МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Библиотека иностранного студента

Л.П. КАГАДИЙ, И.Л. ШИНКОВСКАЯ, И.П. ЗАЕЦ,
Л.Ф. СУШКО

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть II

Днепропетровск НМетАУ 2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Л.П. КАГАДИЙ, И.Л. ШИНКОВСКАЯ, И.П. ЗАЕЦ,
Л.Ф. СУШКО

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Часть II

Утверджено <u>на заседании Ученого совета академии</u>
<u>в качестве учебного пособия. Протокол № 13 от 15.01.2015</u>

Днепропетровск НМетАУ 2015

УДК
Л.П. Кагадий, И.Л. Шинковская, И.П. Заец, Л.Ф. Сушко. Высшая математика. Часть 2: Учебное пособие. – Днепропетровск: НМетАУ, 2015. - 105 с.

Приведены подробные рекомендации к изучению дисциплины «Высшая математика». Теоретические положения сопровождаются решением типовых задач. Рекомендуются задания для самостоятельной работы.

Учебное пособие предназначено для иностранных студентов направления 6.050401 «Металлургия» и других направлений всех форм обучения.

Илл. 20. Библиогр.: 7 наим.

Печатается под авторской редакцией.

Ответственный за выпуск А.В. Павленко, д-р. физ.-мат. наук, проф.

Рецензенты: Е.А. Сдвижкова, д-р техн. наук, проф. (НГУ)
А.В.Сясев, канд. физ.-мат. наук, доц. (ДНУ)

© Национальная металлургическая академия Украины, 2015

© Кагадий Л.П., Шинковская И.Л., Заец И.П., Сушко Л.Ф.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

За последние годы составляющая международного образования в системе высшего образования претерпела перемены: значительно увеличилось число иностранных студентов, желающих получить образование в высших учебных заведениях Украины. В связи с этим значительно возросла ответственность вуза за качество подготовки специалистов.

Процесс обучения иностранных студентов имеет свою специфику и особенности. Цель предлагаемого пособия – помочь слушателям при изучении дисциплины «Высшая математика» разобраться и качественно усвоить учебный материал.

Вторая часть учебного пособия включает в себя такие разделы высшей математики: «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Приводятся основные теоретические положения и формулы, которые иллюстрируются подробным решением задач разного уровня сложности. В конце каждой темы предлагаются задачи для самостоятельной работы. Руководствуясь учебным пособием, студенты приобретут базовые знания по теории и получат навыки решения задач.

Для снижения уровня языковой адаптации в конце пособия приводится список математических терминов и словосочетаний, составленных по предлагаемому материалу на французском и английском языках.

Пособие может быть также использовано для самостоятельной работы и подготовки к модульному контролю студентов технических направлений всех форм обучения.

Учебное пособие издается на русском языке, что обусловлено договором между НМетАУ и иностранными студентами о языке обучения.

1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

1.1. Определение функции

Пусть X и Y – некоторые числовые множества и пусть каждому элементу $x \in X$ по какому-либо закону f поставлен в соответствие один элемент $y \in Y$. Тогда говорят, что задана ***функция*** y от x и записывают $y = f(x)$. При этом x называют ***независимой переменной*** (или ***аргументом***), а y – ***зависимой переменной***. Множество X называют ***областью определения*** функции и обозначают $D(y)$, а множество Y – ***множеством значений*** функции и обозначают $E(y)$. При решении задач, связанных с нахождением области определения функции, удобно пользоваться таблицей *Приложения 1*.

Пример 1.1.1. Найти области определения функций:

а) $y = 3x^2 - 2x + 1$; б) $y = \dfrac{4x-5}{x^2-3x+2}$; в) $y = \sqrt[4]{x^2 - 16}$;

г) $y = x\,log_5(2x-1)$; д) $y = arccos\dfrac{x+3}{2}$; е) $y = \dfrac{sin\,x}{\sqrt{x^2+x-6}}$;

ж) $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}$; з) $y = \sqrt[3]{2x^3-8} + \dfrac{5}{ln(4-3x)}$.

Решение

а) Заданная функция – целая рациональная, x может принимать любые значения. Значит, область определения: $x \in (-\infty;\infty)$.

б) Функция $y = \dfrac{4x-5}{x^2-3x+2}$ - дробно-рациональная. Она определена при всех значениях переменной, кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Исключив эти значения, получим $D(y): x \in (-\infty;1) \cup (1;2) \cup (2;\infty)$.

в) Функция содержит переменную под знаком корня четной степени. Значит, должно выполняться условие: $x^2 - 16 \ge 0$. Тогда $x^2 \ge 16$, $|x| \ge 4 \Rightarrow x \ge 4$ или $x \le -4$, т.е. $D(y): x \in (-\infty;-4) \cup (4;\infty)$.

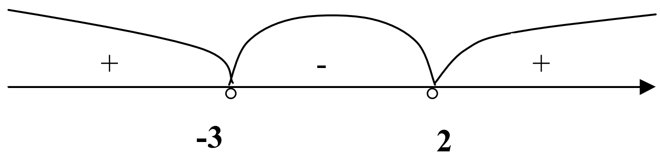
г) В состав функции входит логарифм, а его аргумент должен быть положительным, т.е. $2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$. Тогда $D(y): x\in\left(\frac{1}{2};\infty\right)$.

д) Исходя из области определения арккосинуса, для его аргумента должно выполняться условие: $-1\le\frac{x+3}{2}\le 1$. Откуда $-2\le x+3\le 2$ или $-5\le x\le -1$. Тогда получим, что $D(y)$: $x\in[-5;-1]$.

е) Данная функция имеет два ограничения: подкоренное выражение должно быть неотрицательно и знаменатель не должен обращаться в ноль. Значит, область определения найдем из следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x^2+x-6\ge 0, \\ x^2+x-6\ne 0 \end{cases} \Rightarrow \; x^2+x-6>0.$$

Решим это неравенство методом интервалов: $(x-2)(x+3)>0$.



Тогда $D(y): x\in(-\infty;-3)\cup(2;\infty)$.

ж) Функция $y_1=\sqrt{5-x}$ существует для всех x, при которых $5-x\ge 0$, а функция $y_2=\sqrt{x+3}$ - при $x+3\ge 0$. Для исходной функции должны выполняться оба условия, т.е. область определения найдем, решив систему неравенств: $\begin{cases} 5-x\ge 0, \\ x+3\ge 0 \end{cases}$. Получим: $-3\le x\le 5$. Тогда $D(y): x\in[-3;5]$.

з) Область определения найдем из условий: $\begin{cases} ln(4-3x)\ne 0, \\ 4-3x>0. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} 4-3x\ne 1, \\ 4-3x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ne 1, \\ x<\frac{4}{3} \end{cases}$. Значит, $D(y): x\in(-\infty;1)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

1.2. Способы задания функций

Соответствие между x и y, которое определяет функциональную зависимость $y=f(x)$, устанавливается различными способами.

Табличный способ предполагает наличие некоторой таблицы, в которой помещены частные значения x и соответствующие им значения y. Например, тригонометрические, логарифмические и прочие таблицы.

Графический – задает график функции $y = f(x)$, т.е. определяет на плоскости Oxy линию, для которой равенство $y = f(x)$ служит ее уравнением.

Аналитический – выражает соответствие между аргументом и функцией посредством одной или нескольких формул, уравнений. При этом функции вида $y = f(x)$ называют ***явными***, а функции вида $F(x, y) = 0$ – ***неявными***. В некоторых случаях аналитически заданные функции описываются двумя формулами, в которых x и y определены как функции вспомогательной переменной t, называемой параметром: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$. Такой способ задания функции называют ***параметрическим***.

1.3. Специальные классы функций

Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется ***четной***, если для любого значения $x \in D(y)$ выполняется равенство: $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат (рис.1.1).

Функция $y = f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется ***нечетной***, если для любого значения $x \in D(y)$ выполняется равенство: $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис.1.2).

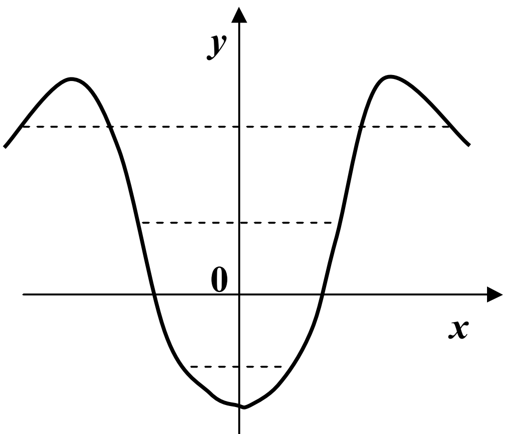


Рис.1.1

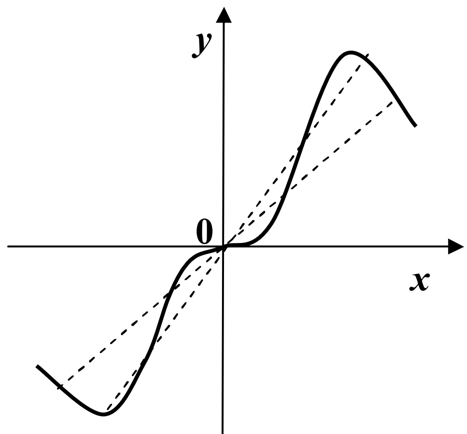


Рис.1.2

Пример 1.3.1. Доказать, что функция $f(x)=x^2-xtgx$ является четной.

Решение

Область определения функции: $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$. Она симметрична относительно начала координат.

Найдем $f(-x)=(-x)^2-(-x)tg(-x)=x^2-xtgx=f(x)$.

Следовательно, данная функция четная.

Пример 1.3.2. Выяснить, является ли функция $f(x)=\frac{\sin x}{x^2-1}$ четной или нечетной.

Решение

$D(f): x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$ – симметрична относительно нуля.

$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)^2-1}=\frac{-\sin x}{x^2-1}=-\frac{\sin x}{x^2-1}=-f(x)$, т.е. функция нечетная.

Пример 1.3.3. Исследовать функции на четность или нечетность:

а) $f(x)=\sqrt{x-2}$; б) $f(x)=tg|x|-5$; в) $f(x)=2^x-3x+1$;

г) $f(x)=x^3\cos 5x-2ctgx$; д) $f(x)=x^5\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Решение

а) Область определения функции $D(f)=[2;\infty)$ не имеет симметрии относительно начала координат, значит, функция не является четной или нечетной.

б) $D(f)=\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$ – симметрична относительно начала координат.

$f(-x)=tg|-x|-5=tg|x|-5=f(x)$ – функция четная.

в) $D(f)=(-\infty;\infty)$ – симметрична относительно начала координат.

$f(-x)=2^{-x}-3(-x)+1=2^{-x}+3x+1=\frac{1}{2^x}+3x+1$.

Очевидно, что $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$, значит, функция не является четной или нечетной.

г) $D(f)=(\pi n;\pi+\pi n)$, $n\in Z$ симметрична относительно начала координат.

$$f(-x)=(-x)^3 cos(-5x)-2ctg(-x)=-x^3 cos5x+2ctgx=$$
$$=-\left(x^3 cos5x-2ctgx\right).$$

Так как $f(-x)=-f(x)$, то данная функция нечетная.

д) $D(f)=(-1;1)$ симметрична относительно начала координат.

$$f(-x)=(-x)^5 ln\frac{1+(-x)}{1-(-x)}=-x^5 ln\frac{1-x}{1+x}=-x^5 ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=$$

$=x^5 ln\dfrac{1+x}{1-x}=f(x)$. Значит, функция является четной.

Функцию $y=f(x)$, заданную на всей числовой оси, называют ***периодической***, если существует такое число $T\neq 0$, что $f(x+T)=f(x)$. Величина T называется ***периодом*** функции. Наименьший положительный период называют ***основным***. Если T_0 – основной период функции $y=f(x)$, то функция $y=f(kx+b)$ также периодична с периодом $t=\dfrac{T_0}{k}$.

Пример 1.3.4. Доказать, что функция $f(x)=cos5x$ периодична с периодом $T=\dfrac{2\pi}{5}$.

Решение

Если $f(x)=cos5x$, то $f\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right)=cos5\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right)=cos(5x+2\pi)=cos5x$.

Т.е. $f(x)=f\left(x+\dfrac{2\pi}{5}\right)$, значит $T=\dfrac{2\pi}{5}$ – период данной функции.

Пример 1.3.5. Найти наименьшие периоды функций:

а) $f(x)=tg\left(8x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; б) $f(x)=sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x)=cos^2 3x$; г) $f(x)=2\sin 3x+ctg\frac{x}{5}$.

Решение

а) Основным периодом функции $y=tgx$ является число $T_0=\pi$. Тогда периодом функции $f(x)=tg\left(8x+\frac{\pi}{3}\right)$ является число $t=\frac{\pi}{8}$.

б) Для функции $y=\sin x$ основным является период $T_0=2\pi$, значит, функция $f(x)=\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$ периодична с периодом $t=\frac{2\pi}{1/3}=6\pi$.

в) Поскольку $cos^2 3x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos6x$, то период заданной функции совпадает с периодом функции $y=cos6x$. Так как функция $y=cos\,x$ периодична с периодом $T_0=2\pi$, то функция $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos6x$ имеет период $t=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

г) Периодом функции $y_1=2\sin 3x$ является число $t_1=\frac{2\pi}{3}$, а функции $y_2=ctg\frac{x}{5}$ – число $t_2=\frac{\pi}{1/5}=5\pi$. Основной период суммы этих функций будет равен наименьшему общему кратному их периодов, т.е. чисел $\frac{2\pi}{3}$ и 5π. Таким является число 10π. Тогда основной период заданной функции равен $t=10\pi$.

Функцию $y=f(x)$ называют ***возрастающей***, если для любой пары x_1 и x_2 из области определения, большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. при $x_1>x_2$ получим $f(x_1)>f(x_2)$. В случае, если при $x_1>x_2$ выполняется обратное неравенство $f(x_1)<f(x_2)$, то функция называется ***убывающей***. Возрастающие и убывающие функции называют ***монотонными***.

Пример 1.3.6. Доказать, что линейная функция $y=kx+b$ возрастает при $k>0$ и убывает при $k<0$.

Решение

Пусть $x_1 > x_2$, тогда $x_1 - x_2 > 0$. Рассмотрим разность $f(x_1) - f(x_2) =$ $= (kx_1 + b) - (kx_2 + b) = kx_1 - kx_2 = k(x_1 - x_2)$. Так как $x_1 - x_2 > 0$, то знак разности $f(x_1) - f(x_2)$ зависит только от знака коэффициента k. При $k > 0$ $f(x_1) - f(x_2) > 0$, значит $f(x_1) > f(x_2)$ и функция возрастает. При $k < 0$ $f(x_1) - f(x_2) < 0$, значит $f(x_1) < f(x_2)$ и функция убывает.

Пример 1.3.7. Установить характер монотонности функции $f(x) = \frac{4}{x}$.

Решение

$D(f) = (-\infty;0) \cup (0;\infty)$.

Пусть $x_1 > x_2$, тогда $x_1 - x_2 > 0$.

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4}{x_1} - \frac{4}{x_2} = \frac{4x_2 - 4x_1}{x_1 x_2} = -\frac{4(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}.$$

На интервале $(0;\infty)$ $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, значит $x_1 x_2 > 0$. На интервале $(-\infty;0)$ $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, но $x_1 x_2 > 0$. Так как $x_1 - x_2 > 0$ и $x_1 x_2 > 0$, то $f(x_1) - f(x_2) < 0$, т.е. $f(x_1) < f(x_2)$ и функция $f(x) = \frac{4}{x}$ убывает на каждом из интервалов.

Функция $x = \varphi(y)$ называется ***обратной*** к функции $y = f(x)$, если выполняются следующие условия:

1) областью определения функции φ является множество значений функции f;

2) множество значений функции φ является областью определения функции f.

Отметим, что обратная функция $x = \varphi(y)$ существует тогда и только тогда, когда функция $y = f(x)$ является строго монотонной в заданной области.

Замечание. График обратной функции $x = \varphi(y)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.

Пример 1.3.8. Найти функции, обратные данным:

а) $y=\dfrac{2x-1}{5}$; б) $y=\dfrac{2}{x+3}$; в) $y=\sqrt{x-1}$; г) $y=x^2-2x+4$.

Решение

а) Функция $y=\dfrac{2x-1}{5}$ определена на интервале $(-\infty;\infty)$, имеет множество значений $E(y)=(-\infty;\infty)$ и возрастает на всей области определения, а, значит, имеет обратную функцию.

Выразим x через y: $5y=2x-1$, $2x=5y+1 \Rightarrow x=\dfrac{5y+1}{2}$.

Тогда функция, обратная данной, определяется уравнением $y=\dfrac{5x+1}{2}$. Для нее $D(y)=(-\infty;\infty)$ и $E(y)=(-\infty;\infty)$.

б) Данная функция убывает на множестве $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;\infty)$ и принимает значения $y\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. Значит, существует обратная ей функция, которую найдем, разрешив уравнение относительно x: $x=\dfrac{2}{y}-3$.

Тогда функция $y=\dfrac{2}{x}-3$ – обратная данной. Ее область определения $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, а множество значений $y\in(-\infty;-3)\cup(-3;\infty)$.

в) Функция $y=\sqrt{x-1}$ определена на интервале $x\in[1;\infty)$, возрастает и принимает значения $y\in[0;\infty)$. Чтобы найти обратную ей функцию, возведем в квадрат обе части уравнения и выразим x: $y^2=x-1 \Rightarrow x=y^2+1$. Тогда обратной является функция $y=x^2+1$, для которой область определения совпадает с множеством значений исходной функции, т.е. $x\in[0;\infty)$, а $E(y)=[1;\infty)$.

г) Преобразуем функцию, выделив в правой части полный квадрат:

$y=x^2-2x+4=x^2-2x+1+3=(x-1)^2+3$.

Очевидно, что $D(y)=(-\infty;\infty)$, $E(y)=[3;\infty)$.

Выразим из уравнения x: $(x-1)^2=y-3$, значит $x-1=\pm\sqrt{y-3}$, тогда $x=1\pm\sqrt{y-3}$.

Каждому значению y из интервала $[3;\infty)$ соответствует два значения $x \in (-\infty;\infty)$. Таким образом, на интервале $(-\infty;\infty)$ данная функция не имеет обратной.

Если рассмотреть функцию $y = (x-1)^2 + 3$ на интервале $[1;\infty)$, тогда $x = 1 + \sqrt{y-3}$ и существует обратная ей функция, которая определяется уравнением $y = 1 + \sqrt{x-3}$. Аналогично, для $x \in (-\infty;1]$ существует обратная функция $y = 1 - \sqrt{x-3}$.

