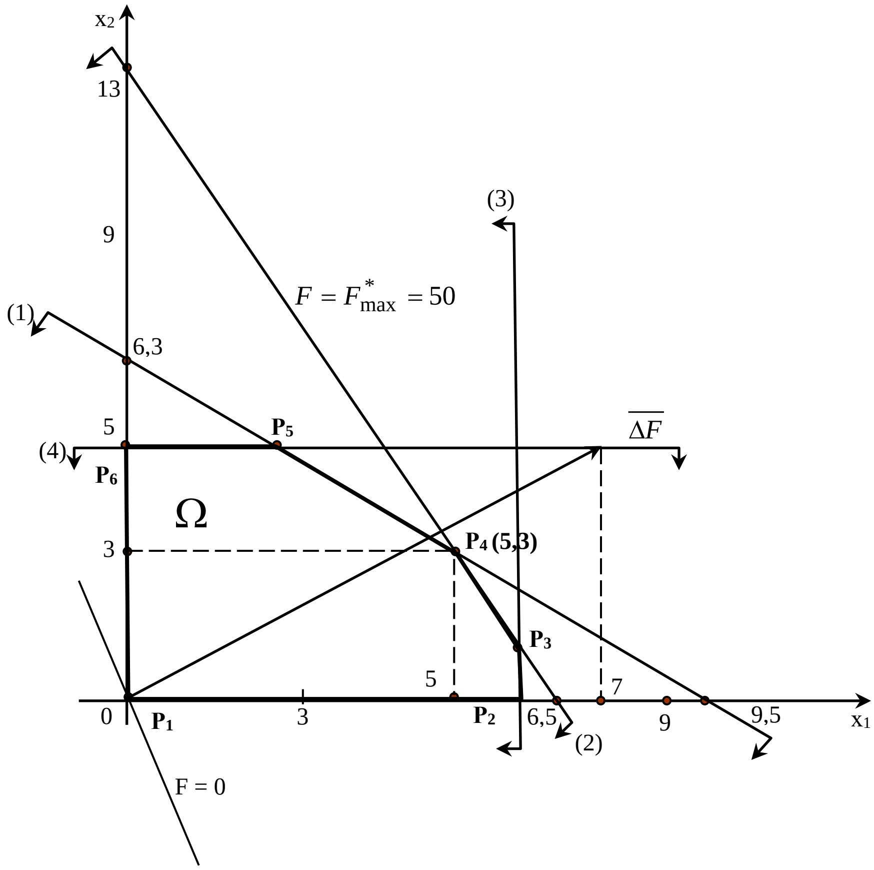


Рис. 2.2. Область припустимих планів Ω

Переміщуючи лінію нульового рівня уздовж градієнтного напрямку, знаходимо, що $F^*_{max} = F(P_4)$.

Визначимо координати вершини $P_4 : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 19 \\ 2x_1 + x_2 = 13 \end{cases}$.

Визначник системи $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$.

Тому що $\Delta = -4 \neq 0$, система сумісна за теоремою Крамера і має єдиний розв'язок $x_1^* = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2^* = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Обчислимо допоміжні визначники

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 19 & 3 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 19 - 39 = -20, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 26 - 38 = -12.$$

Тоді, за формулами Крамера знаходимо

$$x_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-20}{-4} = 5, \quad x_2^* = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3.$$

Таким чином, $P_4(5;\ 3)$. Знаючи координати точки P_4, визначимо максимальне значення цільової функції

$$F_{max}^* = F(P_4) = F(5;3) = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$$

$$x_{max}^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Виходить, що для одержання максимального прибутку в розмірі 50 у.о. підприємству при заданих обмеженнях на запаси сировини варто робити п'ять виробів типу А и три вироби типу В.

2.2. Особливості розв’язування ЗЛП графічним методом

1. Ω – область припустимих планів, $F^*_{max}=F(P_2)$, $F^*_{min}=F(P_4)$.

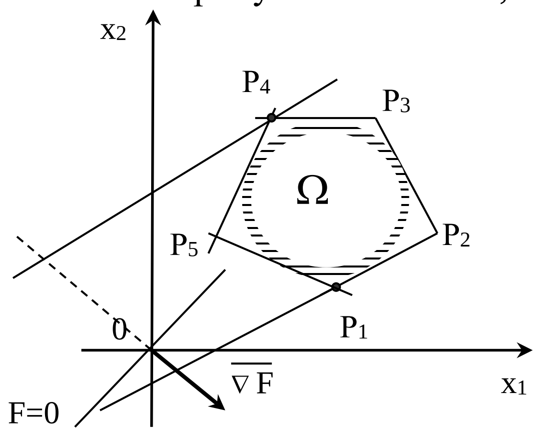


Рис. 2.3

2.

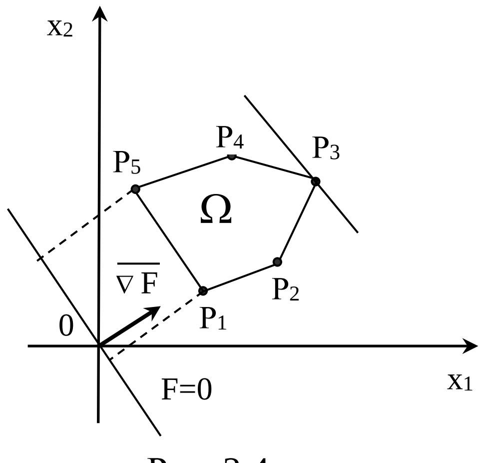


Рис. 2.4

$F^*_{max}=F(P_3)$, а мінімальне значення цільової функції досягається в кожній точці ребра P_1P_5 багатокутника Ω. Записуємо рівняння відрізка P_1P_5:

$$P_1P_5:\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1(P_1) \\ x_2(P_1) \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} x_1(P_5) \\ x_2(P_5) \end{bmatrix},$$
$$0 \le \lambda \le 1$$

3.

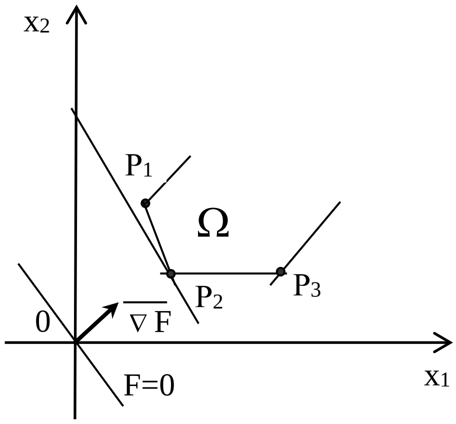


Рис. 2.5

$F^*_{min}=F(P_2)$

Лінійна форма необмежена зверху, отже, $F^*_{max} \to \infty$.

4.

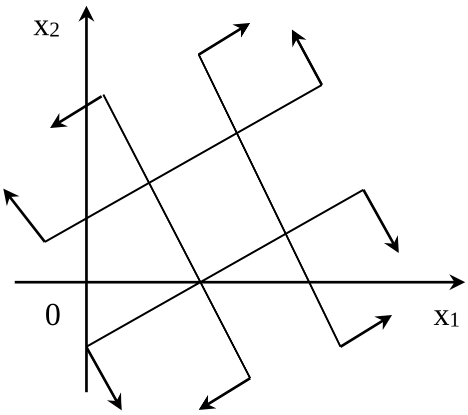


Рис. 2.6

Система обмежень даної ЗЛП несумісна, задача не має рішень.

2.3. Властивості розв’язків ЗЛП

Властивості розв’язків ЗЛП сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. Для існування оптимальних розв’язків ЗЛП необхідно й достатньо, щоб багатогранник розв’язків містив хоча б одну точку і щоб лінійна форма F на ньому була обмежена знизу при визначенні *opt* типу *min* і зверху при визначенні *opt* типу *max*.

Теорема 2. Якщо ЗЛП має оптимальний план, то він досягається у вершинах опуклого багатогранного тіла, що є ОПР (областю припустимих розв'язків або планів). Якщо ж оптимальний план досягається більш ніж в одній вершині, то він досягається в будь-якій точці опуклої лінійної комбінації відповідних вершин багатогранника.

2.4. Опорні плани ЗЛП

Розглянемо канонічну форму запису ЗЛП

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to opt \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ----------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n} \tag{2.6}$$

Щоб мало сенс говорити про оптимальний план задачі (2.4) – (2.6), необхідно й достатньо, щоб система обмежень (2.5) була сумісна в області невід'ємних значень змінних.

Тому що в системі лінійних рівнянь (2.5) m рівнянь і n змінних, то ранг r системи повинен бути менше числа змінних ($r<n$). У такому випадку серед змінних r змінних – базисні, і (n-r) змінних – вільні.

Визначення. Опорним планом ЗЛП називається такий план, у якому базисні змінні невід'ємні, а вільні дорівнюють нулю.

З визначення виходить, що кількість невід'ємних компонентів в опорних планах не повинне перевищувати ранг системи обмежень.

2.5. Геометрична інтерпретація опорних планів

Відомо, що плани ЗЛП із геометричної точки зору можна трактувати як геометричне місце точок опуклого багатогранного тіла, що є ОПР задачі. Тоді опорні плани ЗЛП є вершинами цього багатогранного тіла.

Теорема. Кожному опорному плану ЗЛП відповідає вершина багатогранника Ω і навпаки, кожній вершині багатогранника Ω відповідає опорний план. Таким чином, оптимальні плани варто шукати серед опорних.

3. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗЛП

Розглянутий вище графічний метод розв’язку ЗЛП застосовують до задач досить вузького класу. Універсальним методом розв’язування ЗЛП є симплексний метод (або метод послідовного поліпшення плану).