1.4. Основные элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся следующие функции:

1) ***степенная*** функция $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$;

2) ***показательная*** функция $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$ (в том числе $y = e^x$, называемая экспонентой);

3) ***логарифмическая*** функция $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$;

4) ***тригонометрические*** функции: $y = \sin x, y = cox, y = tgx, y = ctgx$;

5) ***обратные тригонометрические*** функции: $y = \arcsin x, y = \arccos x$, $y = arctgx, y = arcctgx$.

Графики этих функций представлены в *Приложении 2.*

Функции, образованные с помощью формул, содержащих конечное число арифметических действий (сложение, вычитание, умножение и деление) и суперпозиций основных элементарных функций, называют ***элементарными***. Так, функция $y = \sin^2 x - \dfrac{4}{x}$ – элементарная, а функция $y = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ -x, x < 0 \end{cases}$ не является элементарной.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти область определения функций:

а) $y = \sqrt{3x+5}$; б) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x}$; в) $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+5}$;

г) $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$; д) $y=lg(x-3)$; е) $y=ln\left(4x-x^2-3\right)$;

ж) $y=arcsin\left(\dfrac{x}{2}-3\right)$; з) $y=3^{arccos\left(\frac{x-4}{3}\right)}$; и) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x-6}}{x^2-4}$;

к) $y=\sqrt[3]{5x-1}-arctg\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

2. Выяснить, какие из данных функций являются четными, нечетными, а какие – общего вида:

а) $f(x)=x^4+1$; б) $f(x)=x^3-x$; в) $f(x)=3x^5+2$;

г) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; д) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$; е) $f(x)=|x|-4$;

ж) $f(x)=\dfrac{x^3}{tgx}$; з) $f(x)=3^x-5x+1$; и) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$;

к) $f(x)=ctg^2x-2e^{|x|}$; л) $f(x)=sin\,3x+tg^5x$.

3. Найти основные периоды функций:

а) $f(x)=sin\,3x$; б) $f(x)=cos\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)$; в) $f(x)=ctg\left(\dfrac{\pi x}{6}+1\right)$;

г) $f(x)=tg2\pi x$; д) $f(x)=sin\,2x+cos\,x$; е) $f(x)=sin\,2x\,cos\,x$.

4. Для данных функций найти обратные функции, если они существуют:

а) $y=3x-2$; б) $y=x^3-1$; в) $y=\dfrac{x}{1-x}$; г) $y=x^2$; д) $y=5^{x-3}$.

2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

2.1. Определение предела

Число a называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ ***при*** $x\to+\infty$, если каково бы ни было положительное число $\varepsilon>0$, можно найти такое число N, что для всех x, больших N, выполняется неравенство $\left|f(x)-a\right|<\varepsilon$. Записывают: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$.

Иными словами: когда x стремится в бесконечность ($x\to\infty$), график функции приближается к прямой $y=a$ (рис. 2.1).

Число a называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ ***при*** $x\to-\infty$, если каково бы ни было положительное число $\varepsilon>0$, можно найти такое число N, что для всех x, меньших N, выполняется неравенство $\left|f(x)-a\right|<\varepsilon$. Используется обозначение $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности x_0. Число a называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ ***в точке*** x_0, если для любого $\varepsilon>0$ существуют такие числа N и M ($N<x_0<M$), что для всех $x\in(N,M)$ (за исключением, быть может, самой точки x_0) справедливо неравенство $\left|f(x)-a\right|<\varepsilon$. Записывают: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

Число a называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ ***в точке*** x_0 ***справа*** (***слева***), если функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности x_0 и для любого $\varepsilon>0$ существуют такое $M>x_0$ ($N<x_0$), что для всех $x_0<x<M$ ($N<x<x_0$) выполняется неравенство $\left|f(x)-a\right|<\varepsilon$ (рис.2.2).

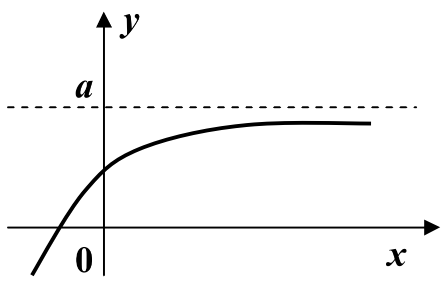


Рис.2.1

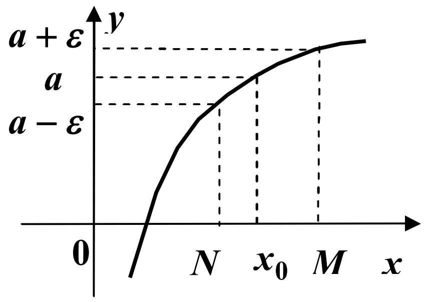


Рис.2.2

Пределы слева и справа называют ***односторонними пределами*** функции и записывают: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Заметим, что для существования предела функции в точке x_0 ***необходимо и достаточно*** выполнения условия: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Пример 2.1.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(4x+1)=5$.

Доказательство

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$ и покажем, что найдутся такие числа N и M ($N<x_0<M$), что для всех $x\in(N,M)$ выполняется неравенство $|(4x+1)-5|<\varepsilon$. Решим полученное неравенство:

$$|4x-4|<\varepsilon, \quad -\varepsilon<4x-4<\varepsilon,\ 4-\varepsilon<4x<4+\varepsilon \Rightarrow \quad 1-\frac{\varepsilon}{4}<x<1+\frac{\varepsilon}{4}.$$

Т.е. разность между функцией $y=4x+1$ и числом **5** будет по абсолютной величине меньше любого $\varepsilon>0$ для всех $x\in(N,M)$, где $N=1-\frac{\varepsilon}{4}$, $M=1+\frac{\varepsilon}{4}$. Поэтому, при $x\to 1$ число **5** является пределом данной функции.

Пример 2.1.2. Найти односторонние пределы функции $y=e^{\frac{1}{x-2}}$ при $x\to 2$.

Решение

При $x\to 2-0$: $\frac{1}{x-2}\to\frac{1}{2-0-2}\to\frac{1}{-0}\to-\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0$.

При $x\to 2+0$: $\frac{1}{x-2}\to\frac{1}{2+0-2}\to\frac{1}{+0}\to+\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}}=e^{+\infty}=\infty$.

Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно малой при*** $x\to+\infty$, если ее предел при $x\to+\infty$ равен нулю ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$).

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x\to-\infty$, $x\to x_0$. Бесконечно малую величину будем обозначать "**0**".

Функция $y=f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $x\to+\infty$, если имеет место одно из равенств: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x\to-\infty$, $x\to x_0$. Бесконечно большую величину будем обозначать "∞".

Рассмотрим некоторые ***свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин***. Пусть при $x\to x_0$ ($x\to\infty$) $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина, а $f(x)$ – бесконечно большая величина. Тогда справедливо следующее:

1. Величины $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ и $\dfrac{1}{f(x)}$ будут соответственно бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

2. Сумма конечного числа бесконечно малых (больших) величин есть бесконечно малая (большая) величина.

3. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую (большую) величину есть бесконечно малая (большая) величина.

4. Частное от деления бесконечно малой (большой) величины на функцию, предел которой отличен от нуля и бесконечности, есть бесконечно малая (большая) величина.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют конечные пределы при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то справедливы следующие формулы, называемые ***теоремами о пределах***:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, где $C - const$;

2. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) \pm \varphi(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) \cdot \varphi(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}$, при условии, что $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0$;

5. $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}$, при условии, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) \neq 0$ одновременно.

Замечание. Если функция $f(x)$ является элементарной, то справедливо следующее равенство: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} (x)\right) = f(x_0)$.

2.2. Вычисление пределов

Если $y = f(x)$ – элементарная функция и предельное значение аргумента принадлежит ее области определения, то вычисление предела функции сводится к подстановке граничного значения аргумента, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Пример 2.2.1. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2 - 6x + 1\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+4}}$.

Решение

а) Подставим значение $x = 2$ в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2 - 6x + 1\right) = 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + 1 = 1.$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+4}} = \sqrt{\dfrac{1^2-1}{1+4}} = \sqrt{\dfrac{0}{5}} = 0$.

При отыскании предела ***частного*** двух функций, на основании теоремы 4, пользуются следующими правилами:

$\left(\dfrac{b}{0}\right)\to\infty$; $\left(\dfrac{b}{+0}\right)\to+\infty,\ b>0$; $\left(\dfrac{b}{-0}\right)\to-\infty,\ b>0$;

$\left(\dfrac{a}{\infty}\right)\to 0$; $\left(\dfrac{\infty}{a}\right)\to\infty,\ a>0$; $\left(\dfrac{\infty}{a}\right)\to-\infty,\ a<0$,

где ∞ и 0 – бесконечно большая и бесконечно малая величины,

a и b – заданные числа.

Пример 2.2.2. Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2x+7}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2+4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+5}{4}$.

Решение

а) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{2x+7}{x-2} = \dfrac{2\cdot 2+7}{2+0-2} = \dfrac{11}{+0} = +\infty$.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2+4} = \dfrac{3}{\infty} = 0$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+5}{4}=\dfrac{\infty}{4}=\infty$.

Случаи $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ и $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ называются "***неопределенностями***". Покажем пути их раскрытия. Если под знаком предела стоит алгебраическая дробь и при вычислении предела получается неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, ее можно раскрыть, разделив числитель и знаменатель дроби почленно на переменную в старшей степени.

Пример 2.2.3. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+5}{2x^3-6x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3}{2+3x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x-2}{2-4x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{\sqrt[3]{8x^9+x-1}}$.

Решение

а) Заменив в пределе x на ∞, получим неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Старшая степень многочлена в числителе равна **2**, а в знаменателе **3**. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^3. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{2x^3-6x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{6x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{2-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0+0}{2-0+0}=\frac{0}{2}=0.$$

б) Старшая степень x равна **5** и находится в числителе дроби. После деления числителя и знаменателя на x^5, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3}{2+3x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^5}{x^5}-\frac{3}{x^5}}{\frac{2}{x^5}+\frac{3x^3}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^5}}{\frac{2}{x^5}+\frac{3}{x^2}}=\frac{2-0}{0+0}=\frac{2}{0}=\infty.$$

в) Старшие степени числителя и знаменателя равны x^3. Будем иметь:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x-2}{2-4x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-\frac{4x^3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{\frac{2}{x^3}-4}=-\frac{3}{4}.$$

г) Чтобы оценить, чему равна старшая степень в знаменателе, можем пренебречь слагаемыми x и -1. Тогда $\sqrt[3]{8x^9}=2x^3$. Следовательно, в числителе и в знаменателе старшая степень равна **3**. После деления получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{\sqrt[3]{8x^9+x-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3-1}{x^3}}{\frac{\sqrt[3]{8x^9+x-1}}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^3}}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{x^8}-\frac{1}{x^9}}}=\frac{1}{2}.$$

Замечание. Анализируя приведенные примеры, можно сделать вывод, что, если при нахождении предела алгебраической дроби имеем неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то этот предел равен:

1. отношению коэффициентов при старших степенях числителя и знаменателя, если эти старшие степени равны;

2. 0, если старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя;

3. ∞, если старшая степень числителя больше старшей степени знаменателя.

Пример 2.2.4. Чему равны пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^2+x^3}{5x^3-2x^2+1}$;   б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x^2-x}$.

Решение

а) Старшие степени числителя и знаменателя равны, значит, предел равен отношению коэффициентов при этих степенях:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^2+x^3}{5x^3-2x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{5x^3}=\frac{1}{5}.$$

б) Старшая степень числителя равна **1** ($\sqrt{x^2}=x$), а знаменателя – **2**, т.е. старшая степень находится в знаменателе, тогда предел равен нулю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x^2-x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Пусть задан предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ такой, что $P_n(x)\to 0$ и $Q_n(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Получим неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, которую можно раскрыть, разложив числитель и знаменатель на множители и сократив дробь на $(x-x_0)$.

Пример 2.2.5. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt{x+8}-3}$.

Решение

а) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x-3)}=\frac{2}{-2}=-1.$$

Здесь числитель разложен по формуле разности квадратов: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, а для знаменателя использована формула разложения на множители квадратного трехчлена: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни соответствующего квадратного уравнения.

б) Для разложения на множители числителя воспользуемся формулой разности кубов: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, а в знаменателе вынесем общий множитель за скобки. Получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x}=\frac{12}{2}=6.$$

в) После подстановки значения $x=3$ получим неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Так как под пределом находится иррациональное выражение, надо избавиться от иррациональности в числителе, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{3+2x}+3$, сопряженное к $\sqrt{3+2x}-3$. Будем иметь:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3+2x}-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{3+2x}-3)(\sqrt{3+2x}+3)}{(x-3)(\sqrt{3+2x}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{3+2x})^2-3^2}{(x-3)(\sqrt{3+2x}+3)}=$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{3+2x-9}{(x-3)\left(\sqrt{3+2x}+3\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)\left(\sqrt{3+2x}+3\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{2}{\left(\sqrt{3+2x}+3\right)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

г) Разложим числитель дроби по формуле квадрата разности: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ и умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x+8}+3$, сопряженное к знаменателю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{x+8}-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-3^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x+8-9} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right) = 0.$$

Большинство неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$, содержащих тригонометрические функции, раскрываются либо сокращением дроби на некоторое не равное нулю выражение, либо приведением к ***первому замечательному пределу***:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Кроме того, часто используются тригонометрические формулы преобразования суммы в произведение, формулы приведения, двойного угла и другие.

Пример 2.2.6. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-7x}{\sin 4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x - \sin 2x}{5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx - \sin x}{x^3}$; з) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

Решение

а) Чтобы выделить первый замечательный предел, разделим и умножим $\sin 7x$ на $7x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7x}{2x} = 1\cdot\frac{7}{2} = \frac{7}{2}.$$

Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x} = \alpha$.

б) Дополним числитель и знаменатель дроби до первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

в) Числитель дроби разложим на множители, а знаменатель умножим и разделим на $4x$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-7x}{\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-7)}{\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x-7)}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x}=\frac{-7}{1}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}.$$

г) Для вычисления предела выполним почленное деление на $5x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-\sin 2x}{5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{5x}-\frac{\sin 2x}{5x}\right)=\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}.$$

д) Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, то $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$. Получим неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для ее раскрытия преобразуем числитель с использованием формулы косинуса двойного угла: $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\ \Rightarrow\ 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

е) Преобразуем числитель данной дроби, используя основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\cdot\sin 3x=3\cdot 0=0.$$

ж) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}\cdot\frac{2}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{1}{2}.$$

з) Для разложения числителя на множители используем формулу: $\cos\beta - \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$ и положим $x - \frac{\pi}{2} = t,\ t \to 0$. Тогда получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}\sin\left(-\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}{-\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos\frac{t}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При вычислении пределов ***произведения*** и ***суммы двух функций***, на основании теорем 2 и 3, используются следующие правила:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) \pm \varphi(x)\right) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot\varphi(x)\right) = \infty$;

2) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x) + \varphi(x)\right) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\cdot\varphi(x)\right) = \infty$.

При решении подобных примеров могут возникать два вида ***неопределенности*** $(0\cdot\infty)$ и $(\infty - \infty)$. Для их раскрытия необходимо привести исходный предел к рассмотренным выше неопределенностям $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ или $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Пример 2.2.7. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 - \sqrt{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2 + 5x - 1} - 3x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{3+x}{x^2-x}\right)$.

Решение

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3 - \sqrt{x}\right) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x^5} - 1\right) = \infty$.

б) Под пределом имеем неопределенность $(\infty-\infty)$. Для ее раскрытия умножим и разделим данное выражение на сопряженное к нему выражение, чтобы перейти к неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+5x-1}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+5x-1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+5x-1}+3x\right)}{\sqrt{9x^2+5x-1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+5x-1}\right)^2-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+5x-1}+3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2+5x-1-9x^2}{\sqrt{9x^2+5x-1}+3x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-1}{\sqrt{9x^2+5x-1}+3x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{1}{x}}{\sqrt{9+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}+3}=\frac{5}{\sqrt{9}+3}=\frac{5}{6}.$$

в) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=(\infty-\infty).$

Для раскрытия неопределенности приведем дроби к общему знаменателю:

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{(x-3)(x+3)}\right)=\lim_{x\to3}\frac{x+3-6}{(x-3)(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

г) Имеем неопределенность $(0\cdot\infty)$. Выполним алгебраическое сложение и перейдем к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$, которую раскроем, применив первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to0}\sin x\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{3+x}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to0}\sin x\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{3+x}{x(x-1)}\right)=\lim_{x\to0}\sin x\cdot\frac{x-1+3+x}{x(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\sin x\cdot\frac{2x+2}{x(x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x+2}{x-1}=1\cdot(-2)=-2.$$

При вычислении предела ***степенно-показательной функции***, на основании теоремы 5, руководствуются следующими правилами:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = \begin{cases} \infty, при \;\; b>1 \\ 0, при \;\; 0<b<1 \end{cases}$;

2) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = \begin{cases} 0, при \;\; b>1 \\ \infty, при \;\; 0<b<1 \end{cases}$;

3) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=C$, то $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = \begin{cases} \infty, при \;\; C>0 \\ 0, при \;\; C<0 \end{cases}$.

4) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)=\infty$, то при вычислении предела возникает неопределенность (1^{∞}). Для ее раскрытия используют ***второй замечательный предел:***

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \text{где} \quad e\approx 2{,}71.$$

Пример 2.2.8. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x-1}{5x+3}\right)^{x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-3}\right)^{3x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{tgx}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{x}{x^2-1}}$.

Решение

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{x+1} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sin 2x}{2x}\right)^{x+1} = 2^1 = 2$.

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2x-1}{5x+3}\right)^{x+3} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{\infty} = 0$.

в) Делением числителя дроби на ее знаменатель выделим целую часть:

$\dfrac{2x+5}{2x-3} = 1+\dfrac{8}{2x-3}$.

Таким образом, при $x\to\infty$ данная функция представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности, т.е. имеем неопределенность (1^{∞}). Преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел. Для этого домножим показатель степени на

$\dfrac{2x-3}{8}$, чтобы получить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{8}}=e$. Множитель $\dfrac{8}{2x-3}$ за скобками компенсирует данное умножение. Получим следующее:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-3}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{2x-3}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{8}}\right]^{\frac{8}{2x-3}\cdot(3x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{8}{2x-3}\cdot(3x+1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{24x+8}{2x-3}}=e^{12}.$$

г) Используя свойство логарифмов: $k\ln x=\ln x^k$, выполним преобразования, аналогичные предыдущему примеру.

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{2}=\ln e^2=2\ln e=2.$$

д) $\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x)^{tgx}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to0}(1+\cos x)^{\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}\right]^{\sin x}=$

$$=\lim_{x\to0}e^{\sin x}=e^0=1.$$

е) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{x}{x^2-1}}=\left(1^{\infty}\right).$

Для того чтобы можно было использовать второй замечательный предел, выполним замену переменной: $x-1=t$, $t\to0$. Тогда получим:

$$\lim_{x\to1}(3x-2)^{\frac{x}{x^2-1}}=\lim_{t\to0}(1+3t)^{\frac{t+1}{(t+1)^2-1}}=\lim_{t\to0}(1+3t)^{\frac{t+1}{t^2+2t}}=\lim_{t\to0}\left[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}\right]^{\frac{3t}{1}\cdot\frac{t+1}{t^2+2t}}=$$

$$=\lim_{t\to0}e^{\frac{3t}{1}\cdot\frac{t+1}{t(t+2)}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{3t+3}{t+2}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы функций:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x^4+1}{2x^3-3x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+x-3x^2+x^3}{x^5-2x^2+1}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+5x^2-1}{1-3x^3}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^3+3x}-2}{x^2+x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^4+x^2-2}}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^5+1}-2x}{4-\sqrt[3]{x^5-x^2}}$.
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0,5} \dfrac{4x^2-1}{2x^2-5x+2}$.
9. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^3-4x}$.
10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{\sqrt{x+8}-3}$.
11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3x-2}}{x^2-1}$.
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x^3}$.
13. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.
14. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2-x}}$.
15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.
16. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-3}\right)$.
17. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{9x^3+2}-\sqrt{9x^3-1}\right)$.
18. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.
19. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x}{x^3-4x^2+4x}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.
20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{x}$.
21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 8x}$.
22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin 10x-\sin 2x}$.
23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x^2-7x}$.
24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 4x}{x^2-3x}$.
25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x+\sin 3x}{\sin 5x}$.
26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$.
27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 10x}{\cos 2x-1}$.
28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.
29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x}{\sin 4x}$.
30. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.
31. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{\cos 5x-\cos 3x}$.
32. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{3x-1}$.
33. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2-3}\right)^{2x}$.
34. $\lim\limits_{x\to 3} (x-2)^{\frac{x}{2x-6}}$.
35. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.
36. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{(1-2x)^2}$.

3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

3.1. Понятие непрерывности функции

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если выполняются такие условия:

1) функция определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;

2) функция имеет односторонние пределы при $x \to x_0$;

3) односторонние пределы функции равны между собой и совпадают со значением функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ (рис.3.1).

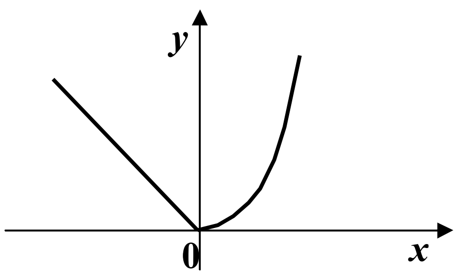
Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то функция называется ***разрывной*** в точке x_0, а сама точка x_0 называется ***точкой разрыва*** функции.

Пример 3.1.1. Показать, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x=0$.

Решение

Функция в точке $x=0$ принимает значение $f(0)=0^2=0$. Найдем ее односторонние пределы:

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} (-x) = 0$.



Так как $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = f(0)$, то в точке $x=0$ функция непрерывна.

3.2. Классификация точек разрыва

Если существуют конечные односторонние пределы функции, но не все числа $f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ равны между собой, то говорят, что функция терпит в точке x_0 разрыв 1-го рода. Сама точка x_0 называется ***точкой разрыва 1-го рода***.

При этом, если односторонние пределы равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то точка x_0 называется точкой ***устранимого разрыва***. Доопределив функцию в точке x_0, получим непрерывную функцию (рис.3.2). В случае, когда левый и правый пределы различны, точка x_0 называется ***точкой скачка***, а разность $\delta = \left| \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \right|$ называется ***скачком функции*** (рис. 3.3).

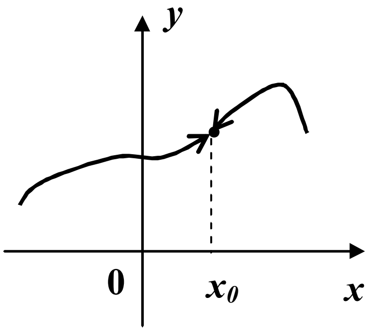


Рис.3.1

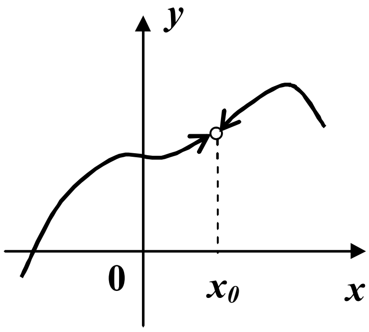


Рис.3.2

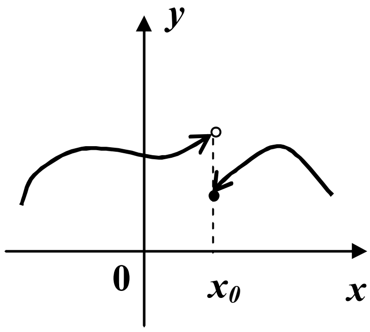


Рис.3.3

Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 не существует или равен бесконечности, то в этой точке функция имеет разрыв 2-го рода, а точка x_0 называется ***точкой разрыва 2-го рода*** (рис.3.4 – 3.6).

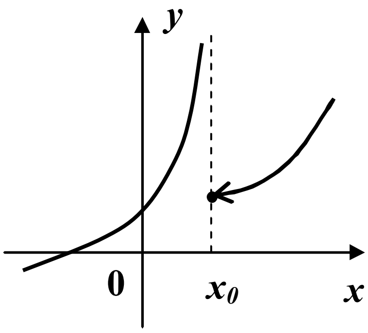


Рис.3.4

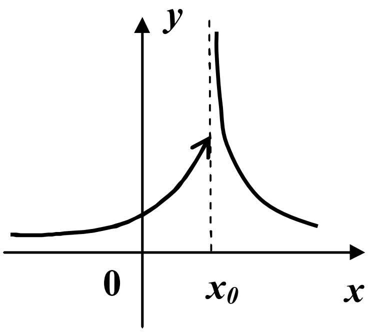


Рис.3.5

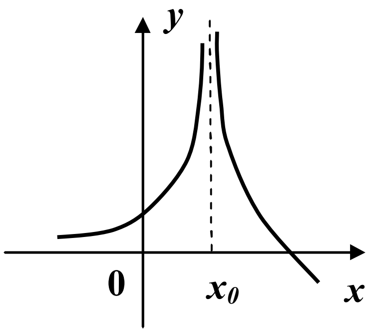


Рис.3.6

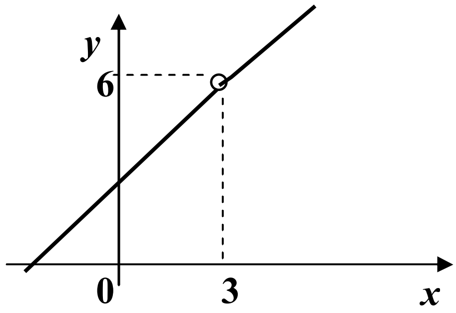
Пример 3.2.1. Показать, что при $x = 3$ функция $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ имеет разрыв.

Решение

В точке $x = 3$ функция не определена. Если $x \neq 3$, то $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$.

Найдем односторонние пределы функции: $\lim\limits_{x \to 3-0}(x + 3) = \lim\limits_{x \to 3+0}(x + 3) = 6$.

Так как односторонние пределы конечны и равны между собой, то в точке $x = 3$ функция имеет устранимый разрыв 1-го рода. Графиком данной функции будет прямая $y = x + 3$ с выколотой точкой $x = 3$.



Пример 3.2.2. Показать, что при $x = 4$ функция $y = arctg\dfrac{1}{x - 4}$ имеет разрыв.

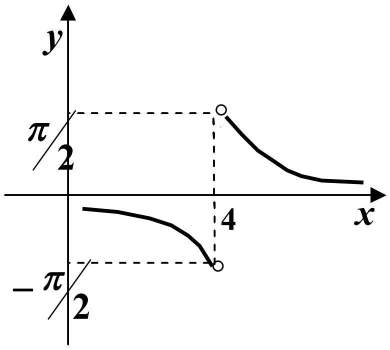
Решение

В точке $x = 4$ функция не определена.

При $x \to 4 - 0$: $\dfrac{1}{x - 4} \to \dfrac{1}{4 - 0 - 4} \to \dfrac{1}{-0} \to -\infty$, тогда $\lim\limits_{x \to 4-0} arctg\dfrac{1}{x - 4} =$
$= arctg(-\infty) = -\dfrac{\pi}{2}$.

При $x \to 4 + 0$: $\dfrac{1}{x - 4} \to \dfrac{1}{4 + 0 - 4} \to \dfrac{1}{+0} \to +\infty$, тогда $\lim\limits_{x \to 4+0} arctg\dfrac{1}{x - 4} =$
$= arctg(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$.

Итак, при $x \to 4$ функция имеет как левый, так и правый конечные пределы, причем эти пределы различны. Следовательно, $x = 4$ является точкой разрыва 1-го рода, а именно – точкой скачка.

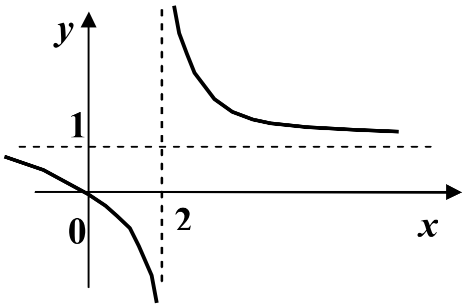


Скачок функции равен: $\delta = \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Пример 3.2.3. Имеет ли функция $y=\dfrac{x}{x-2}$ разрыв в точке $x=2$?

Решение

В самой точке $x=2$ функция не определена. Найдем односторонние пределы функции: $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{-0}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{+0}=+\infty$.



Таким образом, при $x\to 2$ оба односторонних предела бесконечны. Значит, $x=2$ является точкой разрыва 2-го рода.

Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a;b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого отрезка, а также в точке a непрерывна справа, в точке b непрерывна слева.

Отметим, что все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Пример 3.2.4. Исследовать на непрерывность функцию $y=3^{\frac{1}{2-x}}+1$.

Решение

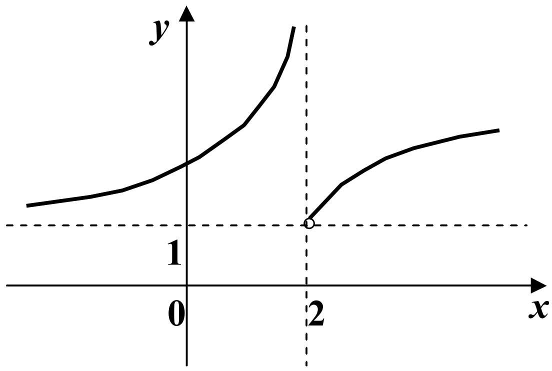
Функция является элементарной, поэтому непрерывна на всей области определения $x\in(-\infty;2)\cup(2;\infty)$. Исследуем поведение функции в точке $x=2$.

При $x\to 2-0$: $\dfrac{1}{2-x}\to\dfrac{1}{2-2+0}\to\dfrac{1}{+0}\to+\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to 2-0}\left(3^{\frac{1}{2-x}}+1\right)=$

$=3^{+\infty}+1=+\infty$.

При $x\to 2+0$: $\dfrac{1}{2-x}\to\dfrac{1}{2-2-0}\to\dfrac{1}{-0}\to-\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to 2+0}\left(3^{\frac{1}{2-x}}+1\right)=$

$=3^{-\infty}+1=0+1=1$.



Так как левосторонний предел бесконечный, то $x = 2$ является точкой разрыва 2-го рода.

Пример 3.2.5. Найти точки разрыва функции $f(x) = \begin{cases} 9, x < -3, \\ x^2, -3 \le x < 2, \\ -2x + 6, x \ge 2. \end{cases}$

Решение

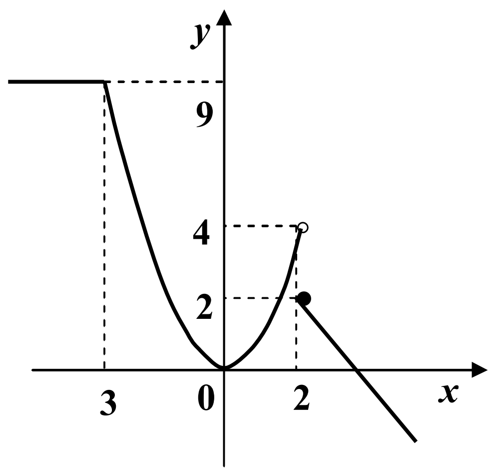
Функция непрерывна на каждом из интервалов $(-\infty;-3)$, $[-3;2)$ и $[2;\infty)$ и может иметь разрыв только в точках $x = -3$ или $x = 2$. Проверим эти точки.

При $x = -3$: $f(-3) = (-3)^2 = 9$, $\lim\limits_{x \to -3-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -3-0} 9 = 9$,

$\lim\limits_{x \to -3+0} f(x) = \lim\limits_{x \to -3+0} x^2 = 9$, т.е. $\lim\limits_{x \to -3-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -3+0} f(x) = f(-3)$, значит, функция непрерывна в точке $x = -3$.

При $x = 2$: $f(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$, односторонние пределы функции : $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} x^2 = 4$ и $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+0} (-2x + 6) = 2$.

Полученные пределы конечны и не равны между собой, значит, $x = 2$– точка разрыва 1-го рода, точка скачка. При этом скачок функции равен $\delta = |2 - 4| = 2$.



Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать функции на непрерывность в заданной точке x_0:

а) $y=\dfrac{2}{3x-1}+1,\ x_0=\dfrac{1}{3}$; б) $y=5^{\frac{1}{x+3}},\ x_0=-3$;

в) $y=\begin{cases}x^2+1, & x\le 0,\\ x-1, & x>0\end{cases},\ x_0=0$; г) $y=\begin{cases}-3x^2+1, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases},\ x_0=0$.

2. Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва и построить схематический график функции:

а) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$; б) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$; в) $y=\dfrac{2}{3^{3+x}-1}$; г) $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

д) $y=\begin{cases}2x-1, & x<3,\\ 2+x, & x>3;\end{cases}$ е) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-3}, & x<3,\\ 2x+1, & 3\le x<4;\end{cases}$ ж) $y=\begin{cases}x^2-3, & x\le 2,\\ 5-x, & x>2;\end{cases}$

з) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{3x^2+1}, & x<0,\\ x+3, & 0<x<5,\\ 2x-2, & x\ge 5;\end{cases}$ и) $y=\begin{cases}x^2+1, & x<-1,\\ x+3, & -1<x<5,\\ \dfrac{1}{x-5}, & x>5;\end{cases}$ к) $y=\begin{cases}\sin 3x, & x<0,\\ x, & 0<x<4,\\ 1+x, & x\ge 4.\end{cases}$

4. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

4.1. Определение производной и правила дифференцирования

Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел, если он существует, отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

Производную обозначают: $y',\ f'(x),\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{df}{dx}$, а ее значение в точке x_0:

$$y'(x_0),\quad f'(x_0),\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0},\quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}.$$

Операцию вычисления производной называют ***дифференцированием***.

Пример 4.1.1. Пользуясь определением, найти производную функции $y = x^2$.

Решение

$D(y): x \in (-\infty;\infty)$. Придадим аргументу $x \in (-\infty;\infty)$ приращение Δx и найдем приращение функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x$. Итак, $y' = 2x$.

Пример 4.1.2. Вычислить производную функции $y = \dfrac{2x+1}{3x+2}$ при $x = 1$, используя определение производной.

Решение

$D(y): x \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{3}; \infty\right)$. Пусть x – любое значение из области определения. Составим приращение функции $\Delta y : \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$

$$= \frac{2(x+\Delta x)+1}{3(x+\Delta x)+2} - \frac{2x+1}{3x+2} = \frac{(2x+2\Delta x+1)(3x+2) - (2x+1)(3x+3\Delta x+2)}{(3x+3\Delta x+2)(3x+2)} =$$

$$= \frac{\Delta x}{(3x+3\Delta x+2)(3x+2)}.$$

По формуле (4.1.) найдем производную функции: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(3x+3\Delta x+2)(3x+2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(3x+3\Delta x+2)(3x+2)} = \frac{1}{(3x+2)^2}.$$

Получили, что $y' = \dfrac{1}{(3x+2)^2}$.

Вычислим значение производной при $x = 1 : y'(1) = \dfrac{1}{(3 \cdot 1 + 2)^2} = \dfrac{1}{25}$.

Для двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ и постоянной C справедливы следующие ***правила дифференцирования***:

1. $(C)' = 0$, где $C - const$;
2. $(Cu)' = Cu'$;
3. $(u+v)' = u' + v'$;
4. $(uv)' = u'v + uv'$;
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Для нахождения производных пользуются следующими формулами, составляющими ***таблицу производных основных элементарных функций***:

1. $(x^n)' = n x^{n-1}$
2. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(e^x)' = e^x$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
7. $(\lg x)' = \dfrac{1}{x \ln 10}$
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
9. $(\sin x)' = \cos x$
10. $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
12. $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(arctg\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
16. $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Рассмотрим примеры нахождения производных.

Пример 4.1.3. Найти производные функций:

а) $y = 3x^3 + 6x - 1$; б) $y = \dfrac{5}{x^3} + 4\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$; в) $y = 4\cos x - 2e^x + 5\sqrt{x}$;

г) $y = 5^x \cdot tgx - \ln 3$; д) $y = \dfrac{\log_3 x}{\arcsin x}$; е) $y = \dfrac{arctgx}{e^x} - \sin x \cdot \lg x + \sqrt[7]{5}$.

Решение

а) Данная функция представляет собой алгебраическую сумму элементарных функций. Используя правила 1–3 и формулу 1 таблицы производных, найдем y':

$$y' = \left(3x^3 + 6x - 1\right)' = \left(3x^3\right)' + \left(6x\right)' - \left(1\right)' = 3\left(x^3\right)' + 6\left(x\right)' - \left(1\right)' = 3 \cdot 3x^2 +$$

$$+ 6 \cdot 1 - 0 = 9x^2 + 6.$$

В дальнейшем, в процессе дифференцирования суммы, можно не записывать каждое слагаемое под знаком производной, а сразу переходить к нахождению алгебраической суммы производных каждого слагаемого.