Симплексний метод дозволяє розв’язувати задачі в тому випадку, коли постановка виконана в одній з канонічних форм.

Нехай ЗЛП представлена в наступному виді

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to opt \qquad (3.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n} \qquad (3.3)$$

Припустимо, що система обмежень (3.2) сумісна в області невід’ємних значень змінних (3.3) і ранг системи дорівнює r (причому $r<n$).

Ідея методу. Симплексний метод рішення ЗЛП заснований на переході від одного опорного плану до іншого, де значення цільової функції ближче до оптимального, чим у попередньому опорному плані. З погляду геометрії симплексні процедури можна трактувати як послідовний, цілеспрямований перехід по ребрах опуклого багатогранника припустимих планів (від однієї його вершини до іншої (сусідньої), у якій значення цільової функції ближче до оптимального, чим у попередній вершині.

Симплексний метод розв’язку складається з двох етапів:

1. Визначається який-небудь первісний опорний план $\overline{X_0}$.

2. За спеціальними правилами здійснюється перехід

$\overline{X_0} \to \overline{X_1} \to \overline{X_2} \to ... \to \overline{X_n}^*$, поки не буде знайдене оптимальне значення (*opt*) лінійної форми. *Opt* лінійної форми буде доставляти опорний план $\overline{X_n}^*$.

3.1. Оптимальний план ЗЛП

Визначення оптимального плану типу мінімум проілюструємо на прикладі розв’язування наступної задачі:

$$F = 3 - x_4 + x_5 \to min \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases} \tag{3.5}$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,5} \tag{3.6}$$

Аналіз задачі.

1) задача представлена в першій канонічній формі;

2) система обмежень (3.5) включає п'ять змінних, $n = 5$, $r = 3$;

3) тому що $r = 3$, у системі будуть три базисні змінні й $n - r = 2$ – вільні;

4) x_1, x_2, x_3 – базисні змінні системи (3.5) (x_1 – тільки в першому рівнянні, x_2 - тільки в другому, x_3 – тільки в третьому);

5) x_4, x_5 – вільні змінні.

Виразимо лінійну форму (3.4) і базисні змінні через вільні

$$F = 3 - x_4 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_4 - x_5 \\ x_2 = 7 - 2x_4 - 3x_5 \\ x_3 = 2 + x_4 + 3x_5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad j = \overline{1,5}$$

Первісний опорний план $\overline{X}_0 = (2;7;2;0;0)$, значення цільової функції, що відповідає цьому плану, $F_0 = 3$.

Далі необхідно зменшувати значення лінійної форми F. Зменшення лінійної форми F можна здійснити за рахунок збільшення вільних змінних. Однак збільшення вільних змінних, у цьому випадку x_4, стримується базисними змінними, які повинні залишатися невід'ємними. Тому варто визначити ту базисну змінну, котра першою обернеться в нуль і перейде в розряд вільних. У розглянутій задачі першою обернеться в нуль базисна змінна x_1. Це видно з жорданової таблиці, в якій складено первісний план задачі. Після одного кроку модифікованих жорданових виключень одержимо нову жорданову таблицю, з якої одержимо нове значення цільової функції $F_1 = 1 < F_0$. При цьому це значення буде мінімальним, тому що в рядку лінійної форми всі елементи (за винятком значення функції F) від'ємні, і подальше зменшення значення цільової функції неможливо. Остаточно, маємо $F^*_{min} = 1$, $X^*_{min} = (0;3;4;2;0)$.

	1	$-x_4$	$-x_5$			1	$-x_1$	$-x_5$
x_1	2	1	1		x_4	2	1	1
x_2	7	2	3	$\Rightarrow$	x_2	3	–2	1
x_3	2	–1	–3		x_3	4	+1	–2
F	3	1	–1		F	1	–1	–2

3.2. Алгебра симплексного процесу при визначенні *opt* типу мінімум (*min*)

1. Розв'язувальний стовпець вибирається по невід'ємному елементу в рядку лінійної форми F (за винятком вільного члена). У розглянутій задачі це стовпець, що відповідає вільній змінній x_4.

2. Розв'язувальний рядок вибирається по мінімальному симплексному відношенню, тобто по мінімальному відношенню елемента стовпця вільних

членів до відповідного невід’ємного елемента розв'язувального стовпця. У розглянутій задачі $\min\left\{\frac{2}{1};\frac{7}{2}\right\}=\frac{2}{1}$, тобто розв’язувальний рядок – перший.

3. Розв'язувальний елемент завжди невід’ємний.

4. Перетворення симплексних таблиць проводиться в умовах прямо припустимості розв’язків.

Розв'язок прямо припустимий, якщо серед базисних змінних немає невід’ємних.

5. Процес триває доти, поки в рядку лінійної форми *F* всі коефіцієнти стануть від’ємними (за винятком, бути може, самого значення лінійної форми).

Визначення оптимального плану типу *max* проілюструємо на прикладі розв'язування наступної задачі:

$$F = 3 - x_4 + x_5 \to max \qquad F = 3 - x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7 \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_4 - x_5 \\ x_2 = 7 - 2x_4 - 3x_5 \\ x_3 = 2 + x_4 + 3x_5 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,5} \qquad x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,5}$$

Первісне значення лінійної форми $F_0 = 3$, $\overline{X_0} = (2;7;2;0;0)$.

На основі останньої форми запису ЗЛП складемо первісну жорданову таблицю

	1	$-x_4$	$-x_5$
x_1	2	1	1
x_2	7	2	3
x_3	2	–1	–3
F	3	1	–1

$F_0 = 3, \overline{X_0} = (2;7;2;0;0)$

$\Rightarrow$

	1	$-x_4$	$-x_1$
x_5	2	1	1
x_2	1	–1	–3
x_3	8	2	3
F	5	2	1

$\overline{x_1} = (0;1;8;0;2), F_1 = 5$

Нове значення лінійної форми $F_1 = 5 > F_0$, новий план $\overline{X_1} = (0;1;8;0;2)$. Цей план є оптимальним, тому що в рядку лінійної форми *F* всі елементи невід’ємні й подальше збільшення значення функції цілі неможливо. Таким чином, $F^*_{max} = 5$, $\overline{X}^*_{max} = (0;1;8;0;2)$.

3.3. Алгебра симплексного процесу при визначенні оптимального розв'язку типу максимум (*max*)

1. Розв'язувальний стовпець вибирається по від'ємному елементу в рядку лінійної форми F (за винятком вільного члена).

2. Розв'язувальний рядок вибирається по мінімальному симплексному відношенню.

3. Розв'язувальний елемент завжди позитивний.

4. Перетворення симплексних таблиць здійснюється в умовах прямо припустимості рішень.

5. Процес триває доти, поки в рядку лінійної форми F всі коефіцієнти стануть від'ємними (за винятком, бути може, значення лінійної форми).

3.4. Умови збіжності симплексного процесу

Визначення. ЗЛП називається невиродженою, якщо в жодному з її опорних планів серед базисних змінних немає нульових значень.

С точки зору геометрії виродженість ЗЛП можна трактувати як стягування двох вершин багатогранника (в одну (рис. 3.1). Виродженість, як правило, приводить до зациклення ітераційного процесу.

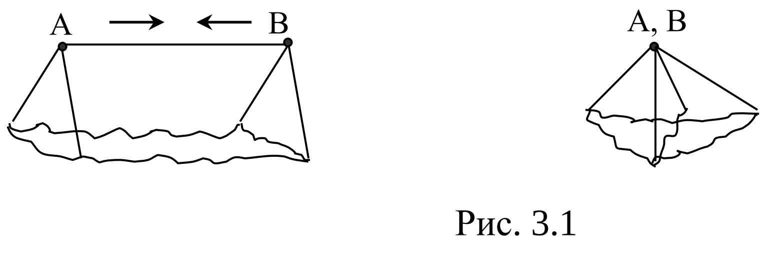


Рис. 3.1

Теорема про збіжність симплексного процесу. Нехай:

1. ЗЛП невироджена.

2. Система обмежень ЗЛП має, принаймні, одне опорне рішення.

3. Лінійна форма F обмежена знизу при визначенні *opt min* і зверху при визначенні opt типу максимум (*max*).

При виконанні цих умов симплексний процес сходиться за кінцеве число ітерацій.

Як правило, при рішенні ЗЛП симплексним методом кількість ітерацій $R < 2r$ (r – ранг системи обмежень ЗЛП).

Коментарі до теореми про збіжність симплексного процесу.

1. Ознака необмеженості цільової функції.

Нехай при розгляді функції F на екстремум типу максимум на деякому кроці симплексна таблиця придбала вигляд:

	1	$-x_4$	$-x_5$
x_1	2	–1	2
x_2	3	0	–1
x_3	1	–3	4
F	4	–1	5

З аналізу таблиці видно, що є можливість виконати крок симплекс-процесу (збільшити значення цільової функції за рахунок збільшення значення вільної змінної x_4) . Однак у відповідному стовпці немає невід'ємних елементів, тобто ріст змінної x_4 не стримується базисними змінними. Тому x_4 можна збільшувати необмежено, т.ч. $F^*_{max} \to \infty$.

Ознака наявності незліченної множини оптимальних планів

Нехай при дослідженні функції F на екстремум типу максимум на деякому кроці симплексна таблиця придбала вигляд:

	1	$-x_4$	$-x_5$
x_1	1	1	0
x_2	2	2	–1
x_3	4	3	4
F	3	0	2

З аналізу таблиці виходить $F = 3 - 0 \cdot x_4 - 2x_5 \Rightarrow max$

Приклад. Наступну задачу лінійного програмування розв'язати прямим симплексним методом. Розв'язок проілюструвати графічно.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$$

Система обмежень даної задачі сумісна, Ω - область припустимих планів представлена на рис. 3.2.