б) Запишем каждое из слагаемых в виде степени, чтобы воспользоваться формулой 1 таблицы производных: $\dfrac{5}{x^3} = 5x^{-3}$, $4\sqrt[3]{x} = 4x^{\frac{1}{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}} = x^{-\frac{4}{5}}$.

Тогда: $y' = \left(5x^{-3} + 4x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{4}{5}}\right)' = 5\left(-3x^{-4}\right) + 4 \cdot \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \left(-\dfrac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}}\right) =$

$$= -\frac{15}{x^4} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x^9}}.$$

в) Используем правила 1–3 дифференцирования и формулы 10, 5 и 2 таблицы производных: $y' = \left(4\cos x - 2e^x + 5\sqrt{x}\right)' = 4\left(-\sin x\right) - 2e^x + 5 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$

$$= -4\sin x - 2e^x + \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

г) Функция представляет собой произведение двух элементарных функций. Воспользуемся правилом 4 дифференцирования произведения, положив $u = 5^x$, $v = tgx$, и формулами 4 и 11: $y' = \left(5^x \cdot tgx - ln3\right)' = \left(5^x\right)' tgx +$

$$+ 5^x\left(tgx\right)' + \left(ln3\right)' = 5^x ln5 \cdot tgx + 5^x \cdot \frac{1}{cos^2 x} + 0 = 5^x\left(ln5 \cdot tgx + \frac{1}{cos^2 x}\right).$$

д) Применим правило 5 дифференцирования дроби, считая, что $u = log_3 x$, $v = arcsin\, x$, и формулы 6 и 13:

$$y' = \left(\frac{log_3 x}{arcsin\, x}\right)' = \frac{\left(log_3 x\right)' arcsin\, x - log_3 x\left(arcsin\, x\right)'}{\left(arcsin\, x\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x\ln 3} \cdot \arcsin x - \log_3 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} = \frac{\frac{\arcsin x}{x\ln 3} - \frac{\log_3 x}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} = \frac{1}{x\ln 3 \arcsin x} -$$

$$- \frac{\log_3 x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x}.$$

е) Применим для нахождения производной правила 1–5 и соответствующие формулы таблицы производных:

$$y' = \left(\frac{arctgx}{e^x} - \sin x \cdot \lg x + \sqrt[7]{5}\right)' = \left(\frac{arctgx}{e^x}\right)' - (\sin x \cdot \lg x)' + \left(\sqrt[7]{5}\right)' =$$

$$= \frac{(arctgx)' e^x - arctgx\left(e^x\right)'}{\left(e^x\right)^2} - \left[(\sin x)' \cdot \lg x + \sin x \cdot (\lg x)'\right] + \left(\sqrt[7]{5}\right)' =$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot e^x - arctgx \cdot e^x}{e^{2x}} - \left[\cos x \cdot \lg x + \sin x \cdot \frac{1}{x\ln 10}\right] + 0.$$

После упрощения получим: $y' = \dfrac{\frac{1}{1+x^2} - arctgx}{e^x} - \cos x \cdot \lg x - \dfrac{\sin x}{x\ln 10}$.

4.2. Производная сложной функции

Если y есть функция от u: $y = f(u)$, а u, в свою очередь, есть функция от аргумента x: $u = \varphi(x)$, то y называют ***сложной функцией*** от x и записывают: $y = f[\varphi(x)]$.

При условии, что функция y имеет производную в точке u, а функция u имеет производную в точке x, сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ является дифференцируемой в точке, причем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \qquad (4.2)$$

Пример 4.2.1. Найти производные сложных функций:

а) $y = \cos 3x$; б) $y = \left(3x^2 - 2\right)^{10}$; в) $y = 5^{ctgx}$; г) $y = arctg\sqrt{6x}$;

д) $y = e^{\sin^2 x}$; е) $y = \cos 2^{x^2+3}$; ж) $y = \sqrt[5]{\sin \ln \frac{3}{x}}$.

Решение

а) Для нахождения производной применим формулу (4.2), где $y = \cos u$, а $u = 3x$. Тогда:

$$y' = (\cos 3x)' = (\cos u)_u' \cdot (3x)_x' = -\sin u \cdot 3 = -3\sin 3x.$$

Обычно такие рассуждения проводят устно, а запись решения принимает вид: $y' = (\cos 3x)' = -\sin 3x \cdot (3x)' = -\sin 3x \cdot 3 = -3\sin 3x$.

б) $y' = \left(\left(3x^2 - 2\right)^{10}\right)' = 10\left(3x^2 - 2\right)^9 \cdot \left(3x^2 - 2\right)' = 10\left(3x^2 - 2\right)^9 \cdot 6x =$

$= 60x\left(3x^2 - 2\right)^9$.

в) $y' = \left(5^{ctgx}\right)' = 5^{ctgx}\ln 5 \cdot (ctgx)' = 5^{ctgx}\ln 5 \cdot \left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\dfrac{5^{ctgx}\ln 5}{\sin^2 x}$.

г) $y' = \left(arctg\sqrt{6x}\right)' = \dfrac{1}{1 + \left(\sqrt{6x}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{6x}\right)' = \dfrac{1}{1 + 6x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{6x}} \cdot (6x)' =$

$= \dfrac{1}{1 + 6x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{6x}} \cdot 6 = \dfrac{3}{(1 + 6x)\sqrt{6x}}$.

д) $y' = \left(e^{\sin^2 x}\right)' = e^{\sin^2 x} \cdot \left(\sin^2 x\right)' = e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot (\sin x)' =$

$= e^{\sin^2 x} \cdot 2\sin x \cdot \cos x = e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x$.

е) $y' = \left(\cos 2^{x^2+3}\right)' = -\sin 2^{x^2+3} \cdot \left(2^{x^2+3}\right)' = -\sin 2^{x^2+3} \cdot 2^{x^2+3}\ln 2 \cdot$

$\cdot \left(x^2 + 3\right)' = -\sin 2^{x^2+3} \cdot 2^{x^2+3}\ln 2 \cdot 2x = -2x\sin 2^{x^2+3} \cdot 2^{x^2+3}\ln 2$.

ж) $y' = \left(\sqrt[5]{\sin\ln\dfrac{3}{x}}\right)' = \dfrac{1}{5}\left(\sin\ln\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \left(\sin\ln\dfrac{3}{x}\right)' = \dfrac{1}{5}\left(\sin\ln\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot$

$\cdot \cos\ln\dfrac{3}{x} \cdot \left(\ln\dfrac{3}{x}\right)' = \dfrac{1}{5}\left(\sin\ln\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \cos\ln\dfrac{3}{x} \cdot \dfrac{x}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)' = \dfrac{1}{5}\left(\sin\ln\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \cos\ln\dfrac{3}{x} \cdot$

$\cdot \dfrac{x}{3} \cdot \left(-\dfrac{3}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{5x}\left(\sin\ln\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \cos\ln\dfrac{3}{x}$.

Пример 4.2.2. Найти производные функций:

а) $y = tg6x - \sqrt{\ln 3x}$; б) $y = \sin^3 5x \cdot \lg tgx$; в) $y = \left(x^2 - 1\right)^3 \cdot 2^{arcctg5x}$;

г) $y=\dfrac{cos^2 4x}{arcsin\, x^2}$; д) $y=\dfrac{e^{\sqrt{5-2x}}}{sin\, ln(x+1)}$.

Решение

а) Имеем алгебраическую сумму двух функций. Для нахождения производной применим правило 3 дифференцирования, учитывая, что каждое слагаемое представляет собой сложную функцию. Получим:

$$y'=(tg6x)'-\left(\sqrt{ln3x}\right)'=\frac{1}{cos^2 6x}\cdot(6x)'-\frac{1}{2\sqrt{ln3x}}\cdot(ln3x)'=\frac{1}{cos^2 6x}\cdot 6-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{ln3x}}\cdot\frac{1}{3x}\cdot(3x)'=\frac{6}{cos^2 6x}+\frac{1}{2\sqrt{ln3x}}\cdot\frac{1}{3x}\cdot 3=\frac{6}{cos^2 6x}+\frac{1}{2x\sqrt{ln3x}}.$$

б) Так как функция представляет собой произведение двух сложных функций, то при нахождении производной используем правило 4 дифференцирования и формулу (4.2). Получим:

$$y'=\left(sin^3 5x\cdot lg\,tgx\right)'=\left(sin^3 5x\right)'\cdot lg\,tgx+sin^3 5x\cdot(lg\,tgx)'=3\,sin^2 5x\cdot$$

$$\cdot cos5x\cdot 5\cdot lg\,tgx+sin^3 5x\cdot\frac{1}{tgx\,ln10}\cdot\frac{1}{cos^2 x}=15\,sin^2 5x\,cos5x\cdot lg\,tgx+\frac{1}{ln10}\cdot$$

$$\cdot\frac{sin^3 5x}{tgx\,cos^2 x}=15\,sin^2 5x\,cos5x\cdot lg\,tgx+\frac{1}{ln10}\cdot\frac{2\,sin^3 5x}{sin2x}.$$

в) Выполним действия, аналогичные предыдущему примеру:

$$y'=\left(\left(x^2-1\right)^3\cdot 2^{arcctg5x}\right)'=\left(\left(x^2-1\right)^3\right)'\cdot 2^{arcctg5x}+\left(x^2-1\right)^3\cdot\left(2^{arcctg5x}\right)'=$$

$$=3\left(x^2-1\right)^2\cdot 2x\cdot 2^{arcctg5x}+\left(x^2-1\right)^3\cdot 2^{arcctg5x}\,ln2\cdot\left(-\frac{1}{1+(5x)^2}\right)\cdot 5.$$

После упрощения получим: $y'=2^{arcctg5x}\cdot\left(x^2-1\right)^2\cdot\left(6x-\dfrac{5\,ln2\left(x^2-1\right)}{1+25x^2}\right)$.

г) Дифференцируем частное двух сложных функций:

$$y'=\left(\frac{cos^2 4x}{arcsin\,x^2}\right)'=\frac{\left(cos^2 4x\right)'\cdot arcsin\,x^2-cos^2 4x\cdot\left(arcsin\,x^2\right)'}{\left(arcsin\,x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2\cos 4x\cdot\left(-\sin 4x\right)\cdot 4\cdot\arcsin x^2-\cos^2 4x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}\cdot 2x}{\left(\arcsin x^2\right)^2}=-\frac{4\sin 8x}{\arcsin x^2}-$$

$$-\frac{2x\cos^2 4x}{\arcsin^2 x^2\sqrt{1-x^4}}.$$

д) $$y'=\left(\frac{e^{\sqrt{5-2x}}}{\sin\ln(x+1)}\right)'=\frac{\left(e^{\sqrt{5-2x}}\right)'\cdot\sin\ln(x+1)-e^{\sqrt{5-2x}}\cdot\left(\sin\ln(x+1)\right)'}{\left(\sin\ln(x+1)\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{\sqrt{5-2x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{5-2x}}\cdot(-2)\cdot\sin\ln(x+1)-e^{\sqrt{5-2x}}\cdot\cos\ln(x+1)\cdot\dfrac{1}{x+1}}{\left(\sin\ln(x+1)\right)^2}=$$

$$=\frac{-\dfrac{e^{\sqrt{5-2x}}}{\sqrt{5-2x}}\cdot\sin\ln(x+1)-\dfrac{e^{\sqrt{5-2x}}}{x+1}\cdot\cos\ln(x+1)}{\sin^2\ln(x+1)}.$$

4.3. Производная неявной функции

Пусть функция $y(x)$ задана уравнением $F(x,y)=0$, не разрешенным относительно зависимой переменной y. Чтобы найти производную y', необходимо продифференцировать обе части уравнения $F(x,y)=0$ по x, помня, что y является функцией переменной x. Затем разрешить полученное уравнение относительно y'. Таким образом, производную неявной функции находят из условия:

$$\frac{d}{dx}F(x,y)=0. \qquad (4.3)$$

Пример 4.3.1. Найти производную функции $x^3+y^3-x^2y=25$.

Решение

Продифференцируем обе части уравнения, считая y функцией переменной x: $3x^2 + 3y^2 y' - \left(2xy + x^2 y'\right) = 0$.

Из полученного уравнения найдем y':

$$3y^2 y' - x^2 y' = -3x^2 + 2xy, \quad y' \cdot \left(3y^2 - x^2\right) = -3x^2 + 2xy \;\Rightarrow y' = \frac{2xy - 3x^2}{3y^2 - x^2}.$$

Пример 4.3.2. Найти производную функции $x^2 + y^2 = \sin(x - 2y)$.

Решение

Продифференцируем уравнение, учитывая, что y является функцией переменной x: $2x + 2yy' = \cos(x - 2y) \cdot (1 - 2y')$.

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$2x + 2yy' = \cos(x - 2y) - 2y' \cdot \cos(x - 2y), \; 2yy' + 2y' \cdot \cos(x - 2y) =$$
$$= \cos(x - 2y) - 2x, \; y' \cdot \left(2y + 2\cos(x - 2y)\right) = \cos(x - 2y) - 2x.$$

После деления обеих частей уравнения на множитель при y', найдем искомую производную: $y' = \dfrac{\cos(x - 2y) - 2x}{2y + 2\cos(x - 2y)}$.

Пример 4.3.3. Показать, что функция, задаваемая уравнением $xy - \ln y = 1$, удовлетворяет условию: $y^2 + (xy - 1)\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Решение

Найдем y':

$$1 \cdot y + xy' - \frac{1}{y} y' = 0, \; y + y'\left(x - \frac{1}{y}\right) = 0, \; y = y'\left(\frac{1}{y} - x\right) \Rightarrow y' = \frac{y}{\frac{1}{y} - x}.$$

После упрощения получим: $\dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{y^2}{1 - xy}$.

Подставим выражение для производной в заданное условие и проверим его выполнение: $y^2 + (xy - 1) \cdot \dfrac{y^2}{1 - xy} = 0, \; y^2 - (1 - xy) \cdot \dfrac{y^2}{1 - xy} = 0, \; y^2 - y^2 = 0$.

Очевидно, что полученное равенство верно, значит, функция удовлетворяет условию.

4.4. Логарифмическое дифференцирование. Производная показательно-степенной функции

В некоторых случаях при нахождении производной бывает удобным сначала прологарифмировать функцию, а затем найти производную неявной функции. Данная операция называется ***логарифмическим дифференцированием***. Этот способ целесообразно использовать в следующих случаях:

1) если нужно продифференцировать произведение трех и больше множителей или дробь, числитель и знаменатель которой содержат произведение функций;

2) если нужно продифференцировать показательно-степенную функцию $y = u(x)^{v(x)}$.

Замечание. Показательно-степенную функцию можно дифференцировать, используя формулу: $y' = \left[u(x)^{v(x)}\right]' = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'$.

Пример 4.4.1. Найти производную функции $y = 5^{2x-3} \cdot \sqrt{x^4+1} \cdot tg^8 x$.

Решение

Производную данной функции можно найти, последовательно применяя правило дифференцирования произведения функций. Однако более рациональным методом решения задачи является логарифмическое дифференцирование.

Прологарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln\left(5^{2x-3} \cdot \sqrt{x^4+1} \cdot tg^8 x\right).$$

Правую часть равенства можно упростить, используя свойства логарифмов, а именно: $\ln a^n = n \ln a$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$. Получим:

$$\ln y = \ln 5^{2x-3} + \ln\sqrt{x^4+1} + \ln tg^8 x,\ \ln y = (2x-3)\ln 5 + \frac{1}{2}\ln\left(x^4+1\right) + 8\ln|tgx|.$$

Продифференцируем уравнение, считая y функцией от x:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \cdot \ln 5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^4+1} \cdot 4x^3 + 8 \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2\ln 5 + \frac{2x^3}{x^4+1} + \frac{8}{\sin x \cos x}.$$

Найдем y', умножив обе части уравнения на y:

$$y' = \left(2\ln 5 + \frac{2x^3}{x^4+1} + \frac{8}{\sin x \cos x}\right) \cdot y.$$

Учитывая, что $y = 5^{2x-3} \cdot \sqrt{x^4+1} \cdot tg^8 x$, окончательно получим:

$$y' = \left(2\ln 5 + \frac{2x^3}{x^4+1} + \frac{8}{\sin x \cos x}\right) \cdot 5^{2x-3} \cdot \sqrt{x^4+1} \cdot tg^8 x.$$

Пример 4.4.2. Используя логарифмирование, найти производную функции $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 \cos x}{\sqrt{2-e^x}}}$.

Решение

Прологарифмируем функцию: $\ln y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x^2 \cos x}{\sqrt{2-e^x}}}$, $\quad \ln y = \dfrac{1}{3} \ln \dfrac{x^2 \cos x}{\sqrt{2-e^x}}$,

$$\ln y = \frac{1}{3}\left(\ln x^2 + \ln|\cos x| - \ln\sqrt{2-e^x}\right), \quad \ln y = \frac{1}{3}\left(2\ln|x| + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}\ln\left|2-e^x\right|\right).$$

После дифференцирования, получим уравнение:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\cos x}(-\sin x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2-e^x} \cdot \left(-e^x\right)\right) \text{ или}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} - tgx + \frac{e^x}{4-2e^x}\right). \text{ Откуда } \quad y' = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} - tgx + \frac{e^x}{4-2e^x}\right) \cdot y.$$

По условию $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 \cos x}{\sqrt{2-e^x}}}$. Значит $y' = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{x} - tgx + \dfrac{e^x}{4-2e^x}\right) \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^2 \cos x}{\sqrt{2-e^x}}}$.

Пример 4.4.3. Найти производную функции $y = (\sin 4x)^{x^3}$.

Решение

Найдем производную данной функции, выполнив предварительное логарифмирование:

$$\ln y = \ln(\sin 4x)^{x^3}, \ \ln y = x^3 \cdot \ln(\sin 4x).$$

Дифференцируем полученную неявную функцию:

$$(\ln y)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln(\sin 4x) + x^3(\ln \sin 4x)',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=3x^2\cdot ln(sin4x)+x^3\cdot\frac{1}{sin4x}\cdot cos4x\cdot 4,\ \frac{1}{y}\cdot y'=3x^2\cdot ln(sin4x)+$$
$$+4x^3\cdot ctg4x.$$

Разрешив последнее уравнение относительно y', найдем искомую производную: $y'=\left(3x^2\cdot ln(sin4x)+4x^3\cdot ctg4x\right)\cdot y$.

Окончательно получим: $y'=\left(3x^2\cdot ln(sin4x)+4x^3\cdot ctg4x\right)\cdot(sin4x)^{x^3}$.

4.5. Производная функции, заданной параметрически

Производная функции $y(x)$, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t), y=y(t)$ (см. п.1.2.), где $x(t), y(t)$ – дифференцируемые в точке t функции, причем $x'(t)\neq 0$, вычисляется по формуле:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t} \tag{4.4}$$

Пример 4.5.1. Найти производную y'_x функции, заданной параметрическими уравнениями: $\begin{cases}x=arcsin\left(t^2-1\right),\\ y=arccos2t.\end{cases}$

Решение

Найдем x'_t и y'_t:

$$x'_t=\left(arcsin\left(t^2-1\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(t^2-1\right)^2}}\cdot 2t=\frac{2t}{\sqrt{2t^2-t^4}}=\frac{2}{\sqrt{2-t^2}};$$

$$y'_t=(arccos2t)'=-\frac{1}{\sqrt{1-(2t)^2}}\cdot 2=-\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}}.$$

Подставим значения x'_t и y'_t в формулу (4.4) и найдем y'_x:

$$y'_x=\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}:\left(-\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}}\right)=-\frac{\sqrt{1-4t^2}}{\sqrt{2-t^2}}=-\sqrt{\frac{1-4t^2}{2-t^2}}.$$

Пример 4.5.2. Найти производную функции $\begin{cases}x=e^{2t}\,sin3t,\\ y=e^{2t}\,cos3t.\end{cases}$

Решение

Найдем x'_t и y'_t и подставим их в формулу (4.4.):

$$x'_t = \left(e^{2t} \sin 3t\right)'_t = 2e^{2t} \sin 3t + e^{2t} \cdot 3\cos 3t = e^{2t}\left(2\sin 3t + 3\cos 3t\right);$$

$$y_t = \left(e^{2t} \cos 3t\right)'_t = 2e^{2t} \cos 3t + e^{2t}\left(-3\sin 3t\right) = e^{2t}\left(2\cos 3t - 3\sin 3t\right).$$

Тогда $y'_x = \dfrac{e^{2t}\left(2\cos 3t - 3\sin 3t\right)}{e^{2t}\left(2\sin 3t + 3\cos 3t\right)} = \dfrac{2\cos 3t - 3\sin 3t}{2\sin 3t + 3\cos 3t}$.

Пример 4.5.3. Вычислить производную функции $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

в точке, которая соответствует параметру $t = \dfrac{\pi}{6}$.

Решение

$$x'_t = -2\sin t + 2\sin 2t = 2\left(\sin 2t - \sin t\right) = 4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2};$$

$$y'_t = 2\cos t - 2\cos 2t = 2\left(\cos t - \cos 2t\right) = 4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}.$$

Найдем y'_x: $\quad y'_x = \dfrac{4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}} = tg\dfrac{3t}{2}$.

Тогда значение производной в точке, соответствующей параметру $t = \dfrac{\pi}{6}$,

равно: $y'_x\big|_{t=\frac{\pi}{6}} = tg\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\pi}{6}\right) = tg\dfrac{\pi}{4} = 1$.

4.6. Геометрический, физический и механический смысл производной

Производная функции $y = f(x)$ для каждого значения x равна ***угловому коэффициенту касательной*** к графику данной функции в соответствующей точке, т. е. $f'(x_0) = tg\alpha$, где α - угол, который образует касательная к графику функции в точке x_0 с положительным направлением оси Ox (рис.4.1).

В этом и состоит ***геометрический смысл производной***.

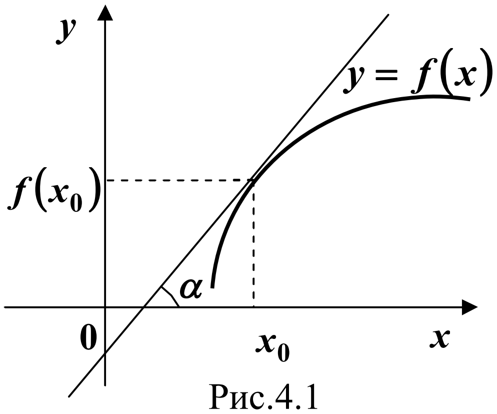


Рис.4.1

Приведем ***уравнение касательной*** к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \qquad (4.5)$$

а также ***уравнение нормали***, проходящей через ту же самую точку перпендикулярно касательной:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (4.6)$$

Пример 4.6.1. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3\sqrt[3]{x^5} + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение

Используем геометрический смысл производной: $k = tg\alpha = f'(x_0)$. Производная функции равна: $f'(x) = 3 \cdot \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} = 5\sqrt[3]{x^2}$, а ее значение в точке касания: $f'(x_0) = f'(1) = 5\sqrt[3]{1^2} = 5$. Значит, угловой коэффициент касательной равен **5**.

Пример 4.6.2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ в точке $M\left(2; \frac{4}{5}\right)$.

Решение

Для записи уравнения касательной воспользуемся формулой (4.5). В данном случае $x_0 = 2$, $y_0 = \frac{4}{5}$. Найдем производную функции:

$$y' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Значение производной в точке с абсциссой $x_0 = 2$ равно:

$f'(x_0) = f'(2) = \dfrac{2 - 2\cdot 2^2}{(2^2+1)^2} = -\dfrac{6}{25}$. Подставив значения x_0, y_0 и $f'(x_0)$ в уравнение касательной, получим: $y - \dfrac{4}{5} = -\dfrac{6}{25}(x-2) \Rightarrow y = -\dfrac{6}{25}x + \dfrac{32}{25}$ – искомое уравнение.

Пример 4.6.3. Записать уравнения касательной и нормали, проведенных к эллипсу $4x^2 + y^2 - 32 = 0$ в точке $M(2;-4)$.

Решение

Найдем y' как производную неявной функции: $8x + 2yy' = 0 \Rightarrow$ $y' = -\dfrac{4x}{y}$. Тогда $y'_0 = y'(2;-4) = -\dfrac{4\cdot 2}{-4} = 2$. Подставив значения x_0, y_0 и $f'(x_0) = y'_0$ в формулы (4.5) и (4.6), получим: $y - (-4) = 2\cdot(x-2) \Rightarrow$ $y = 2x - 8$ – уравнение касательной; $y - (-4) = -\dfrac{1}{2}\cdot(x-2) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x - 3$ – уравнение нормали.

Пример 4.6.4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = ln(1+t^2), \\ y = t - arctgt \end{cases}$ в точке, которая соответствует значению параметра $t_0 = 1$.

Решение

Найдем координаты точки касания $M_0(x_0; y_0)$: если $t_0 = 1$, то $x_0 = ln(1+1^2) = ln 2$, $y_0 = 1 - arctg1 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

Для нахождения производной воспользуемся формулой (4.4):

$$x'_t = \frac{1}{1+t^2}\cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2},\ y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Тогда $y'_x = \dfrac{t^2}{1+t^2} : \dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{1+t^2}{2t} = \dfrac{t}{2}$, $y'_x(t_0 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

Будем иметь: $y - \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}(x - ln 2)$ или $y = \dfrac{1}{2}x + \left(1 - \dfrac{\pi}{4} - ln\sqrt{2}\right)$ – уравнение касательной;

$y - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = -2(x - ln2)$ или $y = -2x + \left(1 - \frac{\pi}{4} + ln4\right)$ – уравнение нормали.

Если функция $y = f(x)$ описывает некоторый физический процесс, то производная y' является скоростью изменения этого процесса. В этом и заключается ***физический смысл производной***.

Если $S = S(t)$ – закон движения материальной точки, то производная $S'(t)$ – это скорость точки в момент времени t ($v = S'(t)$), вторая производная $S''(t)$ – мгновенное ускорение точки в момент времени t ($a = S''(t)$). Это ***механический смысл производной***.

Пример 4.6.5. Количество электричества, которое протекает через проводник с момента времени $t = 0$, задается законом $Q = 3t^2 + 2t + 3$. Найти силу тока в конце десятой секунды.

Решение

Сила тока I определяется как скорость изменения количества электричества в момент времени t, т.е. $I(t) = Q'(t) = 6t + 2$. Тогда в конце десятой секунды сила тока будет равна: $I(10) = 6 \cdot 10 + 2 = 62\,(A)$.

Пример 4.6.6. Материальная точка движется по закону $S(t) = \frac{4 - t}{2 - 3t}$. Определить скорость точки и ее ускорение в момент времени $t = 7c$.

Решение

Используем механический смысл производной. В нашем случае:

$$v(t) = S'(t) = \left(\frac{4 - t}{2 - 3t}\right)' = \frac{-1(2 - 3t) - (4 - t)(-3)}{(2 - 3t)^2} = \frac{10}{(2 - 3t)^2},$$

$$a(t) = S''(t) = v'(t) = \left(\frac{10}{(2 - 3t)^2}\right)' = 10 \cdot \left(-2(2 - 3t)^{-3} \cdot (-3)\right) = \frac{60}{(2 - 3t)^3}.$$

В момент времени $t = 7c$:

$$v(7) = \frac{10}{(2 - 3 \cdot 7)^2} = \frac{10}{361} \approx 0{,}0277 \left({}^{м}\!/_{c}\right),\ a(7) = \frac{60}{(2 - 3 \cdot 7)^3} = \frac{60}{6859} \approx 0{,}0087 \left({}^{м}\!/_{c^2}\right).$$

Задания для самостоятельной работы

Найти производные данных функций:

1. $y = x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 2x - 4$. 2. $y = ax^2 + bx + c$. 3. $y = \frac{x}{5} + \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}$.

4. $y = x^3 + \frac{6}{x^5} + x\sqrt{x}$. 5. $y = x^5 \log_2 x - \sqrt[3]{4}$. 6. $y = \left(x^3 + 4\right)\left(x^2 - 1\right)$.

7. $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{x}}$. 8. $y = \frac{3^x}{\operatorname{arctg} x} - \lg 7$. 9. $y = \operatorname{ctg} 5x$.

10. $y = 7^{\operatorname{tg} x}$. 11. $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$. 12. $y = \sqrt[3]{(1-8x)^2}$.

13. $y = \arccos \sqrt{3^x}$. 14. $y = \operatorname{ctg} \ln^4 (7x+5)$. 15. $y = \sin \lg x \cdot \operatorname{ctg} 5x$.

16. $y = \frac{\lg\left(x^5 - 4x\right)}{\cos 3x}$. 17. $y = \frac{\sqrt{4x-3}}{\arccos^5 x}$. 18. $y = 3x^5 \cdot 7^{\sqrt{\lg(3x+2)}}$.

Найти производные функций, заданных неявно:

19. $x \sin y + y \sin x = 0$. 20. $e^{xy} = \cos\left(x^2 + y^2\right)$. 21. $x^2 + y^2 = \ln \frac{y}{x}$.

Выполнить логарифмическое дифференцирование:

22. $y = (\lg x)^x$. 23. $y = (\cos 3x)^{\operatorname{tg} x}$. 24. $y = (2x+1)^{\arccos 3x}$.

25. $y = \frac{\sqrt{5x-8}\ \cos^4 x}{e^{7x+10}}$. 26. $y = \frac{\left(3x^2 - 5\right)4^{7x+3}}{\sqrt[7]{x^5}}$. 27. $y = \sqrt[5]{\frac{(5x-3)e^{3x}}{\sqrt[6]{3x+10}}}$.

Найти производные функций, заданных параметрически:

28. $\begin{cases} x = t^3, \\ y = 3t. \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x = 6\sin 2t, \\ y = 8\cos t. \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x = 2t + \ln \sin 2t, \\ y = 2t - \ln \cos 2t. \end{cases}$ 31. $\begin{cases} x = te^{-t}, \\ y = \frac{2}{3-5t}. \end{cases}$

Составить уравнения касательных и нормалей к кривым в заданной точке:

32. $y = 4\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$. 33. $e^y + xy = e$, $M(0;1)$. 34. $\begin{cases} x = 6\sin 2t, \\ y = 8\cos t, \end{cases}$ $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

5.1. Определение и геометрический смысл дифференциала

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т.е. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда приращение функции будет равно:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x. \qquad (5.1)$$

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно Δx:

$$dy = f'(x)dx, \text{ где } dx = \Delta x. \qquad (5.2)$$

При достаточно малых значениях Δx выполняется приближенное равенство: $\Delta y \approx dy$. С учетом этого, справедлива формула для приближенного вычисления значений функции:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \qquad (5.3)$$

Геометрически дифференциал функции $y = f(x)$ равен приращению ординаты касательной, которая проведена к кривой $y = f(x)$ в точке M, когда аргумент получает приращение Δx (рис.5.1).

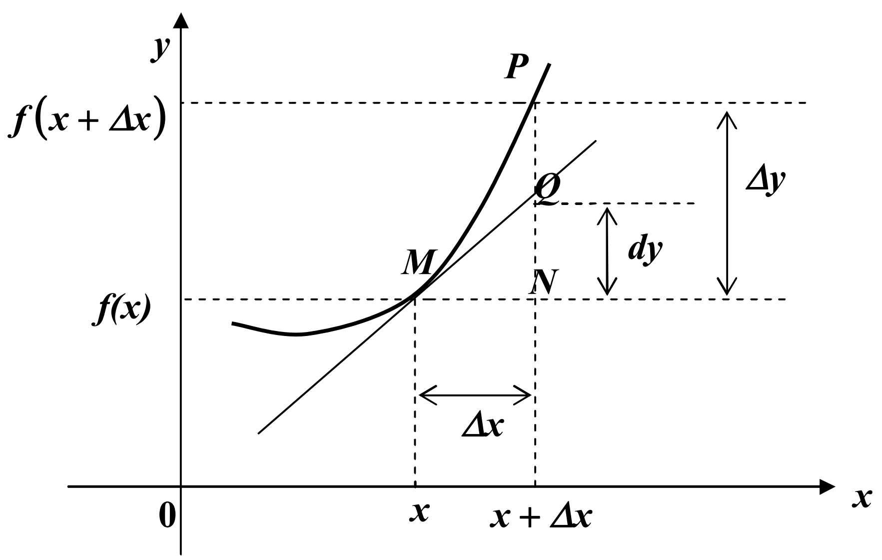


Рис.5.1

5.2. Основные свойства дифференциала и его вычисление

Для двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ выполняются следующие равенства:

1. $dC = 0 \ (C = const)$;
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
3. $d(uv) = vdu + udv$;
4. $d(Cu) = Cdu$;
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, v \neq 0$;
6. $df(u) = f'(u)du$.

Последнее свойство называют ***свойством инвариантности формы дифференциала*** первого порядка, которое заключается в том, что дифференциал функции не меняется в зависимости от того, чем является x: независимой переменной или некоторой дифференцируемой функцией.

Пример 5.2.1. Найти дифференциалы функций:

а) $y = sin^4 2x - tg2^x + \sqrt{3}$; б) $y = ln\frac{5x}{2x+1}$; в) $\rho = a\sqrt{sin 3\varphi}$.

Решение

а) Применим формулу (5.2) и свойство 6 для нахождения дифференциала:

$$dy = d\left(sin^4 2x - tg2^x + \sqrt{3}\right) = \left(sin^4 2x - tg2^x + \sqrt{3}\right)' dx =$$

$$= \left(4 sin^3 2x \cdot cos 2x \cdot 2 - \frac{1}{cos^2 2^x} \cdot 2^x ln 2\right) dx = \left(8 sin^3 2x cos 2x - \frac{2^x ln 2}{cos^2 2^x}\right) dx.$$

б) $$dy = d\left(ln\frac{5x}{2x+1}\right) = \left(ln\frac{5x}{2x+1}\right)' dx = \left(\frac{2x+1}{5x} \cdot \frac{5\cdot(2x+1) - 5x\cdot 2}{(2x+1)^2}\right) dx =$$

$$= \frac{10x + 5 - 10x}{5x(2x+1)} dx = \frac{1}{x(2x+1)} dx.$$

в) $$d\rho = a \cdot \left(\sqrt{sin 3\varphi}\right)' d\varphi = a \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{sin 3\varphi}} \cdot cos 3\varphi \cdot 3\right) d\varphi = \frac{3a\, cos 3\varphi}{2\sqrt{sin 3\varphi}} d\varphi.$$

Пример 5.2.2. Найти дифференциал функции $y^3 + y = x^3 - 6$ в точке $M(2;1)$.

Решение

Найдем производную неявной функции:

$$3y^2y' + y' = 3x^2,\ y'(3y^2+1) = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{3y^2+1}.$$

По формуле (5.2): $dy = y'dx = \dfrac{3x^2}{3y^2+1}dx$. Тогда дифференциал функции в точке $M(2;1)$ равен: $dy(M) = \dfrac{3\cdot 2^2}{3\cdot 1^2+1}dx = \dfrac{12}{4}dx = 3dx$.

Пример 5.2.3. Вычислить с помощью дифференциала приближенные значения: а) $\sqrt{82}$; б) $arctg1{,}05$; в) $sin\,31^\circ$; г) $ln\,0{,}9$.

Решение

а) Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. По формуле (5.3) получим: $\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + (\sqrt{x})'\Delta x = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$. В нашем случае $x + \Delta x = 82$. Пусть $x = 81$, а $\Delta x = 1$. Тогда $\sqrt{82} = \sqrt{81+1} \approx \sqrt{81} + \dfrac{1}{2\sqrt{81}}\cdot 1 = 9 + \dfrac{1}{18} = 9\dfrac{1}{18}$.

б) Рассмотрим функцию $f(x) = arctgx$. По формуле (5.3): $arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + (arctgx)'\Delta x = arctgx + \dfrac{1}{1+x^2}\Delta x$.

Положив $x = 1, \Delta x = 0{,}05$, получим: $arctg1{,}05 = arctg(1+0{,}05) \approx arctg1 +$
$+\dfrac{1}{1+1^2}\cdot 0{,}05 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}05 \approx 0{,}81$.

в) Для функции $f(x) = sin\,x$ имеет место приближенное равенство: $sin(x+\Delta x) \approx sin\,x + (sin\,x)'\Delta x = sin\,x + cos\,x\Delta x$.

Переведем градусы в радианы: $31^\circ = \dfrac{\pi}{180^\circ}\cdot 31^\circ = \dfrac{31\pi}{180}$.

Положив $x = \dfrac{30\pi}{180} = \dfrac{\pi}{6}, \Delta x = \dfrac{\pi}{180}$, получим:

$$sin\,31^\circ = sin\frac{31\pi}{180} = sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right) \approx sin\frac{\pi}{6} + cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0{,}515.$$

г) $ln(x+\Delta x) \approx ln\,x + (ln\,x)'\,\Delta x = ln\,x + \frac{1}{x}\Delta x$.