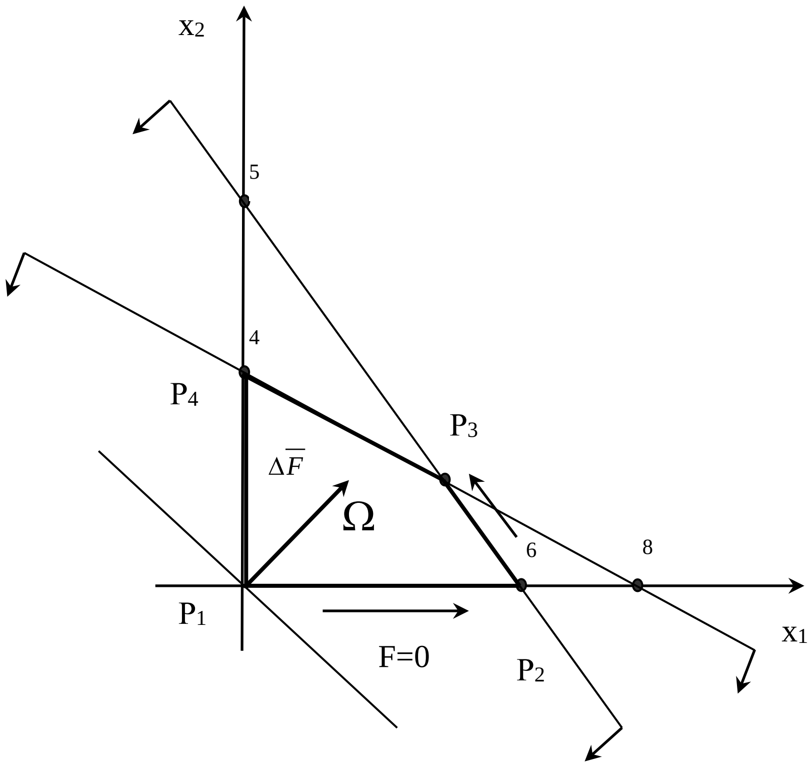


Рис. 3.2

Перетворимо обмеження-нерівності вихідної ЗЛП в обмеження-рівності шляхом введення балансових змінних $x_3, x_4 \ge 0$:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}$$

Виділимо базис невідомих (x_3, x_4 – базисні, x_1, x_2 – вільні) і виразимо базисні невідомі через вільні:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_3 = 6 - (x_1 + x_2) \\ x_4 = 8 - (x_1 + 2x_2) \end{cases}$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}$$

Складемо первісну симплексну таблицю:

	1	$-x_1$	$-x_2$
x_3	6	1	1
x_4	8	1	2
F	0	–2	–3

У даній таблиці записаний первісний опорний план:

$$F_0 = 0, \quad \overline{X}_0 = (0;0;6;8)$$

Геометрично цей план відповідає вершині $P_1(0;0)$ багатокутника Ω.

Аналіз первісного плану показує, що є можливість збільшити значення цільової функції (поліпшити план) за рахунок збільшення значень вільних невідомих (два від'ємних елементи в рядку лінійної форми).

Будемо збільшувати вільну змінну x_1 (тим самим визначаємо розв'язувальний стовпець). Тому що в розв'язувальному стовпці є невід'ємні елементи, то ріст змінної x_1 буде стримуватися базисними змінними, у вираз для яких x_1 входить зі знаком «мінус» $(x_3 = 6 \underline{- x_1} - x_2, x_4 = 8 \underline{- x_1} - 2x_2)$.

По мінімальному симплексному відношенню (відношенню вільного члена до невід'ємного елемента розв'язувального стовпця) визначимо, яка з базисних змінних першою обернеться в нуль:

$$\min\left\{\frac{6}{1}; \frac{8}{1}\right\} = \frac{6}{1}.$$

Виходить, першою обернеться в нуль і перейде в розряд вільних змінних базисна змінна x_3 (цим визначається розв'язувальний рядок на даному кроці жорданових виключень).

Нова симплексна таблиця має вигляд:

	1	$-x_3$	$-x_2$
x_1	6	1	1
x_4	2	–1	1
F	12	2	–1

В останній таблиці записаний поліпшений план:

$$F_1 = 12 > F_0, \overline{X}_1 = (6;0;0;2).$$

Геометрично цей план відповідає вершині $P_2(6;0)$ багатокутника Ω.

Наявність у рядку лінійної форми невід'ємного елемента свідчить про те, що значення цільової функції F_1 не є оптимальним і його можна далі збільшити за рахунок збільшення вільної змінної x_2. Розв'язувальний рядок визначаємо по мінімальному симплексному відношенню:

$$min\left\{\frac{6}{1};\frac{2}{1}\right\} = \frac{2}{1}.$$

Після одного кроку жорданових виключень одержимо нову симплексну таблицю

	1	$-x_3$	$-x_4$
x_1	4	2	–1
x_2	2	–1	1
F	14	1	1

і новий опорний план: $F_2 = 14 > F_1$, $\overline{X}_2 = (4;2;0;0)$. Цей план геометрично відповідає вершині $P_3(4;2)$ багатокутника Ω.

Останній опорний план є оптимальним, тому що в рядку лінійної форми немає від'ємних елементів і подальше збільшення значення цільової функції неможливо:

$$F^*_{max} = F_2 = 14, \ \overline{X}^*_{max} = \overline{X}_2 = (4;2;0;0).$$

4. МЕТОД ШТУЧНОГО БАЗИСА

Розв'язування ЗЛП симплексними процедурами завжди починається з визначення якого-небудь опорного плану. У розглянутому раніше прикладі первісний опорний план виділявся за рахунок балансових змінних.

Геометрично це означає, що область припустимих планів Ω у такій ЗЛП примикає до початку координат. Однак такий випадок на практиці зустрічається рідко. У цьому зв'язку для виділення первісного опорного плану звертаються до методу штучного базису. Відмітимо, що метод штучного базису дозволяє не тільки виділити первісний опорний план, але й відповістити на запитання сумісності системи обмежень ЗЛП в області невід'ємних значень змінних. Нехай деяка ЗЛП представлена в одній зі своїх канонічних форм.

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to max \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = b_1 \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j = b_2 \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = b_m \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = \overline{1,n} \tag{4.3}$$

Задача (4.1) - (4.3) називається вихідною. На підставі вихідної складають так називану розширену задачу.

Припускаючи, що всі $b_i \geq 0 \quad (j = \overline{1,m})$ в кожне з обмежень (4.2) уводять по штучній змінній ξ_i, кожна з яких задовольняє умові: $\xi_i \geq 0$. Далі визначають штучну лінійну форму *f*, що дорівнює сумі всіх введених штучних змінних.

Отже, у розширеній задачі буде $(m+n)$ змінних. Штучні змінні $\xi_1, \xi_2,..., \xi_m$ утворять *базис,* який називають штучним. Основні змінні $x_1, x_2,..., x_n$ на першому етапі рішення задачі будуть вільними. Розширена задача має вигляд:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to max \quad (4.4)$$

$$f = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \to min \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + \xi_1 = b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j + \xi_2 = b_2 \\ ----------- \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j + \xi_m = b_m \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{matrix} x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \\ \xi \ge 0, \quad i = \overline{1,m} \end{matrix} \quad (4.7)$$

Представимо розширену задачу (4.4) - (4.5) у вигляді, дозволеному щодо базисних змінних

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to max \quad (4.8)$$

$$f = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \to min \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} \xi_1 = b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \xi_2 = b_2 - \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ ----------- \\ \xi_m = b_m - \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{cases} \quad (4.10)$$

$$x_j \ge 0, \quad \xi_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n} \quad (4.11)$$

Цілком очевидно, що в системі обмежень (4.10) змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ входять до складу вільних. Тоді за умови $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ маємо $\xi_1 = b_1, \quad \xi_2 = b_2, \quad .., \quad \xi_m = b_m$.

Виділення первісного опорного плану вихідної задачі за допомогою штучних змінних засновано на застосуванні наступних теорем.

Теорема 1.

Для того, щоб система обмежень (4.2) – (4.3) вихідної задачі мала припустимі розв'язки, необхідно й достатньо, щоб мінімум штучної лінійної форми (33) дорівнював нулю, тобто $f_{min} = 0$.

Доказ необхідності.

Нехай система обмежень-рівностей (4.2) вихідної задачі має припустимі плани. Наприклад, це наступний набір чисел

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad x_n \geq 0 .$$

Тоді, підставляючи ці числа в систему обмежень (4.6) розширеної задачі, одержимо:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \xi_m = 0 .$$

Очевидно, що $f^*_{min} = 0$.

Таким чином, якщо система обмежень має розв'язки, то виконується умова $f^*_{min} = 0$.

Доказ достатності.

Нехай мінімум штучної форми дорівнює нулю ($f^*_{min} = 0$). Ця умова відповідає деякому рішенню системи обмежень (4.6) розширеної задачі. Нехай це рішення являє собою набір чисел

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \ldots; \quad x_n \geq 0; \tag{4.12}$$
$$\xi_1 = 0; \quad \xi_2 = 0; \quad \ldots; \quad \xi_m = 0. \tag{4.13}$$

Проаналізуємо набір чисел (40). Ясно, що такий набір буде задовольняти системі обмежень (34), а виходить, і системі обмежень (30). Із цього виходить, що вихідна система обмежень має, принаймні, одне припустиме рішення, що й необхідно було довести.

Теорема доводить існування припустимих рішень системи обмежень вихідної задачі. З існування припустимих розв'язків виходить існування опорних розв'язків.