Представим аргумент логарифма в виде разности: $0{,}9 = 1 - 0{,}1$. Тогда при $x = 1,\ \Delta x = -0{,}1$ будем иметь:

$$ln\,0{,}9 = ln(1-0{,}1) \approx ln\,1 + \frac{1}{1}\cdot(-0{,}1) = 0 - 0{,}1 = -0{,}1.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти приращение и дифференциал функции $y = (ctgx + 1)^2$ при переходе аргумента от значения $x = \frac{\pi}{4}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Найти дифференциалы функций:

а) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; б) $y = 3^{tg\,ln\,x}$; в) $y = \frac{1}{\sqrt{sin\,2x}}$; г) $cos\frac{x}{y} = e^{xy}$.

3. Вычислить с помощью дифференциала приближенные значения:

а) $\sqrt[3]{29}$; б) $cos\,63^\circ$; в) $lg\,1{,}03$; г) $arcsin\,0{,}707$.

6. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

6.1. Производные высших порядков и их вычисление

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция. Тогда ее производная $f'(x)$ также является функцией от x. Производная от первой производной называется ***второй производной*** и обозначается: y'' или $f''(x)$, или $\frac{d^2y}{dx^2}$. Итак, $y'' = (y')'$ или $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Производная от второй производной называется ***производной третьего порядка***, т.е. $y''' = \left(y''\right)'$ или $\dfrac{d^3 y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)$.

Производной n-го порядка функции $y = f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Производные порядка выше первого называются ***производными высших порядков.***

Пример 6.1.1. Найти производные второго порядка функций:

а) $y = e^{x^2}$; б) $y = ln\,tg\,3x$; в) $y = arctg\sqrt{x}$.

Решение

а) Сначала найдем первую производную функции: $y' = e^{x^2} \cdot 2x$.

Дифференцируя y' по x, получим вторую производную:

$$y'' = \left(e^{x^2} \cdot 2x\right)' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot 2x + e^{x^2} \cdot 2 = 2e^{x^2}\left(2x^2 + 1\right).$$

б) Последовательно дифференцируя функцию, найдем y' и y'':

$$y' = \frac{1}{tg\,3x} \cdot \frac{1}{cos^2 3x} \cdot 3 = \frac{cos\,3x}{sin\,3x} \cdot \frac{1}{cos^2 3x} \cdot 3 = \frac{3}{sin\,3x\,cos\,3x} = \frac{6}{sin\,6x}.$$

$$y'' = \left(\frac{6}{sin\,6x}\right)' = 6 \cdot \left(-\frac{1}{sin^2 6x}\right) \cdot cos\,6x \cdot 6 = -\frac{36\,cos\,6x}{sin^2 6x}.$$

в) Найдем y' и y'':

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}.$$

$$y'' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\left(\sqrt{x} + x\sqrt{x}\right)^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}\right) = -\frac{1 + 3x}{4x\sqrt{x}(1+x)^2}.$$

Пример 6.1.2. Найти $y^{(4)}(1)$, если $y = \frac{1}{3}x^6 - \frac{3}{4}x^4 + 2x - 1$.

Решение

Найдем четвертую производную данной функции, выполняя последовательное дифференцирование:

$$y' = 2x^5 - 3x^3 + 2,\ y'' = 10x^4 - 9x^2,\ y''' = 40x^3 - 18x,\ y^{(4)} = 120x^2 - 18.$$

Тогда $y^{(4)}(1) = 120 \cdot 1^2 - 18 = 102$.

Пример 6.1.3. Найти $y''(0)$ для функции $y = e^{3x} \cdot \sin 2x$.

Решение

Найдем вторую производную функции:

$$y' = 3e^{3x} \cdot \sin 2x + e^{3x} \cdot \cos 2x \cdot 2 = e^{3x} \cdot (3\sin 2x + 2\cos 2x).$$

$$y'' = 3e^{3x} \cdot (3\sin 2x + 2\cos 2x) + e^{3x} \cdot (6\cos 2x - 4\sin 2x) =$$
$$= e^{3x} \cdot (9\sin 2x + 6\cos 2x + 6\cos 2x - 4\sin 2x) = e^{3x} \cdot (5\sin 2x + 12\cos 2x).$$

Вычислим значение второй производной: $y''(0) = e^0 \cdot (5\sin 0 + 12\cos 0) = 12$.

Отметим, что для функций, заданных ***параметрически*** ($x = x(t), y = y(t)$), производная второго порядка вычисляется по одной из формул:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} \tag{6.1}$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}. \tag{6.2}$$

Пример 6.1.4. Найти вторую производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t. \end{cases}$

Решение

Найдем производную функции, используя формулу (6.1). Для этого вычислим сначала x'_t и y'_t:

$$x'_t = 3a\sin^2 t\cos t,\ y'_t = -3a\cos^2 t\sin t.$$

Тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{3a\cos^2 t \sin t}{3a\sin^2 t \cos t} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -ctgt$. Продифференцируем найденную производную по переменной t: $\left(y'_x\right)'_t = \left(-ctgt\right)' = \frac{1}{\sin^2 t}$. Значит, вторая производная равна: $y''_{xx} = \frac{1}{\sin^2 t \cdot 3a\sin^2 t \cos t} = \frac{1}{3a\sin^4 t \cos t}$.

Пример 6.1.5. Дана функция $\begin{cases} x = tgt, \\ y = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Решение

Воспользуемся формулой (6.2):

$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}$, $x''_{tt} = -2\cos^{-3} t\left(-\sin t\right) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t}$, $y'_t = -\frac{1}{\cos^2 t}\left(-\sin t\right) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$,

$$y''_{tt} = \frac{\cos t \cdot \cos^2 t - \sin t \cdot 2\cos t\left(-\sin t\right)}{\cos^4 t} = \frac{\cos^2 t + 2\sin^2 t}{\cos^3 t}.$$

Тогда $$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{\cos^2 t + 2\sin^2 t}{\cos^3 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin t}{\cos^2 t} \cdot \frac{2\sin t}{\cos^3 t}}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3} =$$

$$= \frac{\cos^2 t + 2\sin^2 t - 2\sin^2 t}{\cos^5 t} \cdot \cos^6 t = = \cos^3 t.$$

Если функция задана ***неявно*** ($F\left(x, y\right) = 0$), то для нахождения второй производной необходимо продифференцировать ее первую производную по x и в полученное соотношение подставить выражение для первой производной.

Пример 6.1.6. Найти вторую производную для функции $x = arctg\left(x + y\right)$.

Решение

Продифференцируем обе части равенства, считая y функцией от x:

$x' = \left(arctg\left(x + y\right)\right)'$; $\quad 1 = \frac{1}{1 + \left(x + y\right)^2} \cdot \left(1 + y'\right)$, значит

$1 + y' = 1 + \left(x + y\right)^2$, откуда $y' = \left(x + y\right)^2$.

Дифференцируем полученное выражение еще раз: $y'' = 2(x+y)(1+y')$.

Заменив y' ее значением, получим окончательно:

$$y'' = 2(x+y)\left(1+(x+y)^2\right) = 2(x+y) + 2(x+y)^3.$$

Пример 6.1.7. Убедиться, что функция $y - x = 2\ln y$ удовлетворяет уравнению: $yy'' = (y')^2 - (y')^3$.

Решение

Найдем производные y' и y'' этой функции:

$$(y-x)' = (2\ln y)', \quad y' - 1 = 2\cdot\frac{1}{y}\cdot y', \quad y' - \frac{2}{y}y' = 1, \quad y'\left(1-\frac{2}{y}\right) = 1 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-2};$$

$$y'' = \left(\frac{y}{y-2}\right)' = \frac{y'(y-2) - y\cdot y'}{(y-2)^2} = -\frac{2y'}{(y-2)^2} = -\frac{2}{(y-2)^2}\cdot\frac{y}{y-2} = -\frac{2y}{(y-2)^3}.$$

Проверим, удовлетворяют ли найденные значения производных заданному соотношению:

$$y\cdot\left(-\frac{2y}{(y-2)^3}\right) = \left(\frac{y}{y-2}\right)^2 - \left(\frac{y}{y-2}\right)^3, \quad -\frac{2y^2}{(y-2)^3} = \frac{y^2}{(y-2)^2} - \frac{y^3}{(y-2)^3},$$

$$-\frac{2y^2}{(y-2)^3} = \frac{y^2(y-2) - y^3}{(y-2)^3}, \quad -\frac{2y^2}{(y-2)^3} \equiv -\frac{2y^2}{(y-2)^3}.$$

Следовательно, мы убедились, что функция удовлетворяет заданному уравнению.

6.2. Дифференциалы высших порядков и их вычисление

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала: $d^2y = d(dy)$, а значит $d^2y = f''(x)dx^2$. Аналогично $d^3y = f'''(x)dx^3$ и т.д.

Дифференциалом n-го порядка n-раз дифференцируемой функции называется дифференциал от ее дифференциала ($n-1$)-го порядка: $d^n y = d\left(d^{n-1}y\right) = f^{(n)}(x)dx^n$.

Пример 6.2.1. Найти $d^2 y$, если $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$.

Решение

Для вычисления дифференциала второго порядка воспользуемся формулой: $d^2 y = f''(x)dx^2$. Найдем производные функции:

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)' = \left(x^{-\frac{2}{5}}\right)' = -\frac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}},\quad y'' = \left(-\frac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}\right)' = \frac{14}{25}x^{-\frac{12}{5}} = \frac{14}{25\sqrt[5]{x^{12}}}.$$

Тогда $\quad d^2 y = \dfrac{14}{25\sqrt[5]{x^{12}}}dx^2$.

Пример 6.2.2. Найти дифференциал пятого порядка функции $y = 3\,e^{2x}$.

Решение

Для дифференциала 5-го порядка справедливо равенство: $d^5 y = f^{(5)}(x)\,dx^5$. Найдем $f^{(5)}(x) = y^{(5)}$: $y' = 6\,e^{2x}$, $\quad y'' = 12\,e^{2x}$, $\quad y''' = 24\,e^{2x}$, $y^{(4)} = 48\,e^{2x}$, $y^{(5)} = 96\,e^{2x}$.

Значит, искомый дифференциал равен: $d^5 y = 96\,e^{2x}dx^5$.

Пример 6.2.3. Для функции $y = 5\cos^2 x$ найти $d^3 y$ при $x = \dfrac{\pi}{12}$.

Решение

Найдем третью производную данной функции:

$y' = 10\cos x \cdot (-\sin x) = -5\sin 2x$, $\quad y'' = -10\cos 2x$, $\quad y''' = 20\sin 2x$.

Тогда $d^3 y = f'''(x)dx^3$, $\quad d^3 y = 20\sin 2x dx^3$.

Найдем $d^3 y\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \left(20\sin 2\cdot\dfrac{\pi}{12}\right)dx^3 = \left(20\sin\dfrac{\pi}{6}\right)dx^3 = 10dx^3$.

7. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

7.1. Неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Правило Лопиталя применяется для вычисления предела функции при раскрытии неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Сформулируем его в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1) определены и непрерывны в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, т.е. обе функции являются одновременно бесконечно малыми или бесконечно большими при $x \to x_0$;

3) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел отношения функций $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и выполняется тождество: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

При соблюдении условий теоремы правило Лопиталя можно применять многократно: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Рассмотрим примеры непосредственного применения правила Лопиталя.

Пример 7.1.1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\ln x}$; г) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$;

д) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x + 1}{4x^2 + 3x - 2}$; е) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^{2x}}$; ж) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln x}$ $(n > 0)$.

Решение

а) Под пределом имеем неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Так как условия теоремы выполняются, то можно применить правило Лопиталя для ее раскрытия:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos 5x \cdot 5}{3} = \frac{5}{3}.$$

б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

После применения правила Лопиталя снова получили неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Повторив процедуру, получим: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^3-1)'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2}{\left(1/x\right)}=\lim\limits_{x\to 1}3x^3=3$.

г) $$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)'}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{2}{x^3+x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x}{2(1+x^2)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(1+x^2)}{1+x^2}=\infty.$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+1}{4x^2+3x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(5x+1)'}{(4x^2+3x-2)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{8x+3}=\left(\frac{5}{\infty}\right)=0$.

е) $$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^3)'}{(e^{2x})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^{2x}\cdot 2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(3x^2)'}{(2e^{2x})'}=$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{2e^{2x}\cdot 2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(6x)'}{(4e^{2x})'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{4e^{2x}\cdot 2}=\frac{6}{\infty}=0.$$

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}(n>0)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n\,x^{n-1}}{\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}n\,x^n=+\infty$.

7.2. Другие виды неопределенностей

Раскрытие других неопределенностей сводится к основным неопределенностям $\left(\frac{0}{0}\right)$или$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ путем тождественных преобразований функций, стоящих под знаком предела. Приведем эти способы сведения.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ представляет собой ***неопределенность*** $(0\cdot\infty)$. Тогда необходимо выполнить преобразования: $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 7.2.1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot \ln x$; б) $\lim\limits_{x\to 0,5}\sin(2x-1)\cdot tg\pi x$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\cdot(tg\,x-ctg\,x)$.

Решение

а) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot \ln x=(0\cdot\infty)$. Имеем неопределенность $(0\cdot\infty)$.

Сведем ее к неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ и применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot \ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(1/\sqrt{x}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot x^{\frac{3}{2}}=-2\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=-2\cdot 0=0.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0,5}\sin(2x-1)\cdot tg\pi x=(0\cdot\infty)$.

Сведем полученную неопределенность к виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, заменив $tg\pi x=\dfrac{1}{ctg\pi x}$: $\lim\limits_{x\to 0,5}\sin(2x-1)\cdot tg\pi x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{\sin(2x-1)}{ctg\pi x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0,5}\frac{\cos(2x-1)\cdot 2}{\left(-\dfrac{1}{\sin^2\pi x}\cdot\pi\right)}=-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 0,5}\cos(2x-1)\sin^2\pi x=-\frac{2}{\pi}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg2x\cdot(tg\,x-ctg\,x)=(\infty\cdot 0)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tg\,x-ctg\,x}{\left(\dfrac{1}{tg2x}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tg\,x-ctg\,x}{ctg2x}=$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\left(-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\cdot\frac{\sin^2 2x}{-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\cdot 4 = -2.$$

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right]$ представляет собой ***неопределенность*** $(\infty - \infty)$, которая может быть сведена к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ преобразованием разности функций в частное:

$$f(x) - g(x) = \frac{\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right]}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

Пример 7.2.2. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - ctg\, x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{3x} - x\right)$.

Решение

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - ctg\, x\right) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = \frac{0}{1+1} = 0.$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = (\infty - \infty) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x - 1 - \ln x}{\ln x(x-1)} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1) + \ln x\cdot 1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\left(\frac{x - 1 + x\ln x}{x}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x - 1 + x\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{1 + \ln x + x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2 + \ln x} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{3x} - x\right) = (\infty - \infty)$.

Вынесем за скобки e^{3x}, тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{3x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} \cdot \left(1 - \frac{x}{e^{3x}}\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{3x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{e^{3x}}\right).$$

Вычисляя каждый из пределов отдельно, будем иметь:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{3x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{3x} \cdot 3} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{3x} = +\infty.$$

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} \cdot \left(1 - \frac{x}{e^{3x}}\right) = \infty$.

3. ***Неопределенности*** $\left(0^0\right), \left(\infty^0\right), \left(1^\infty\right)$ сводятся к рассмотренной выше неопределенности $(0 \cdot \infty)$ с помощью предварительного логарифмирования или представления функции в виде $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ln f(x)}. \qquad (7.1.)$$

Пример 7.2.3. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{ctg^2 x}$.

Решение

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\infty^0\right)$.

Воспользуемся формулой (7.1). В нашем случае $f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln\left(1 + x^2\right)}$.

Вычислим отдельно предел, стоящий в показателе степени:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2x}=0.$$

Окончательно получим: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{ctg^2 x}=\left(1^{\infty}\right)$.

Вычислим предел, выполнив предварительное логарифмирование.

Пусть $y=\left(\cos x\right)^{ctg^2 x}$.

$$\ln y=\ln\left[\left(\cos x\right)^{ctg^2 x}\right]=ctg^2 x\cdot\ln\cos x=\frac{\ln\cos x}{\left(\frac{1}{ctg^2 x}\right)}=\frac{\ln\cos x}{tg^2 x}.$$

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{tg^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\ln\cos x\right)'}{\left(tg^2 x\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\left(-\sin x\right)}{2tg\,x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-tg\,x}{2tg\,x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x}{2}=\frac{-1}{2}.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\ln\lim\limits_{x\to 0}y=-\frac{1}{2}$, получим: $\lim\limits_{x\to 0}y=e^{-\frac{1}{2}}$. Значит, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{ctg^2 x}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы, применяя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos 2x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{3x^2+x-14}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+3}-3}{4-x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-3^x}{tg\dfrac{x}{3}}$.   5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-4x}}{x}$.   6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{3^x-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\log_3 x}{x^2}$.   8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+2x}{x^2+3}$.   9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3^x}{\ln(2+x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tg\,x$.   11. $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[4]{x}\cdot\log_3 x$.   12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-2\right)\cdot ctg3x$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.   14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{x}\right)$.   15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3x^2}-\dfrac{1}{3x\,tg\,x}\right)$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln ctg\,x)^{tg5x}$.   17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^x$.   18. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 5x)^{\frac{1}{x^2}}$.

8. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

8.1. Монотонность и экстремум функции

Функция $y=f(x)$ называется ***возрастающей*** (***убывающей***) на интервале (a,b), если для двух произвольных точек x_1 и x_2 из указанного интервала таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство: $f(x_1)<f(x_2)$ $\left(f(x_1)>f(x_2)\right)$.

Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными***, а интервалы, в которых функция возрастает или убывает – ***интервалами монотонности.***

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее производной: если в некотором интервале (a,b) $f'(x)>0$, то функция возрастает на этом интервале; если же $f'(x)<0$ для всех $x\in(a;b)$, то то функция убывает на этом интервале.

Интервалы монотонности могут отделяться друг от друга точками, в которых производная равнв нулю или не существует. Такие точки называются ***критическими точками.*.**

Итак, <u>чтобы найти интервалы монотонности</u>, необходимо:

1) найти область определения функции;

2) найти производную данной функции;

3) найти критические точки из условия, что производная равна нулю или не существует;

4) разделить критическими точками область определения на интервалы и в каждом из них определить знак производной. На интервалах, где производная положительна, функция возрастает, а где производная отрицательна – функция убывает.

Пример 8.1.1. Найти интервалы монотонности функций:

а) $f(x)=x^3-6x^2+4$; б) $f(x)=x^3-3x^2+6x-5$.

Решение

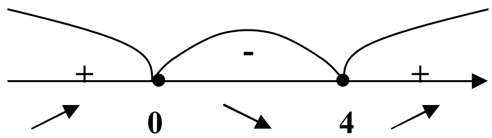
а) $f(x)=x^3-6x^2+4$.