Для одержання опорних розв'язків необхідно з розширеної задачі вивести штучний базис.

Теорема 2.

Якщо мінімум штучної лінійної форми більше нуля, то система обмежень вихідної задачі не має жодного припустимого плану (несумісна).

Доказ аналогічно доказу теореми 1.

Теорема 3.

Якщо в оптимальному плані розширеної задачі, принаймні, одна зі штучних змінних більше нуля, то вихідна задача не має жодного припустимого плану.

Доказ аналогічно доказу теореми 1.

Метод штучного базису називають ще двофазовим симплексним методом. Під цим розуміється наступне:

– перша фаза розв’язку задачі пов'язана з оптимізацією штучної лінійної форми *f*. На цьому етапі розв’язку виділяється первісний опорний план. Основна лінійна форма *F* при цьому поводиться пасивно. Особливість першої фази складається у виключенні із задачі штучних змінних за умови виконання прямо припустимості розв’язку ЗЛП;

– друга фаза розв’язку складається з оптимізації основної лінійної форми *F*, що на цьому етапі поводиться активно.

Відмітимо, що в розширеній задачі в якості базисних змінних можна приймати й балансові, тобто ті змінні, які з'являються при перетворенні обмежень-нерівностей в обмеження-рівності. У цьому випадку розширена задача називається задачею з неповним штучним базисом.

Різниця між балансовими і штучними змінними полягає в тому, що балансові змінні залишаються й на другому етапі рішення задачі, беручи участь в оптимізації основної лінійної форми *F*. Штучні ж змінні виводяться із задачі в першій фазі її розв’язку, оскільки вони використовуються лише для виділення первісного опорного плану.

Приклад 4.1. Розв’язати задачу лінійного програмування

$$F = 6 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10x_5 \to min \qquad (4.14)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 + 3x_5 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases} \qquad (4.15)$$

$$x_j \ge 0; \quad j = \overline{1,5}$$

У кожне обмеження-рівність введемо по одній штучній змінній. Одержимо розширену задачу

$$F = 6 - 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 10x_5 \to min \qquad (4.16)$$

$$f = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \to \min \qquad (4.17)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + \xi_1 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 + 3x_5 + \xi_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + \xi_3 = 4 \end{cases} \qquad (4.18)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}$$

$$\xi_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}$$

Представимо розширену задачу (4.16) – (4.18) у вигляді, дозволеному щодо базисних змінних

$$F = 6 - (2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 10x_5) \to min \qquad (4.19)$$

$$f = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 11 - (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 3x_5) \to min \qquad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2 - (x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 6x_5) \\ \xi_2 &= 5 - (x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 + 3x_5) \\ \xi_m &= 4 - (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4) \end{aligned} \qquad (4.21)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}$$

$$\xi_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}$$

Далі складемо первісну жорданову таблицю, додавши у звичайну таблицю ще один рядок – рядок штучної лінійної форми *f*.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	
ξ_1	2	1	–1	2	–2	–6	
ξ_2	5	1	2	–1	7	3	$\Rightarrow$
ξ_3	4	–1	1	1	–1	0	
F	6	2	–1	3	–2	–10	
f	11	1	2	2	4	–3	

В першій фазі розв'язку задачі досліджуємо на opt типу min штучну лінійну форму *f* (на кожному кроці модифікованих жорданових виключень виводяться із задачі по одній штучній змінній, тому що вони не будуть брати участь в оптимізації лінійної форми *F*).

⇒

	1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
x_1	2	–1	2	–2	–6
ξ_2	3	3	–3	9	9
ξ_3	6	0	3	–3	–6
F	2	1	–1	1	2
f	9	3	0	6	3

⇒

	1	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
x_1	9	3	3	–9
x_2	3	–3	9	–9
ξ_3	18	9	–9	–18
F	3	0	–6	–3
f	18	9	–9	–18

:(3) ⇒

	1	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$
x_1	3	1	1	–3
x_2	1	–1	3	–3
ξ_3	6	3	–3	–6
F	1	0	–2	–1
f	6	3	–3	–6

⇒

	1	$-x_4$	$-x_5$
x_1	3	6	–3
x_2	9	6	–3
x_3	6	–3	–6
F	3	–6	–3
f	0	0	0

:(3) ⇒

	1	$-x_4$	$-x_5$
x_1	1	2	–1
x_2	3	2	–1
x_3	2	–1	–2
F	1	–2	–1
f	0	0	0

З останньої жорданової таблиці видно, що $f^*_{min} = 0$, отже, система обмежень вихідної ЗЛП сумісна. На лівому бордюрі сформувався базис змінних: x_1, x_2, x_3

– базисні, x_4, x_5 – вільні змінні. Рядок штучної лінійної форми, що складається з одних нулів, може бути виключений з розгляду.

Таблиця, у якій записаний первісний опорний план, має вигляд

	1	$-x_4$	$-x_5$
x_1	1	2	–1
x_2	3	2	–1
x_3	2	–1	–2
F	1	–2	–1

$$F_0 = 1, \quad \overline{X_0} = (1;3;2;0;0)$$

У другій фазі рішення задачі активною стає рядок лінійної форми *F*. Аналіз первісного опорного плану показує, що цей план є оптимальним з погляду мінімуму лінійної форми (у рядку лінійної форми немає невід’ємних елементів, за винятком значення самої форми). Таким чином, остаточно маємо

$$F^*_{min} = F_0 = 1, \quad \overline{X}^*_{min} = \overline{X}_0 = (1;3;2;0;0).$$

5. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА (ТЗ)

ТЗ – задача про найбільш ощадливий (оптимальний) план перевезення однорідного або взаємозамінного продукту з пунктів поставок у пункти споживання.

Постановка задачі. Є m пунктів A_1, A_2, ..., A_m, у яких виготовляється або зберігається однорідний або взаємозамінний продукт у кількостях відповідно $a_1, a_2, ..., a_m$. Цей продукт необхідно доставити в n пункти споживання $B_1, B_2, ..., B_n$, де він потрібний відповідно в кількостях $в_1, в_2, ...в_n$. Відомі транспортні витрати (тарифи) c_{ij}, пов'язані із транспортуванням одиниці продукції з i пункту зберігання в j пункт споживання.

Потрібно скласти такий план перевезень, який би забезпечував при мінімальних транспортних витратах задоволення потреб всіх пунктів споживання за рахунок розподілу всього продукту, що перебуває в пунктах постачальника.

Для наочності ТЗ представляють у вигляді таблиці, яка називається розподільною.

Пост.	Споживач					Зап.
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}		c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}		c_{2n} x_{2n}	a_2
A_3	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}		c_{3n} x_{3n}	a_3
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}		c_{mn} x_{mn}	a_m
Потр.	$в_1$	$в_2$	$в_3$	…	$в_n$	$\sum ai = \sum bi$

Матриця $\lfloor c_{ij} \rfloor m \times n$ називається матрицею тарифів.

Для такої задачі невідомою є матриця перевезень – $\bar{x} = [x_{ij}] m \times n$ (тут x_{ij} означає кількість вантажу, перевезеного з *і* пункту постачальника в *j* пункт споживача.

Сформулюємо задачу математично, тобто складемо її математичну модель. Цільовою функцією такої задачі буде функція мінімізації сумарних транспортних витрат

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min \tag{5.1}$$

Така задача вирішується при наступних обмеженнях: весь вантаж з пунктів постачальника повинен бути повністю вивезеним, і всі потреби пунктів споживача повинні бути повністю задоволені

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2 \\ -------------- \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2 \\ -------------- \\ x_{1m} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n \end{cases} \tag{5.3}$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n} \tag{5.4}$$

Умовою сумісності транспортної системи обмежень є наявність балансу

$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ запаси вантажу дорівнюють потребам. (5.5)

Якщо умова (5.5) виконується, то математична модель ТЗ називається закритою. Якщо умова (5.5) не виконується, то математична модель ТЗ називається відкритою.

Відмітимо, що відкриту модель завжди можна привести до її закритого виду. Допустимо, що $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, тоді в розподільну таблицю ТЗ вводиться фіктивний ($n+1$) пункт споживання з потребами відповідно рівними $b_{m,n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. У той же час тарифи $C_{m,n+1} = 0$ для даного пункту.

Такий підхід дозволяє записати математичну модель закритої задачі.

5.1. Особливості математичної моделі ТЗ

1. Задача представлена в 1-ій канонічній формі.

2. Коефіцієнти при невідомих в обмеженнях дорівнюють 1.

3. Кожна змінна входить лише двічі у відповідні обмеження (це означає, що така таблиця буде слабозаповненою).

4. Ранг системи обмежень ТЗ $ч = m + n - 1$.

5. Усього в ТЗ буде $m \cdot n$ змінних, з них базисних $m \cdot n-1$, а вільних $m \cdot n-(m \cdot n-1)$.

Висновок. Представлений аналіз математичної моделі ТЗ показує, що така задача може розв'язуватись симплексною процедурою. Однак особливості її математичної моделі дозволили розробити більше прості й зручні методи розв'язування такої задачі, а саме:

– угорський метод;

– метод диференціальних рент;

– метод потенціалів.

Одним з найбільш простих є метод потенціалів.

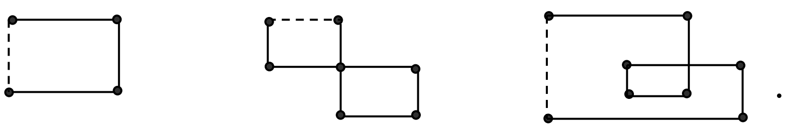
5.2. Метод потенціалів

Попередні відомості й поняття:

1. Будь-яку сукупність кліток розподільної таблиці називають набором.

2. Набір, у якого дві й тільки дві клітки розташовані в межах рядків або стовпців називають ланцюгом. З погляду геометрії ланцюг являє собою розімкнуту ламану лінію

3. Ланцюг, у якого перша й остання клітки розташовані в одному рядку або в одному стовпці називається циклом**.** З геометричної точки зору цикл можна інтерпретувати як замкнуту ламану лінію,



Необхідно розрізняти базисні й небазисні клітки таблиці ТЗ. У базисних клітках завжди записуються невід'ємні значення перевезень. Кількість базисних кліток повинна дорівнювати $m+n\text{-}1$. Небазисні клітки є порожніми, тобто незаповненими.

Відмітимо, якщо кількість базисних кліток менша за $(m+ n - 1)$, то ТЗ називають виродженою.

Для усунення виродженості до складу базисних кліток включають небазисні, але значення перевезень в них дорівнює 0.

Якщо набір базисних кліток не містить ні одного циклу, то план ТЗ називається ациклічним.

Теорема про оптимальний план ТЗ. Попередні відомості. Складемо математичну модель ТЗ

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i \quad i=\overline{1,m} \\ x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj} = b_j \quad j=\overline{1,n} \end{cases} \tag{5.7}$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i=\overline{1,m}; \quad j=\overline{1,n} \tag{5.8}$$

До задачі (5.5) – (5.8) складають двоїсту

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot U_i + \sum_{j=1}^{n} b_j V_j \to \max \tag{5.9}$$

$$U_i + V_j \leq c_{ij} \qquad i=\overline{1,m} \quad j=\overline{1,n} \tag{5.10}$$

З огляду на те, що U_i й V_j можуть мати будь-які знаки, то якщо змінним U_i присвоїти знак (-), тоді двоїста задача має вигляд

$$\overline{F} = \sum_{j=1}^{n} b_j V_j - \sum_{i=1}^{m} a_i U_i \to max \tag{5.11}$$

$$V_j - U_i \leq c_{ij}; \quad i=\overline{1,m} \qquad j=\overline{1,n} \tag{5.12}$$

Теорема

Для того, щоб деякий план $\overline{x} = \|x_{ij}\|_{m \cdot n}$ був оптимальним, необхідно й достатньо, щоб існувала система $m+n$ чисел U_i й V_j таких, щоб виконувалися умови

$$V_j - U_i \leq c_{ij} \quad i=\overline{1,m}; \qquad j=\overline{1,n} \tag{5.13}$$

для кліток небазисного набору, та

$$V_j - U_i = c_{ij} \quad i = \overline{1, m}; \qquad j = \overline{1, n} \tag{5.14}$$

для кліток базисного набору.

Тут числа U_i й V_j відповідно називаються потенціалами пунктів відправлення й потенціалами пунктів призначення. Тоді умови (5.13) і (5.14) називаються умовами потенційності кліток небазисного набору (5.13) і базисного набору (5.14).

У зв'язку з відзначеним теорему про оптимальний план ТЗ у компактному виді можна представити в такий спосіб.

Теорема

Для того, щоб деякий план ТЗ $\bar{x} = \|x_{ij}\|_{m \cdot n}$ був оптимальним, необхідно й достатньо, щоб він був потенційним.

Доказ. Нехай $\bar{x} = \|x_{ij}\|_{m \cdot n}$ є деякий оптимальний план, тоді відповідно до першої теореми теорії подвійності мають $\overline{F}_{max}(U;V) = F_{min}(\bar{x})$. У той же час у відповідності із другою теоремою теорії подвійності системи обмежень і прямої й двоїстої задач будуть задовольняти умовам доповнюючої нежорсткості Слейтера. Вкажемо умови Слейтера для двоїстої задачі

$$(V_j^* - U_i^* - c_{ij})x_{ij}^* = 0 .$$

Цілком очевидно, що для базисного набору кліток $x_{ij} > 0$, тому що в клітках зазначені невід’ємні значення перевезень. Тоді, щоб виконувалися умови Слейтера, необхідно й достатньо, щоб для базисного набору кліток вирази в дужках перетворювалися б в 0, тобто $V_j - U_i = c_{ij}$.

В той же час для небазисного набору кліток $x_{ij}^* = 0$. Це означає, що вираз в дужках може бути будь-яким (у рамках припустимого плану). Тоді для небазисного набору кліток в оптимальному плані повинне виконуватися співвідношення виду $V_j - U_i \le c_{ij}$. Теорема доведена.

Алгоритм методу потенціалів складається з 2-х кроків: попереднього й загального, який повторюється.

Попередній крок:

1. Складають первісний опорний план.

2. Складають первісну систему потенціалів.

3. Перевіряють план на потенційність.

Цілком очевидно, що якщо план потенційний, то він оптимальний, тоді на цьому етапі завершують розв’язок задачі.

Якщо план непотенційний, то він не оптимальний, і тоді переходять до загального кроку, який повторюється. У загальному кроці виконують наступні операції.

Загальний крок:

1. Перебудовують опорний план з метою його поліпшення.

2. Перебудовують систему потенціалів.

3. Перевіряють план на потенційність.

Відмітимо, що метод потенціалів сходиться й притім завжди за кінцеве число ітерацій.

5.3. Методи складання первісного опорного плану

Для опорних планів ТЗ пред'являються наступні вимоги:

1. Повинна задовольнятися система обмежень.

2. Кількість базисних кліток повинна дорівнювати $m+n-1$. Якщо ця умова не виконується, то до складу базисного набору кліток уводять додаткові клітки небазисного набору, але з нульовими значеннями перевезень. Саме в такий спосіб й усувається виродженість ТЗ.

3. Базисний набір кліток ТЗ повинен бути ациклічним.

Метод північно-західного кута

Метод, що називається правилом північно-західного кута, є одним з найбільш простих методів складання первісного опорного плану.

Розглянемо розподільну таблицю ТЗ

Пост.	Споживач				Зап.
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} a_1	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
...			...		...
A_n	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Потр.	$в_1$	$в_2$	...	$в_n$	$\sum a_i = \sum b_j$

Така таблиця починає заповнюватися з лівого верхнього кута (з північно-заходу). Принцип заповнення виражається співвідношенням

$$x_{ij} = min\{зап.; потр.\}$$

$$x_{11} = min\{a_1; b_1\}$$

Аналізуємо співвідношення між a_1 $в_1$ і далі процес заповнення кліток розвивається по рядку вправо, або по стовпцю вниз. Допустимо, $a_1 < b_1$

$$x_{21} = \min\{a_2; b_1 - a_1\}$$

Далі, процес розвивається по стовпцях і рядках доти, поки не буде заповнена клітка з адресою $m \cdot n$. Якщо ж процес завершиться раніше, ніж у клітці $m \cdot n$, то задача є виродженою.

Особливості методу:

1. Такого характеру методи ще називаються діагональними, оскільки порядок заповнення кліток здійснюється з лівого верхнього кута до правого нижнього.

2. Метод відрізняється надзвичайною простотою, тому що, якщо процес заповнення кліток закінчується в клітці з адресою $m \cdot n$, те побудований план свідомо буде опорним і немає необхідності перевіряти всі три вимоги до опорних планів.

3. Отриманий опорний план буде далекий від оптимального, оскільки він не враховує значення тарифів.

Метод найменшої вартості

Кількість ітерацій при рішенні ТЗ можна скоротити, якщо первісний опорний план будувати за більше розробленим методом – методом найменшої вартості.

Суть методу – на I етапі здійснюється максимально можлива поставка в клітку з найменшим тарифом, а остача, якщо вона є, розподіляється по рядку або стовпцю в порожню клітку з найменшим тарифом.

Особливість – метод враховує значення тарифів, а це означає, що побудований опорний план буде більш близький до оптимального, чим план, сформований за методом північно-західного кута.

Приклад 5.1. Побудувати первісний опорний план для ТЗ за методом північно-західного кута й методом найменшої вартості.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Зап.
A_1	3 100	5	7	11	100
A_2	1 50	4 80	6	3	130
A_3	5	8 40	12 80	7 50	170
Потр.	150	120	80	50	

$$\sum a_i = 400$$
$$\sum b_j = 400$$
$$x_{11} = \min\{100; \quad 150\}$$
$$x_{21} = \min\{130; \quad 150\}$$
$$x_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{bmatrix}$$
$$F_0 = 300 + 50 + 320 + 320 + 960 = 350 = 2300$$

Побудуємо первинний опорний план методом найменшої вартості:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Зап.
A_1	3 20	5 80	7	11	100
A_2	1 130	4	6	3	130
A_3	5	8 40	12 80	7 50	170
Потр.	150	120	80	50	

$$x_0 = \begin{bmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{bmatrix}$$
$$F_0 = 80 + 450 + 130 + 320 + 960 + 350 = 2200$$

Вирішити методом потенціалів, визначаючи при цьому первісний оптимальний план методом північно-західного кута

	$V_1=3$	$V_2=6$	$V_3=10$	$V_4=5$	Зап.
$U_1=0$	3 100	5	+7	11	100
$U_2=2$	1 50	4 80	6	3	130
$U_3=-2$	5	8 40	-12 80	7 50	170
Потр.	150	120	80	50	

$$V_j - U_i = c_{ij}$$
$$i = \overline{1,m} \quad j = \overline{1,n}$$
$$F_0 = 2300$$

Перевірка на потенційність кліток небазисного набору

$$V_j - U_i \le c_{ij}$$

$(1,2)\, 6-0 \le 5 \quad (1) \qquad (1,3)\, 10-0 \le 7 \quad (3)$

$(1,4)\, 5-0 \le 11 \quad (\text{потенц.}) \quad (2,3)\, 10-2 \le 6 \quad (2)$

$(2,4)\, 5-2 \le 3 \quad (\text{потенц.}) \quad (3,1)\, 3+2 \le 5 \quad (\text{потенц.})$

Серед непотенційних кліток вибирають клітку з найбільшим значенням непотенційності й вводять її до складу базисного набору за допомогою циклу, що утвориться цією кліткою із клітками базисного набору. Одна клітка небазисного набору утворить один єдиний цикл із клітками базисного набору. Вершини циклу позначаються знаками «+» й «-», починаючи з небазисної клітки, таким чином мають від’ємний і невід’ємний напівланцюги. У від’ємному напівланцюзі вибирають клітку з найменшим значенням перевезення, і виключають її зі складу базисного набору.