1) Область определения функции $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

2) Производная функции: $f'(x)=3x^2-12x$.

3) Критические точки: $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x=0$ или $3x(x-4)=0$, откуда $x_1=0, x_2=4$. Производная существует на всей области определения.

4) Знаки производной:



Функция возрастает на интервалах $(-\infty;0)$ и $(4;\infty)$. Функция убывает на интервале$(0;4)$.

б) $f(x)=x^3-3x^2+6x-5$.

1) $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

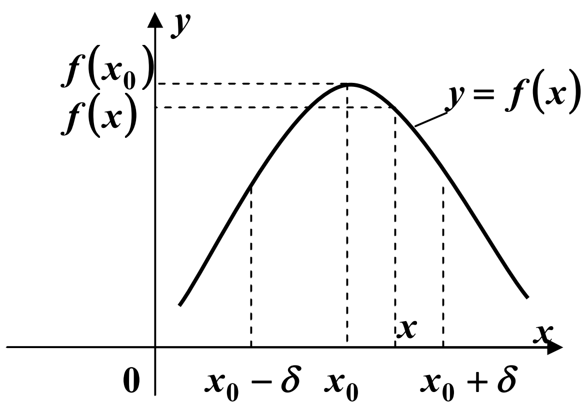
2) $f'(x)=3x^2-6x+6$.

3) Критические точки: $f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 3x^2-6x+6=0$ или $x^2-2x+2=0$. Так как $D=4-4\cdot1\cdot2=-4<0$, то уравнение не имеет корней,

т.е. производная не обращается в ноль. $f'(x)$ существует на всей области определения. Значит, критических точек нет.

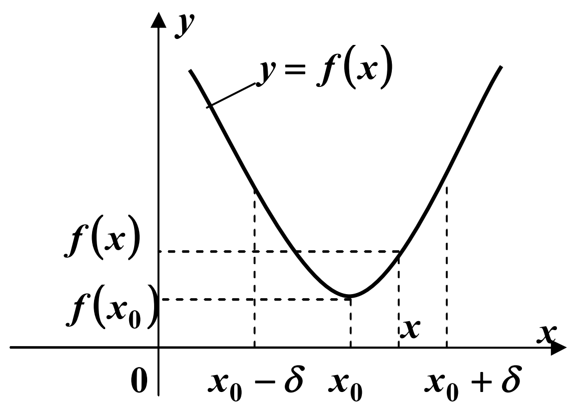
4) Производная принимает только положительные значения, поэтому функция возрастает на интервале $(-\infty;\infty)$.

Точка x_0 называется ***точкой локального максимума*** (***минимума***) функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0, которая принадлежит области определения функции, и для всех x из этой окрестности верно неравенство : $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ (см. рис.8.1, 8.2).



x_0 – точка максимума

Рис.8.1



x_0 – точка минимума

Рис.8.2

<u>Правило нахождения экстремумов (максимумов и минимумов) с помощью первой производной:</u>

1) найти область определения функции $D(f)$;

2) найти производную функции $f'(x)$;

3) найти критические точки функции;

4) исследовать знак производной в интервалах, на которые критические точки делят область определения функции. При этом, если при переходе через точку x_0 слева направо $f'(x)$ меняет свой знак с “–” на “+”, то точка x_0 является точкой минимума, а если $f'(x)$ меняет знак с “+” на “–”, то x_0 – точка максимума функции.

5) вычислить значения функции в точках экстремума.

Замечание 1. Если при переходе через критическую точку x_0 знак производной $f'(x)$ не меняется. то в этой точке функция не имеет экстремума.

Пример 8.1.2. Найти экстремумы функций:

а) $f(x)=3x^2-x^3-1$; б) $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{4}{x^2}$.

Решение

а) $f(x)=3x^2-x^3-1$.

1) Область определения $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

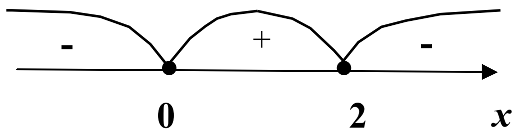
2) $f'(x)=6x-3x^2$.

3) Критические точки:

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x-3x^2=0$ или $x(6-3x)=0$, откуда $x_1=0,\ x_2=2$.

$f'(x)$ существует для всех $x\in(-\infty;\infty)$.

4) Знаки $f'(x)$:



При переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с “–” на “+”, значит, $x=0$ - точка минимума. При переходе через точку $x=2$ производная меняет знак с “+”на “–”тогда $x=2$ – точка максимума.

5) $y_{min}=f(0)=3\cdot 0^2-0^3-1=-1$, $y_{max}=f(2)=3\cdot 2^2-2^3-1=3$.

б) $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{4}{x^2}$.

1) Область определения $D(f): x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

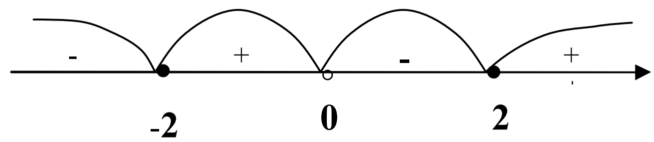
2) $f'(x)=\dfrac{2x}{4}+4\cdot\left(-2x^{-3}\right)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^4-16}{2x^3}$.

3) Критические точки:

$f'(x)=0 \Rightarrow x^4-16=0$, откуда $x=\pm 2$.

$f'(x)$ существует на всей области определения.

4) Знаки $f'(x)$:



При переходе через точки $x=\pm 2$ производная меняет знак с "–" на "+", значит, $x=\pm 2$ – точки минимума. При переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с "+" на "–", но $x=0\notin D(f)$, поэтому $x=0$ не является точкой экстремума.

5) $y_{min}=f(-2)=f(2)=\frac{2^2}{4}+\frac{4}{2^2}=2$.

<u>Правило нахождения экстремумов функции с помощью второй производной:</u>

1) найти область определения функции $D(f)$;

2) найти производную функции $f'(x)$;

3) найти критические точки функции;

4) найти $f''(x)$ в критической точке.

Если $f''(x_0)\neq 0$, то x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, а именно: точкой минимума, если $f''(x_0)>0$, и точкой максимума, если $f''(x_0)<0$.

5) вычислить значения функции в точках экстремума.

Замечание 2. Второе правило исследования функции на экстремум применяется к более узкому классу функций. Его нельзя использовать в случаях, если $f'(x)$ не существует в критической точке x_0 или когда $f''(x_0)=0$. В этих случаях используют первое правило.

Пример 8.1.3. С помощью второго правила исследовать на экстремум функции: а) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x-3$; б) $f(x)=\sqrt{e^{x^2}+1}$.

Решение

а) $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x-3$.

1) Область определения функции $D(f): x\in(-\infty;+\infty)$.

2) $f'(x)=x^2-3x+2$.

3) Критические точки:

$f'(x)=0\Rightarrow x^2-3x+2=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=2$.

$f'(x)$ существует для всех $x \in (-\infty;+\infty)$, значит второе правило использовать можно.

4) $f''(x) = 2x - 3$. Найдем $f''(1) = -1$ и $f''(2) = 1$.

Так как $f''(1) < 0$, то $x_1 = 1$ – точка максимума; $f''(2) > 0$, значит $x_2 = 2$ – точка минимума.

5) $y_{max} = y(1) = -\dfrac{13}{6}$, $y_{min} = y(2) = -\dfrac{7}{3}$.

б) $f(x) = \sqrt{e^{x^2} + 1}$.

1) $D(f): x \in (-\infty;+\infty)$.

2) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{e^{x^2} + 1}} \cdot e^{x^2} \cdot 2x = \dfrac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2} + 1}}$.

3) Критические точки:

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2} + 1}} = 0$, откуда $x = 0$.

$f'(x)$ существует на всей области определения.

4) $$f''(x) = \frac{\left(e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}\right) \cdot \sqrt{e^{x^2} + 1} - xe^{x^2} \cdot \dfrac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2} + 1}}}{e^{x^2} + 1};$$

$f''(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 0$, значит $x = 0$ – точка минимума.

5) $y_{min} = y(0) = \sqrt{2}$.

Пример 8.1.4. Исследовать функции на монотонность и экстремум:

а) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$; б) $f(x) = x^2 - 2\ln x$; в) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{1 - x}$.

Решение

а) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

1) Область определения функции $D(f): x \in (-\infty;+\infty)$.

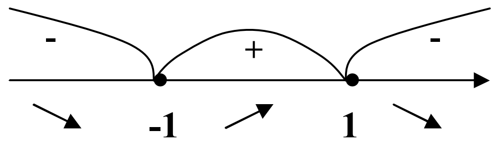
2) $f'(x)=\dfrac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$.

3) Критические точки:

$f'(x)=0 \Rightarrow 2-2x^2=0$ или $1-x^2=0$, откуда $x=\pm 1$.

$f'(x)$ существует для всех $x\in(-\infty;+\infty)$.

4) Знаки производной:



Функция убывает на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;\infty)$, возрастает на интервале $(-1;1)$. При переходе через точку $x=-1$ производная меняет знак с “–” на “+”, значит $x=-1$ – точка минимума. При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с “+” на “–”, тогда $x=1$ – точка максимума.

5) $y_{min}=y(-1)=-1$, $y_{max}=y(1)=1$.

б) $f(x)=x^2-2\ln x$.

1) $D(f): x\in(0;+\infty)$.

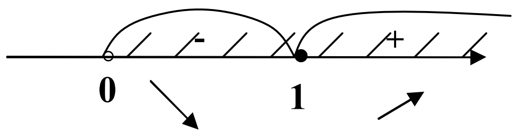
2) $f'(x)=2x-2\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{x}$.

3) Критические точки:

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-x^2=0$, откуда $x=\pm 1$. Так как $x=-1\notin D(f)$, то остается только точка $x=1$.

$f'(x)$ существует на всей области определения.

4) Знаки $f'(x)$:



Функция убывает на интервале $(0;1)$ и возрастает на интервале $(1;\infty)$. При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с “–” на “+”, т.е. $x=1$ – точка минимума.

5) $y_{min} = y(1) = 1 - 2\ln 1 = 1$.

в) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{1-x}$

1) $D(f)\colon x \in (-\infty; +\infty)$.

2) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt[3]{1-x} + x \cdot \frac{1}{3}(1-x)^{-2/3} \cdot (-1) = \sqrt[3]{1-x} - \dfrac{x}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}} =$

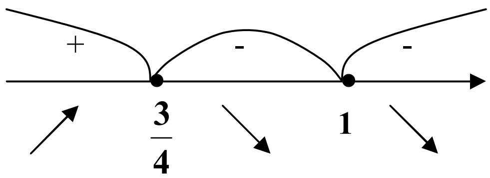
$= \dfrac{3(1-x) - x}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}} = \dfrac{3-4x}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

3) Критические точки:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 4x = 0, x = \frac{3}{4}$.

$f'(x)$ не существует в точке $x = 1 \in D(f)$.

4) Знаки $f'(x)$:



Функция возрастает на интервале $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ и убывает на интервале $\left(\frac{3}{4}; \infty\right)$. При переходе через точку $x = \frac{3}{4}$ производная меняет знак с “+” на “–”, тогда $x = \frac{3}{4}$ – точка максимума. При переходе через точку $x = 1$ производная не меняет знак. Значит, критическая точка $x = 1$ не является точкой экстремума.

5) $y_{max} = y\left(\frac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{4\sqrt[3]{4}}$.

8.2. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Отметим, что всякая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках , которые принадлежат этому отрезку, либо на его концах.Эти значения являются абсолютным максимумом и минимумом функции. Для их отыскания необходимо найти все локальные экстремумы функции внутри отрезка $[a;b]$ и на его концах и сравнить их. Наибольший из максимумов – это наибольшее значение функции на отрезке, а наименьший из минимумов – наименьшее значение на этом отрезке.

Пример 8.2.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-7x^2+24x+1$ на отрезке $[-5;2]$.

Решение

Данная функция определена на множестве всех действительных чисел $D(y): x\in(-\infty;+\infty)$.

Найдем критические точки функции: $y'=x^3-x^2-14x+24$.

$y'=0$: $x^3-x^2-14x+24=0$, $x^3-2x^2+x^2-2x-12x+24=0$,

$x^2(x-2)+x(x-2)-12(x-2)=0$, $(x-2)(x^2+x-12)=0$ или

$(x-2)(x+4)(x-3)=0$.

Имеем три критические точки $x_1=2$, $x_2=-4$, $x_3=3$. Отрезку $[-5;2]$ принадлежат только точки $x_1=2$ и $x_2=-4$.

Вычислим значения функции в отобранных критических точках и на концах отрезка:

$$y(-4)=(-4)\frac{(-4)^4}{4}-\frac{(-4)^3}{3}-7\cdot(-4)^2+24\cdot(-4)+1=-\frac{365}{3}=-121\frac{2}{3},$$

$$y(2)=\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}-7\cdot2^2+24\cdot2+1=\frac{67}{3}=22\frac{1}{3},$$

$$y(-5)=\frac{(-5)^4}{4}-\frac{(-5)^3}{3}-7\cdot(-5)^2+24\cdot(-5)+1=-96\frac{1}{12}.$$

Таким образом, функция принимает свое наименьшее значение $y=-121\frac{2}{3}$ в критической точке $x=-4$ внутри отрезка, а наибольшее значение $y=22\frac{1}{3}$ в критической точке $x=2$, которая совпадает с правым концом отрезка.

Пример 8.2.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = sin\,2x - x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение

$D(y): x \in (-\infty; \infty)$.

Критические точки функции: $y' = 2\,cos\,2x - 1$.

$y' = 0$: $2\,cos\,2x - 1 = 0$, откуда $cos\,2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in N$.

Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат точки $x = \pm\frac{\pi}{6}$.

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}, \qquad y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\,sin\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6},$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = sin\,\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \qquad y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\,sin\,\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Значит, наименьшее значение $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$, наибольшее $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, которые функция принимает на концах отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Замечание. Если на некотором интервале функция имеет только один экстремум, то в критической точке она достигает своего наибольшего или наименьшего значения, исходя из того, будет эта точка точкой максимума или минимума. В большинстве таких задач исследование на экстремум удобнее проводить с помощью второй производной.

Пример 8.2.3. Найти наибольшее значение функции $y = 1 + 6x - 3x^2$.

Решение

Область определения функции $D(y): x \in (-\infty; \infty)$.

Найдем критические точки: $y' = 6 - 6x$, $6 - 6x = 0 \Rightarrow x = 1$.

Исследование на экстремум проведем с помощью второй производной. Найдем $y'' = -6$. Так как $y'' < 0$, то функция имеет в критической точке $x = 1$ максимум, а, значит, принимает в этой точке свое наибольшее значение, которое равно: $y(1)=1+6\cdot 1-3\cdot 1^2=4$.

Пример 8.2.4. Найти наименьшее значение функции $y=x^2\ ln\, x$.

Решение

$D(y): x\in(0;\infty)$.

Критические точки: $y'=2x\,ln\,x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=2x\,ln\,x+x=x(2\,ln\,x+1)$.

$y'=0$: $x(2\,ln\,x+1)=0$, откуда $x_1=0$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Но $x=0\notin D(y)$, значит $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ – единственная критическая точка.

Исследуем функцию на экстремум: $y''=2\,ln\,x+1+x\cdot\dfrac{2}{x}=2\,ln\,x+3$.

Найдем $y''\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=2\,ln\,e^{-\frac{1}{2}}+3=2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3=2$.

Так как $y''\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)>0$, то в точке $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ функция имеет минимум.

Итак, функция в области определения имеет только один экстремум, а именно – минимум, значит в этой точке она достигает своего наименьшего значения. Найдем это значение: $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{e}\right)^2}\,ln\,\dfrac{1}{\sqrt{e}}=-\dfrac{1}{2e}$.

8.3. Выпуклость и вогнутость кривых. Точки перегиба

Кривая $y=f(x)$ называется ***выпуклой*** на интервале $(a;b)$, если все ее точки, кроме точки касания, лежат ниже произвольной ее касательной на этом интервале (рис. 8.3).

Кривая $y=f(x)$ называется ***вогнутой*** на интервале $(a;b)$, если все ее точки, кроме точки касания, лежат выше произвольной ее касательной на этом интервале (рис. 8.4).

Точкой перегиба называется такая точка кривой, которая отделяет ее выпуклую часть от вогнутой (рис 8.5).

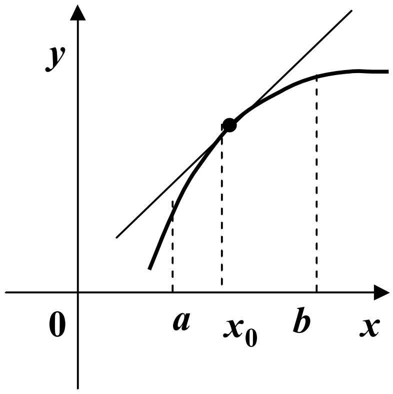


Рис.8.3

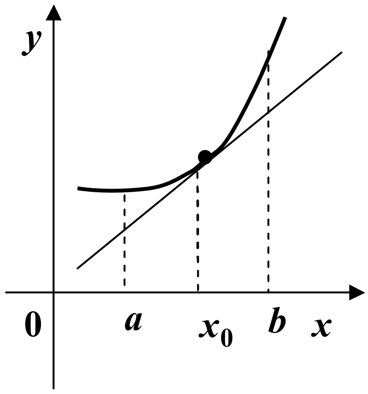


Рис.8.4

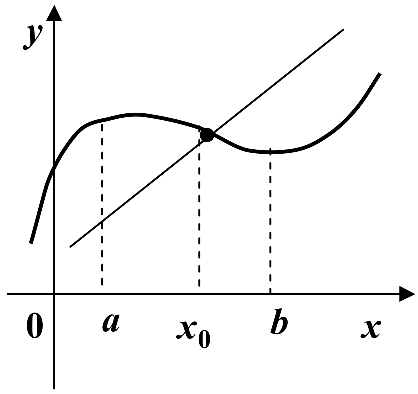


Рис.8.5

Выпуклость и вогнутость кривой, которая является графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком ее второй производной, а именно: если в некотором интервале $(a;b)$ $f''(x) < 0$, то кривая выпукла на этом интервале, а если $f''(x) > 0$ – кривая вогнута на интервале $(a;b)$.

Интервалы выпуклости и вогнутости могут отделяться друг от друга точками, в которых вторая производная равна нулю или не существует. Эти точки называются ***критическими точками II-го рода*** функции $y = f(x)$.