	$V_1=3$	$V_2=6$	$V_3=7$	$V_4=5$	Зап.
$U_1=0$	3 – 20	5 +	7 80	11	100
$U_2=2$	1 130	4 – 0	6	3	130
$U_3=-2$	5	8 120	12	7 50	170
Потр.	150	120	80	50	

$$x_0 = \begin{bmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$$F_0 = 60 + 560 + 130 + 960 + 350 = 2060$$

	$V_1=3$	$V_2=5$	$V_3=7$	$V_4=4$	Зап.
$U_1=0$	^{3} 20	$^{+5}$ 0	^{7} 80	^{11}	100
$U_2=2$	^{1} 130	^{4}	^{6}	^{3}	130
$U_3=-3$	^{5}	^{8} – 120	^{12}	^{7} 50	170
Потр.	150	120	80	50	

$$x_2 = x_1$$
$$F_2 = F_1$$

	$V_1=2$	$V_2=5$	$V_3=7$	$V_4=4$	Зап.
$U_1=0$	^{3}	^{5} 20	^{7} 80	^{11}	100
$U_2=2$	^{1} 130	^{4} 0	^{6}	^{3}	130
$U_3=-3$	^{5} 20	^{8} 100	^{12}	^{7} 50	170
Потр.	150	120	80	50	

$$x_3^* = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 100 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$
$$F_3^* = 100 + 560 + 130 + 100 + 800 + 350 = 2040$$

Отриманий план потенційний і оптимальний, тому що в ньому відсутні непотенційні клітки.

6. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОДВІЙНОСТІ

Фундаментальне значення в дослідженнях операцій, а також її додатках має теорія подвійності, основні положення якої розробив Л. В. Канторович. У рамках цієї теорії виникає питання оцінок оптимального плану, які застосовуються в економічному аналізі задач найкращого використання сировини. Необхідно відзначити, що теорія подвійності служить джерелом для розробки інших ефективних обчислювальних процедур.

Розглянемо задачу, що приводить до двоїстої. Задача про використання сировини.

Задача 6.1. Деяке підприємство освоїло випуск 2-х видів виробів P_1 і P_2. При цьому використовується 4 види сировини S_1, S_2, S_3, S_4. Запаси сировини й норма їх витрат представлені в наступному вигляді

	P_1	P_2	Зап.
S_1	2	3	20
S_2	1	2	15
S_3	0	3	10
S_4	3	0	5
Приб.	7	4	

Сформулюємо задачу математично. Позначимо через x_1 і x_2 кількість виробів відповідно вигляду P_1 і P_2, що повинне виготовити підприємство для одержання максимального прибутку. Математична модель задачі:

$$F = 7x_1 + 4x_2 \to max \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 20 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 3x_2 \le 10 \\ 3x_1 \le 5 \end{cases} \tag{6.2}$$

$$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0 \tag{6.3}$$

Припустимо, що деяка організація може закупити всі ресурси, які є в наявності даного підприємства. При цьому необхідно визначити opt ціни на ресурси, за умови, що покупець намагається загальну суму мінімізувати, а продавець – максимізувати. Цілком очевидно, що ціни на ресурси визначаються з урахуванням, що покупець повинен за них заплатити суму, не менше тієї, котру він би мав при організації власного виробництва. Тоді необхідно скласти задачу, яка б визначила оптимальні ціни на ресурси. Така задача називається двоїстою стосовно заданої.

$\overline{F}$ (двоїста цільова функція)

$$\overline{F} = 20y_1 + 15y_2 + 10y_3 + 5y_4 \to min \qquad (6.4)$$

y – ціна за одиницю ресурсу

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_4 \geq 7 \\ 3y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 4 \end{cases} \qquad (6.5)$$

$$y_i \geq 0 \quad i = \overline{1,4} \qquad (6.6)$$

При цьому тут задача (6.1) – (6.3) називається прямою задачею, а задача (6.4 - 6.6) називається двоїстою задачею. Між прямою і двоїстою задачами встановлюються наступні відповідності:

1. Якщо пряма задача є задачею максимізації, то двоїста задача – це задача мінімізації.

2. У прямій задачі всі обмеження-нерівності мають характер – «$\leq$», у двоїстої такі обмеження мають характер – «$\geq$».

3. Число змінних однієї задачі відповідає числу обмежень іншої задачі (і навпаки).

4. Якщо записати коефіцієнти при невідомих в одній із задач у вигляді матриці, то така матриця для іншої задачі буде транспонованою стосовно аналогічної матриці іншої задачі.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ – Матриця коефіцієнтів при невідомих $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

5. Стовпець вільних членів однієї із задач відповідає коефіцієнтам при невідомих цільовий функції іншої задачі.

Пара задач зв'язана між собою зазначеними особливостями називається парою взаємо двоїстих задач. Для пари взаємо двоїстих задач справедливий принцип взаємної подвійності: усяка ЗЛП – є двоїстою стосовно своєї двоїстої задачі.

Відзначимо, що в задачах (6.1)– (6.3), (6.4) – (6.6) одна з них орієнтована на *opt max*, інша – на *opt min*. Всі обмеження однієї й іншої мають характер нерівностей. Крім того, на всі змінні, як однієї, так і іншої задачі, накладаються умови невід’ємності. Тоді така пара двоїстих задач називається симетричною парою.

Складання двоїстої задачі, якщо пряма представлена зі змішаною системою обмежень.

При складанні пари двоїстих задач необхідно керуватися наступними правилами:

1. Всі обмеження-нерівності прямої задачі повинні мати той самий знак. При цьому характер нерівностей – обмежень і тип цільової функції погоджуються в такий спосіб:

а) $F \to max$ б) $\overline{F} \to min$

обмеження нерівності ≤ обмеження нерівності ≥.

2. Кожному обмеженню вихідної задачі ставиться у відповідність двоїста змінна. При цьому така змінна буде невід’ємною, якщо відповідає обмеженню - нерівності, і така змінна може мати будь-який знак, якщо відповідає обмеженню рівності.

3. При складанні пари двоїстих задач, крім того, необхідно керуватися наступними вимогами:

а) матриця коефіцієнтів при невідомих транспонується;

б) праві частини обмежень однієї із задач є коефіцієнтами при невідомих цільовий функції іншої задачі. При цьому, якщо пряма задача мала *opt* максимум (*max*), то двоїста повинна бути орієнтована у напрямку *opt* мінімум (*min*).

4. Якщо в прямій задачі умови невід’ємності накладалися не на всі змінні, а лише на деяку частину, то в такому випадку обмеження у двоїстій задачі будуть носити характер нерівностей, при цьому, якщо двоїстій змінній відповідає обмеження – нерівність у прямій задачі, то вона буде невід’ємною.

Якщо ж двоїстій змінній відповідає обмеження – рівність прямої задачі вона може бути будь-якого знака.

Відмітимо, що для пари взаємо двоїстих задач справедлива теорема про мінімум та максимум (або основна теорема теорії подвійності, або 1-а теорема теорії подвійності).

Теорема про мінімум та максимум.

Якщо одна із задач лінійного програмування (ЗЛП) має оптимальний план, то й інша задача буде мати оптимальний план. Причому при оптимальних рішеннях значення цільових функцій будуть збігатися, тобто

$$min\,\overline{F} = max\,F\,.$$

Якщо ж в одній із задач цільова функція необмежена, то двоїста задача буде суперечлива (якщо система обмежень несумісна). Якщо ж, нарешті, пряма задача суперечлива, то для двоїстої буде виконуватися альтернатива, або двоїста задача буде також суперечлива, або її цільова функція буде необмежена.

Розглянемо деякі приклади складання пари взаємо двоїстих задач

$$F = 2x_1 - x_2 \to max \qquad F = 2x_1 - x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 3 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x_1 + x_2 \le -3 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \qquad x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0$$

$$\overline{F} = -3x_1 + 4x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -4y_1 + 2y_2 \ge 2 \\ y_1 + 2y_2 \ge -1 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0; \quad y_2 \ge 0$$

$$F = x_1 - 10x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 \ge -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \le 3 \\ x_1 - 2x_3 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_3 \ge 0$$

$$F = x_1 - 10x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 7x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 \le 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \le 3 \\ x_1 - 2x_3 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_3 \ge 0$$

$$\overline{F} = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \to min$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \ge 1 \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 10 \\ -2y_2 + 3y_3 - 2y_4 \ge 2 \\ y_2 - y_3 = -3 \\ -y_2 + y_3 + y_4 = 7 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0; \quad y_2 \ge 0; \quad y_3 \ge 0$$

6.1. Основна нерівність теорії подвійності

Розглянемо пару взаємо симетричних двоїстих задач

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to max \tag{6.7}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{6.8}$$

$$x_1 \ge 0; \quad j = \overline{1,n} \tag{6.9}$$

$$\overline{F} = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to min \tag{6.10}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ ------------------ \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \le c_n \end{cases} \tag{6.11}$$

$$y_i \ge 0; \quad i = \overline{1,m} \tag{6.12}$$

Нехай деякий вектор $\overline{x} \ge 0$ є деяким припустимим планом прямої задачі, а $\overline{y} \ge 0$ є деякий припустимий план двоїстої задачі. Помножимо кожне обмеження системи (6.8) на відповідну йому двоїсту змінну, а кожне обмеження системи (6.10) – на відповідну йому змінну прямої задачі. При цьому маємо

$$\begin{cases} a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_2y_1 + ... + a_{1n}x_ny_1 \le b_1y_1 \\ a_{21}x_1y_2 + a_{22}x_2y_2 + ... + a_{2n}x_ny_2 \le b_2y_2 \\ a_{m1}x_1y_m + a_{m2}x_2y_m + ... + a_{mn}x_ny_m \le b_my_m \end{cases} \tag{6.13}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1x_1 + a_{12}y_2x_1 + ... + a_{m1}y_mx_1 \ge c_1x_1 \\ a_{21}y_1x_2 + a_{22}y_2x_2 + ... + a_{m2}y_mx_2 \ge c_2x_2 \\ a_{1n}y_1x_n + a_{2n}y_2x_n + ... + a_{mn}y_nx_n \le c_nx_n \end{cases} \tag{6.14}$$

Після процедури додавання обмежень (75) маємо

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jy_i \le \sum_{i=1}^{m} b_iy_i = \overline{F}_{\min}(y) \tag{6.15}$$

($\overline{F}$ – цільова функція двоїстої задачі)

Реалізуючи аналогічну операцію для обмежень (6.8), маємо

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \geq \sum_{i=1}^{m} c_i x_j = F_{max}(x) \qquad (6.16)$$

Об'єднаємо нерівність (6.15) і (6.16) в одну єдину здвоєну нерівність

$$F_{max}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \overline{F}_{min} \quad (y) \qquad (6.17)$$

Нерівність (6.17) – основна нерівність теорії подвійності. З такої нерівності виходить:

1. При будь-яких припустимих планах *max* цільової функції прямої задачі не перевищує *min* цільової функції двоїстої задачі.

2. Якщо значення *max* цільової функції прямої задачі буде відповідати значенню *min* цільової функції двоїстої задачі, то основна нерівність теорії подвійності перетворюється в рівність.

Виявляється, що цей факт є необхідною умовою існування оптимальної пари взаємо двоїстих задач.

Теорема.

Для того, щоб деяка пара припустимих розв'язків прямої і двоїстої задач була оптимальною парою, необхідно й достатньо, щоб для цієї пари основна нерівність теорії подвійності перетворювалася б у строгу рівність.

Друга теорема теорії подвійності.

Для того, щоб деяка пара рішень $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ була оптимальною парою необхідно й достатньо, щоб для цієї пари рішень виконувалися умови доповнюючої нежорсткості Слейтера.

Доказ необхідних умов теореми:

Нехай $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$; $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ є деяка оптимальна пара рішень прямої і двоїстої задач. Тоді, цілком очевидно, що основна нерівність теорії подвійності (6.17) буде перетворюватись в строгу рівність. Однак, це можливо тоді й тільки тоді, коли співвідношення (6.13) і (6.14) будуть перетворюватись в строгі рівності. Таким чином, для прямої задачі мають:

$$a_{11} x_1^* + a_{12} x_2^* + ... + a_{in} x_n^* - b_i) y_i^* = 0 \qquad (6.18)$$

$$i = \overline{1, m}.$$

Аналогічно для двоїстої задачі:

$$a_{1j}y_1^* + a_{2j}y_2^* + ... + a_{m1}y_1^* - c_j)x_i^* = 0 \qquad (6.19)$$

$$j = \overline{1,n}.$$

Співвідношення (6.18), (6.19) називаються умовами доповнюючої нежорсткості Слейтера для прямої й двоїстої задач відповідно.

Аналіз умов доповнюючої нежорсткості Слейтера.

Якщо в оптимальних планах прямої й двоїстої задач деякі обмеження виконуються як строгі рівності, то вирази в дужках співвідношень (6.17) та 6.18) виконуються як строгі рівності, і, відповідно, обертаються в 0. Тоді відповідна двоїста змінна y_j для прямої задачі й відповідна пряма змінна x_j для двоїстої задачі можуть мати будь-які значення.

Якщо при оптимальних планах деякі обмеження обертаються в строгі нерівності, як для прямої, так і для двоїстої задач, то відповідні змінні y_1 і x_j повинні обертатися в 0.

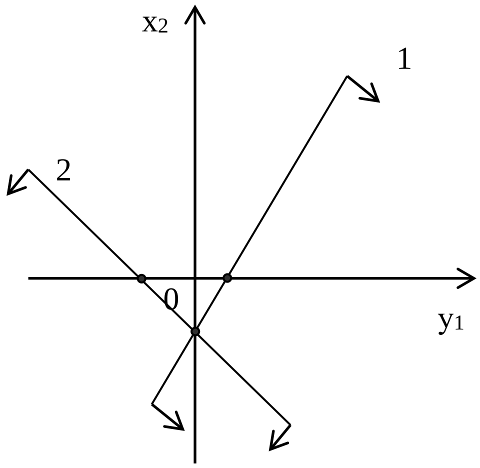
Доказ теореми.

Допустимо, що виконуються умови доповнюючої нежорсткості Слейтера. Це означає, що для деякої пари рішень x і y виконуються рівності співвідношень (6.15) і (6.16). У свою чергу, основна нерівність теорії подвійності буде обертатися в рівність. А це означає, що $max F(\overline{x}^*) = min \overline{F(\overline{Y}^*)}$. Таким чином, пара рішень $\overline{x}^{**}$ і $\overline{y}*$ буде оптимальною парою. З другої теореми подвійності виходить: якщо задано пряму й складена стосовно неї двоїста задача, то для одержання пари оптимальних рішень x^* й y^* досить вирішити тільки одну з таких задач, а потім, скориставшись умовами доповнюючої нежорсткості Слейтера, можна оцінити оптимальний план іншої задачі.

Приклад 6.1. По вихідній задачі скласти двоїсту. Вирішити її графічно, а потім по двоїстої задачі (скористатися УДНС) оцінити оптимальний план прямої задачі.

$$F = -2x_1 - 3x_2 \to min$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

$$\overline{F} = 4y_1 + 6y_2 \to max$$
$$\begin{cases} -4y_1 + y_2 \le -2 \\ 2y_1 + y_2 \le -3 \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0$$



1 $\dfrac{y_1}{1/2} + \dfrac{y_2}{-2} = 1$

2 $\dfrac{y_1}{-1{,}5} + \dfrac{y_2}{-3} = 1$

Отже, таким чином, двоїста задача несумісна (система обмежень вироджена).

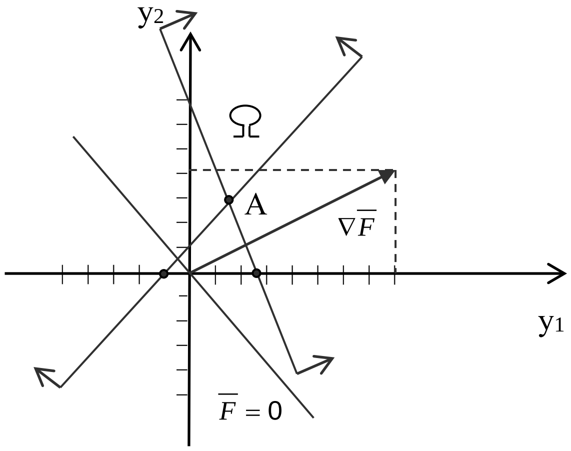
1) Для прямої задачі буде виконуватися альтернатива. Цільова форма такої задачі суперечлива (або система обмежень несумісна).

Приклад 6.2. По вихідній задачі скласти двоїсту. Вирішити її графічно, а потім за двоїстою задачею (скористатися УДНС) оцінити оптимальний план прямої задачі.

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to max$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Складемо двоїсту задачу

$$F = 14y_1 + 8y_2 \to min$$
$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2 \\ 3y_1 + y_2 \ge 7 \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0$$



ОДР – опуклий розімкнутий зверху багатогранник

$\nabla\overline{F}=(14;8)$

$\overline{F}_{min}(\overline{Y})=\overline{F}(A)$

$$\begin{cases}-2y_1+y_2=2\\3y_1+y_2=7\end{cases}\qquad \Delta=\begin{vmatrix}-2 & 1\\3 & 1\end{vmatrix}=-5\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 1\\7 & 1\end{vmatrix}=-5$$

$$\overline{Y}^*=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\qquad y_1=1\quad y_2=4$$

$$\overline{F}^*(\overline{Y})=14\cdot1+8\cdot4=46$$

$$\overline{F}_{min}(\overline{Y})=46$$

Відповідно до першої теореми теорії подвійності мають, що пряма задача також буде мати оптимальний план. Причому значення цільової функції оптимального плану буде відповідати 46 од.

Для того, щоб оцінити оптимальний вектор $\overline{x}^*$, необхідно скласти УДНС (Слейтера) для двоїстої задачі

$$\begin{cases}(-2y_1^*+y_2^*-2)x_1^*=0\\(-3y_1^*+y_2^*-7)x_2^*=0\end{cases}$$

$$x_1^*\ge0,\quad x_2^*\ge0$$

Складемо УДН Слейтера для прямої задачі

$$(-2x_1^*+3x_2^*-14)y_1^*=0$$

$$(x_1^*+x_2^*-8)y_2^*=0$$

$$y_1^*\ge0,\quad y_2^*\ge0$$

Таким чином, для прямої задачі в оптимальному плані, обмеження виконуються як строгі рівності. При цьому

$$\begin{cases}-2x_1^*+3x_2^*=14\\x_1^*+x_2^*=8\end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

$$x_1^* = 2 \qquad x_2^* = 6 \qquad \bar{x}^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Отже, отримано оптимальний план прямої задачі без її розв’язування. Для цього була використана друга теорема теорії подвійності.

6.2. Двоїстий симплексний метод

Проілюструємо особливості двоїстого симплексного методу на прикладі наступної задачі:

$$F = 7x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_1 \le 18 \\ 3x_2 \le 15 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Складемо двоїсту задачу стосовно заданої

$$\overline{F} = 19y_1 + 13y_2 + 18y_3 + 15y_4 \to min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 7 \\ 3y_1 + y_2 + 3y_4 \ge 5 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,4}$$

Відзначимо, що рішення прямої задачі лінійного програмування, у якої базисні змінні невід’ємні, називається прямо припустимим рішенням. У той же час рішення двоїстої задачі лінійного програмування, у якої невід’ємні коефіцієнти в рядку лінійної форми F, (крім, може бути, вільного члена) називається двоїсто-припустимим рішенням. Тоді цілком очевидно, що ідея рішення ЗЛП прямим симплексним методом полягає в наступному: зберігаючи прямо припустимість рішення, домагаються, щоб воно було й двоїсто припустимим.

Виявляється, що відзначений факт є необхідною й достатньою умовою існування оптимального плану ЗЛП.

Теорема.

Для того, щоб рішення деякої ЗЛП містило оптимальний план, необхідно й достатньо, щоб воно було прямо - і двоїсто - припустимим.

Представимо відзначену пару задач у вигляді, зручному для занесення її в первісну симплексну таблицю. Для прямої задачі:

$$F = 0 - (-7x_1 - 5x_2) \to max$$

$$\begin{cases} x_3 = 19 - (2x_1 + 3x_2) \\ x_4 = 13 - (2x_1 + x_2) \\ x_5 = 18 - (3x_1) \\ x_6 = 15 - (3x_2) \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

Цілком очевидно, що коли задачу вносять у первісну симплексну таблицю, то виконується умова прямо припустимості, але не виконується умова двоїстої припустимості.

У прямому симплексному методі розв’язувальний стовпець вибирають по від’ємному коефіцієнту в рядку лінійної форми *F*. Далі, маючи невід’ємний розв’язувальний елемент щораз домагаються невід’ємних значень у рядку лінійної форми *F*, за винятком вільного члена. Таким чином, зберігаючи прямо припустимість рішення, домагаються двоїстої припустимості.

Аналогічно, на цьому етапі запишемо двоїсту задачу у вигляді, зручному для занесення її в первісну симплексну таблицю.

$$-\overline{F} = 0 - (19y_1 + 13y_2 + 18y_3 + 15y_4) \to \max$$

$$\begin{cases} y_5 = -7 - (-2y_1 - 2y_2 - 3y_3) \\ y_6 = -5 - (-3y_1 - y_2 - 3y_4) \end{cases} \qquad y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,6}$$

Коментар: якщо таку задачу внести в первісну симплексну таблицю, то легко побачити, що рішення буде двоїсто припустимим, у той же час воно буде й прямо припустимим.

Ідея рішення ЗЛП двоїстим симплексним методом у наступному: зберігаючи двоїсту допустимість рішення, домагаються, щоб воно було й прямо припустимим.

У зв'язку з відзначеним, алгебру двоїстого симплексного методу можна вказати у вигляді набору наступних правил:

1. Розв'язувальний рядок вибирається по від’ємному значенню вільного члена (за винятком вільного члена цільової функції).

2. Вибирають розв’язувальний стовпець по мінімуму двоїстого симплексного співвідношення (тобто по мінімальному відношенню коефіцієнтів при невідомих цільової форми до модуля від’ємних коефіцієнтів розв'язувального рядка).

3. Розв'язувальний елемент завжди від’ємний.

4. Далі, зберігаючи двоїсту допустимість розв’язку, домагаються, щоб воно стало й прямо припустимим.

5. Якщо від’ємному коефіцієнту розв'язувального рядка відповідають невід’ємні значення коефіцієнтів при невідомих, то двоїста задача не має рішень.

Вирішимо представлені ЗЛП двоїстим симплексним методом

	1	$з_1$	$з_2$	$з_3$	$з_4$
$в_5$	–7	–2	–2	–3	0
$в_6$	–5	–3	–1	0	–3
$-\overline{F}$	0	19	13	18	15

$$\min\left\{\frac{19}{|-3|};\quad \frac{13}{|-1|};\quad \frac{15}{|-3|}\right\}$$

	1	$з_1$	$з_2$	$з_3$	$з_6$
$в_5$	21	6	6	9	0
$в_4$	–5	–3	–1	0	1
$-\overline{F}$	75	–12	–24	–54	–15

:(–3)

	1	$з_1$	$з_2$	$з_3$	$з_6$
$в_5$	–7	–2	–2	–3	0
$в_4$	5/3	1	1/3	0	–1/3
$-\overline{F}$	–75/3	4	8	18	5

	1	$з_5$	$з_2$	$з_3$	$з_6$
$в_1$	–7	1	–2	–3	0
$в_4$	11/3	–1	4/3	3	2/3
$-\overline{F}$	78	–4	–8	–24	-10

:(–2)

	1	$з_5$	$з_2$	$з_3$	$з_6$
$в_1$	7/2	–1/2	1	3/2	0
$в_4$	–11/6	1/2	–2/3	–3/2	–1/3
$-\overline{F}$	–39	2	4	12	5

	1	$з_5$	$з_4$	$з_3$	$з_6$
$в_1$	–1/2		–1		
$в_2$	–11/6	1/2	1	–3/2	–1/3
$-\overline{F}$	100/3	–2/3	–4	–2	5

	1	$з_5$	$з_4$	$з_3$	$з_6$
$в_1$	3/4				
$в_2$	11/4				
$-\overline{F}$	–50	1	6	3	3

Двоїста допустимість розв’язку

Остання жорданова таблиця має оптимальний план

$$-\overline{F}^{*}_{max} = -50$$

$$F_{min} = 50$$

$$\overline{x}^{*} = (3/4; 11/4; 0,0,0,0)$$

6.3. Економічний зміст оптимальних планів пари двоїстих задач

З економічної точки зору рішення прямої ЗЛП дозволяє одержати оптимальний план випуску продукції, тобто план, при якому досягається максимум прибутку, у той же час рішення двоїстої задачі дозволяє одержати оптимальну систему оцінок використовуваних ресурсів, тобто систему оцінок, при якій підсумовування вартості ресурсів буде мінімальним.

З першої теореми теорії подвійності виходить, що максимальний прибуток від реалізації відповідної продукції дорівнює мінімальному прибутку від продажу сировини. Однак, оптимальні плани взаємо-двоїстих задач зв'язані між собою й іншими співвідношеннями. Проаналізуємо їх, опираючись на другу теорему теорії подвійності.

Так, якщо деякі обмеження в оптимальному плані виконуються як строгі нерівності $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_1$, то відповідна двоїста змінна $y_i^* = 0$. З економічної точки зору це означає, що такі ресурси не повністю йдуть у виробництво, вони називаються недефіцитними й оптимальна оцінка таких ресурсів дорівнює 0. Якщо ж в оптимальному плані прямої задачі деякі обмеження виконуються як рівності $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_1$, $y_i^* > 0$, то відповідна двоїста оцінка таких ресурсів буде позитивна. Такі ресурси з погляду економіки називаються дефіцитними. У той же час, якщо в оптимальному плані деякі обмеження двоїстої задачі виконуються як строгі нерівності $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i^* > c_i$, то тоді відповідна двоїста змінна $x_j^* = 0$. З погляду економіки це означає, що витрати на виробництво *j* продукту перевищують прибуток від реалізації такого продукту, тоді та обставина, що $x_j^* = 0$, пояснює, що такий продукт виготовляти недоцільно.

ЛІТЕРАТУРА

1. Вітлінський В.В., Наконечний С.І., Терещенко Т.О. Математичне програмування. Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни. – К.: КНЕУ, 2001. – 228 с.
2. Дегтярев Ю.И. Исследование операций (учебное пособие для студентов вузов). – М.: Высшая школа, 1979. – 354 с.
3. Зайченко Ю. Н. Исследование операций. – К.: Вища школа, 1985. – 186 с.
4. Зайченко Ю. Н., Шумилов С. А. Исследование операций (сборник задач). – К.: Вища школа, 1984. – 272 с.
5. Кузнецов А.В., Холод Н.И. Математическое программирование. – Минск: Вышейшая школа, 1984. – 329 с.
6. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. – М.: Банки и биржи, 1997. – 145 с.
7. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.– 264 с.
8. Швачич Г.Г. MATHCAD в інженерних та економічних розрахунках: Навчальний посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2000. – 72 с.

Навчальне видання

Швачич Геннадій Григорович

Бартенєв Георгій Михайлович

Ткаченко Олена Георгіївна

Толстой Віктор Володимирович

Христян Володимир Іванович

Целуйко Наталя Василівна

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Навчальний посібник

Тем. план 2017, поз. 292

Підписано до друку 01.02.2017. Формат 60х84 1/16. Папір друк. Друк плоский. Облік.-вид. арк. 3,41. Умов. друк. арк. 3,36. Тираж 100 пр. Замовлення №

Національна металургійна академія України

49600, м. Дніпро-5, пр. Гагаріна, 4

Редакційно-видавничий відділ НМетАУ