Если при переходе через критическую точку II-го рода x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Правило нахождения точек перегиба:

1) найти область определения функции $y = f(x)$;

2) найти критические точки II-го рода функции;

3) исследовать знак $f''(x)$ в интервалах, на которые критические точки делят область определения функции. Если точка x_0 разделяет интервалы, в которых $f''(x)$ разных знаков, то она является абсциссой точки перегиба графика функции;

4) вычислить значения функции в точках перегиба.

Пример 8.3.1. Найти промежутки выпуклости и вогнутости графика функции $f(x) = 2x^3 - x^4 + 36x^2 - 100$.

Решение

1) Область определения функции $D(f): x \in (-\infty;\infty)$.

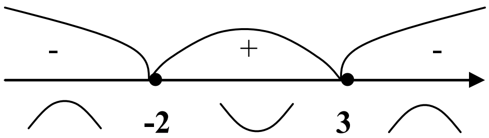
2) Критичекие точки II рода:

$f'(x) = 6x^2 - 4x^3 + 72x$; $f''(x) = 12x - 12x^2 + 72$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow -12x^2 + 12x + 72 = 0$ или $x^2 - x - 6 = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

$f''(x)$ существует для всех $x \in (-\infty;\infty)$.

3) Знаки $f''(x)$:



При $x \in (-\infty;-2) \cup (3;\infty)$ $f''(x) < 0$, при $x \in (-2;3)$ $f''(x) > 0$. Значит, кривая выпукла на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(3;\infty)$, вогнута на интервале $(-2;3)$.

Пример 8.3.2. Найти точки перегиба графика функции $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

Решение

1) Область определения $D(f): x \in (-\infty;\infty)$.

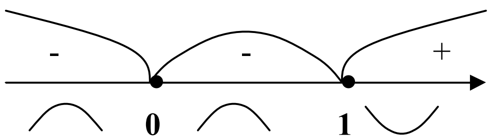
2) Критические точки II рода:

$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$; $f''(x) = 60x^3 - 60x^2$.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 60x^3 - 60x^2 = 0$ или $x^3 - x^2 = 0$. Тогда $x^2(x-1) = 0$, откуда $x = 0,\ x = 1$.

$f''(x)$ существует на всей области определения.

3) Знаки $f''(x)$:



$f''(x) > 0$ при $x \in (1;\infty)$; $f''(x) < 0$ при $x \in (-\infty;0) \cup (0;1)$.

При переходе через точку $x = 1$ вторая производная меняет знак, поэтому $x = 1$ **-** точка перегиба. В точке $x = 0$ перегиба нет.

4) Вычислим $f(1) = 3 - 5 + 4 = 2$. Значит $(1;2)$ – точка перегиба.

Пример 8.3.3. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графиков функций: а) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$;

в) $f(x) = 1 - \ln(x^2 - 4)$; г) $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x+2}$.

Решение

а) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

1) Область определения $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

2) Критические точки II рода:

$$f'(x)=\frac{1(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};$$

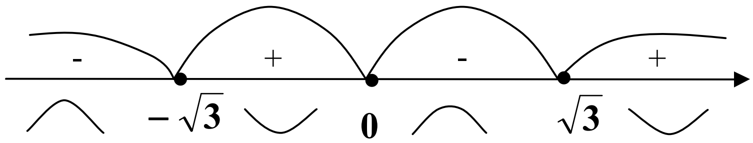
$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{(1+x^2)\left[-2x(1+x^2)-4x(1-x^2)\right]}{(1+x^2)^4}=$$

$$=\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3}=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}.$$

$f''(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 2x^3-6x=0,\ \ x(x^2-3)=0$, откуда $x=0$ или $x=\pm\sqrt{3}$;

$f''(x)$ существует для всех $x\in D(f)$.

3) Знаки $f''(x)$:



Кривая выпукла на интервалах $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(0;\sqrt{3})$, вогнута на интервалах $(-\sqrt{3};0)$ и $(\sqrt{3};\infty)$. В точках $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ график имеет перегиб.

4) Значения функции в точках перегиба:

$$f(0)=0,\quad f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{3}}{4},\qquad f(-\sqrt{3})=\frac{-\sqrt{3}}{4}.$$

Тогда $(0;0),\left(\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right),\left(-\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ - точки перегиба.

б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$.

1) Найдем область определения: $x^2-4\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq\pm 2$.

$D(f): x\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$.

2) Критические точки II рода: $\quad f'(x)=-\dfrac{1}{(x^2-4)^2}\cdot 2x=-\dfrac{2x}{(x^2-4)^2}$;

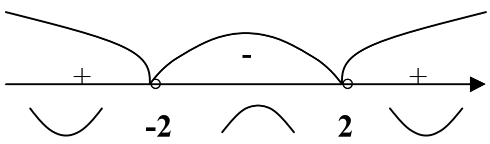
$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2-4\right)^2+2x\cdot 2\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{-2\left(x^2-4\right)+8x^2}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{6x^2+8}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

$f''(x)\neq 0$, так как $6x^2+8\neq 0$;

$f''(x)$ существует для всех $x\in D(f)$.

Критических точек нет. График функции перегибов не имеет.

3) Знаки $f''(x)$:



Кривая выпукла на интервале $(-2;2)$, вогнута на интервалах $(-\infty;-2)$ и $(2;\infty)$.

в) $f(x)=1-\ln\left(x^2-4\right)$.

1) Область определения функции: $x^2-4>0$, т.е. $x\in(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$.

2) Критические точки II рода:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2-4}\cdot 2x=-\frac{2x}{x^2-4};$$

$$f''(x)=\frac{-2\left(x^2-4\right)+2x\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-2x^2+8+4x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x^2+8}{\left(x^2-4\right)^2}.$$

$f''(x)\neq 0$, так как $2x^2+8\neq 0$;

$f''(x)$ существует для всех $x\in D(f)$.

Критических точек нет. Значит нет и перегибов графика.

3) Знаки $f''(x)$:

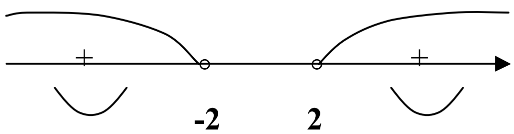


График функции вогнутий на всей области определения.

г) $f(x)=3+\sqrt[3]{x+2}$.

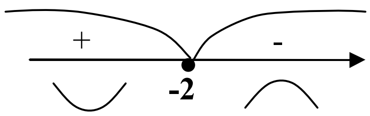
1) $D(f): x\in(-\infty;\infty)$.

2) Критические точки II рода:

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x+2)^{-2/3};\quad f''(x)=-\frac{2}{9}(x+2)^{-5/3}=-\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$$

$f''(x)\neq 0$; $f''(x)$ не существует при $x=-2\in D(f)$, поэтому $x=-2$ является критической точкой.

3) Знаки $f''(x)$:



Кривая выпукла на интервале $(-2;\infty)$, вогнута на интервале $(-\infty;-2)$. При $x=-2$ график имеет перегиб.

4) $f(-2)=3$, $(-2;3)$ – точка перегиба.

8.4. Асимптоты кривой

Асимптотой кривой называют прямую, к которой неограниченно приближается точка кривой при удалении ее от начала координат. Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

График функции $y=f(x)$ при $x\to a$ имеет ***вертикальную асимптоту***, если $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$. Уравнение вертикальной асимптоты: $x=a$ (рис.8.6).

Горизонтальной асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\pm\infty$ называют прямую $y=b$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ (рис.8.7).

Прямая $y=kx+b$ будет ***наклонной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ ($k\neq 0$) и $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$ (рис.8.8).

Замечание. Необходимо отдельно рассматривать случаи, когда $x\to-\infty$ и $x\to+\infty$.

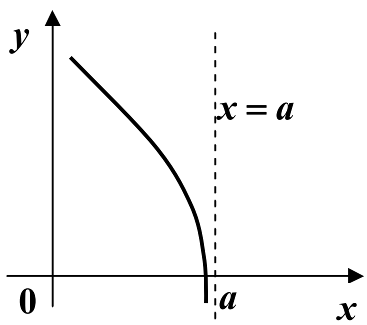


Рис. 8.6

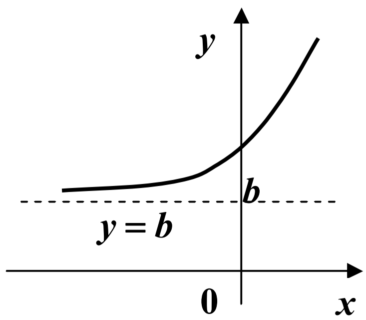


Рис. 8.7

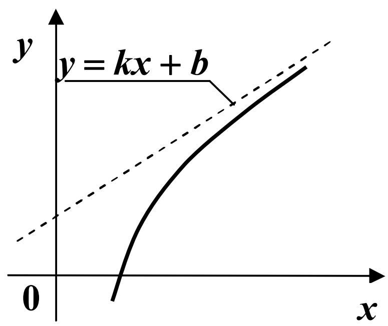


Рис.8.8

Пример 8.4.1. Найти асимптоты кривой $y = x + \frac{1}{x}$.

Решение

Область определения функции $D(y): x \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$. В точке $x = 0$ функция имеет разрыв II рода, так как $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty$. Значит, $x = 0$ - вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty}(y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty}\left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Тогда $y = x$ - наклонная асимптота.

Горизонтальных асимптот нет, так как $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty$.

Пример 8.4.2. Найти асимптоты кривой $y = \frac{5x}{x^2 - 4}$.

Решение

Область определения функции найдем из неравенства:

$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$. Значит, $D(y): x \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$.

В точках $x = \pm 2$ функция имеет разрывы II рода, так как $\lim\limits_{x \to \pm 2 \pm 0} \frac{5x}{x^2 - 4} = \pm\infty$. Поэтому график имеет две вертикальные асимптоты: $x = -2$ и $x = 2$.

Найдем наклонные асимптоты: $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x^2 - 4} = 0$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\frac{5x}{x^2 - 4}\right) = 0$.

Тогда $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

Пример 8.4.3. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$.

Решение

Найдем область определения функции: $x - 3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 3$.

$D(y): x \in (-\infty;3) \cup (3;\infty)$

Вычислим $\lim\limits_{x\to 3\pm 0}\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}=\mp\infty$, поэтому $x=3$ – точка разрыва II рода. Значит, $x=3$ – вертикальная асимптота.

Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-6+\frac{3}{x}}{x-3}=1,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-6x+3-x^2+3x}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+3}{x-3}=-3.$$

Получили, что $y=x-3$ – наклонная асимптота.

Пример 8.4.4. Найти асимптоты кривой $y=xe^x$.

Решение

$D(y): x\in(-\infty;+\infty)$.

Точек разрыва II рода нет, значит график функции не имеет вертикальных асимптот.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to\infty}e^x=\infty,\qquad k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x=0.$$

При k_1 (когда $x\to+\infty$) наклонной асимптоты не существует. Найдем $b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right)=(\infty\cdot 0)$. Чтобы вычислить предел, преобразуем выражение xe^x к виду $\dfrac{x}{e^{-x}}$. Тогда получим неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, к которой можно применить правило Лопиталя, а именно: $b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}= \;=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$.

Находим,что $y=0$ – горизонтальная асимптота.

8.5. Схема исследования функции и построение ее графика

Чтобы исследовать функцию и построить ее график необходимо:

1) найти область определения функции;
2) найти точки пересечения графика с осями координат;
3) исследовать функцию на периодичность, четность нечетность;

4) найти точки разрыва и установить их характер;

5) найти интервалы монотонности функции, точки экстремумов и значения функции в этих точках;

6) найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции;

7) найти асимптоты кривой;

8) построить график фукции.

Пример 8.5.1. Исследовать функцию $y = x^3 - 3x^2$ и построить ее график.

Решение

1) Область определения функции $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.

2) Найдем точки пересечения с осью Ox, для чего положим $y = 0$:

$x^3 - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x-3) = 0$, откуда $x_1 = 0,\; x_2 = 3$. Значит, в точках $O(0;0)$ и $A(3;0)$ график пересекает ось Ox.

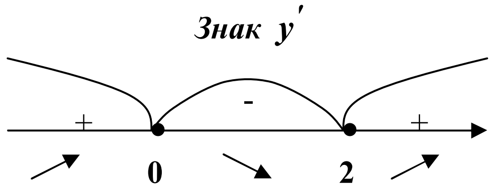
Точки пересечения с осью Oy: положим $x = 0$, тогда найдем $y = 0$. То есть, график пересекает ось Oy в точке $O(0;0)$.

3) Функция не периодическая, она не является четной и не является нечетной $(y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x))$.

4) Функция непрерывна на всей числовой прямой, т.е. точек разрыва не имеет.

5) Исследуем функцию на монотонность и экстремум. Вычислим $y' = 3x^2 - 6x$. Найдем критические точки из уравнения $y' = 0$: $3x^2 - 6x = 0$ или $3x(x-2) = 0$. Получим, что $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Производная существует для всех $x \in (-\infty;\infty)$.



Функция возрастает на интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;\infty)$; функция убывает на интервале $(0;2)$.

Согласно правилу нахождения экстремума, $x = 0$ – точка максимума, $x = 2$ – точка минимума.

Вычислим значения функции в точках экстремума:

$y_{max} = y(0) = 0$, $y_{min} = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = -4$.

Таким образом, экстремальные точки: $O(0;0)$ и $B(2;-4)$.

6) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

$y'' = \left(3x^2 - 6x\right)' = 6x - 6$.

Решим уравнение $y'' = 0:\ 6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ – критическая точка второго рода.

Вторая проиводная существует для всех $x \in (-\infty;\infty)$.

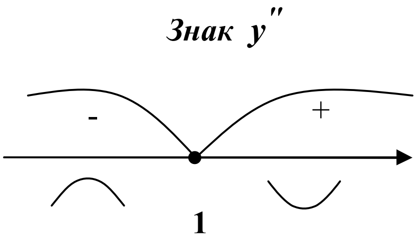


График функции выпуклый на интервале $(-\infty;1)$ и вогнутый на интервале $(1;+\infty)$.

Значение $x = 1$ является абсциссой точки перегиба.

Найдем $y(1) = 1 - 3 = -2$, т.е. точка $C(1;-2)$ – точка перегиба графика.

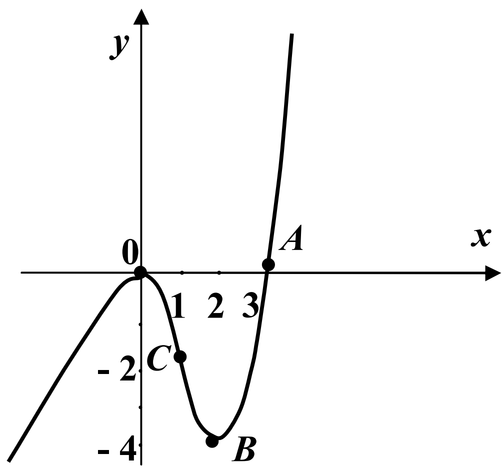
7) Найдем асимптоти данной кривой.

Вертикальних асимптот нет, т.к. нет точек разрыва второго рода. Выясним, имеются ли наклонные асимптоты.

Вычислим $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(3x^2 - 6x\right) = +\infty$.

Значит, кривая не имеет и наклонных асимптот.

8) Построим график функции.



Пример 8.4.2. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Решение

1) Так как данная функция дробно-рациональная, то она не определена в тех точках, где знаменатель равен нулю: $x^2-1=0$, откуда $x_{1,2}=\pm 1$.

Значит, $D(y): x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2) Пусть $y=0$, тогда $\dfrac{x^3}{x^2-1}=0$, откуда $x=0$. Пусть $x=0$, тогда $y=0$.

Значит, график пересекает обе координатные оси в точке $O(0;0)$, т.е. проходит через начало координат.

3) Функция не периодическая.

Функция нечетная, так как $y(-x)=\dfrac{-x^3}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}=-y(x)$.

Ее график симметричен относительно начала координат.

4) Имеем две точки разрыва II-го рода: $x_1=-1$ и $x_2=1$, потому что $\lim\limits_{x\to-1\pm0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty$ и $\lim\limits_{x\to1\pm0}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\pm\infty$.

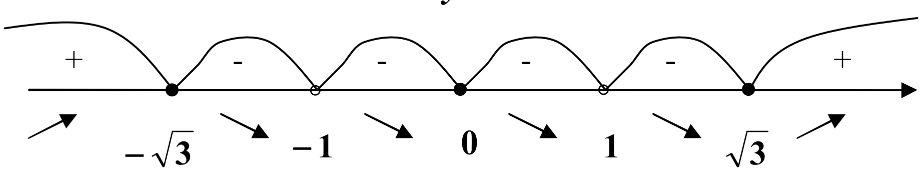
Тогда прямые $x=-1$ и $x=1$ являются вертикальными асимптотами.

5) Найдем $y'=\dfrac{3x^2(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.

Решим уравнение $y'=0: \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}=0$, откуда $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{3}$ – критические точки функции.

Заметим, что производная не существует при $x=\pm1$, но эти точки не входят в область определения функции.

Знак y'



Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$, функция убывает на интервалах $(-\sqrt{3};-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;\sqrt{3})$.

Производная меняет знак при переходе через точки $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$. Имеем: $x_2 = \sqrt{3}$ - точка минимума функции, а $x_3 = -\sqrt{3}$ – точка максимума.

Вычислим $y_{min} = y\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3^3}}{3-1} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $y_{max} = y\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Значит, экстремальные точки $A_1\left(\sqrt{3}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ и $A_2\left(-\sqrt{3}; -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

6) Найдем $y'' = \dfrac{\left(4x^3 - 6x\right)\left(x^2-1\right)^2 - \left(x^4 - 3x^2\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} =$

$$= \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)\cdot\left[\left(2x^2-3\right)\cdot\left(x^2-1\right) - 2x^2\cdot\left(x^2-3\right)\right]}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{2x\cdot\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Решим уравнение $y'' = 0: \dfrac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3} = 0$, откуда $2x\left(x^2+3\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ – критическая точка второго рода.

Заметим, что y'' не существует при $x = \pm 1 \notin D(y)$.

Знак y''

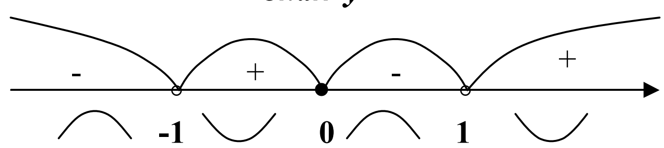


График функции вогнутый на интервалах $(-1;0)\cup(1;+\infty)$, выпуклый на интервалах $(-\infty;-1)\cup(0;1)$. При переходе через $x = 0$ y'' меняет знак. Вычислим $y(0) = 0$. Точка $O(0;0)$ – точка перегиба.

7) Вертикальные асимптоты: $x = \pm 1$.

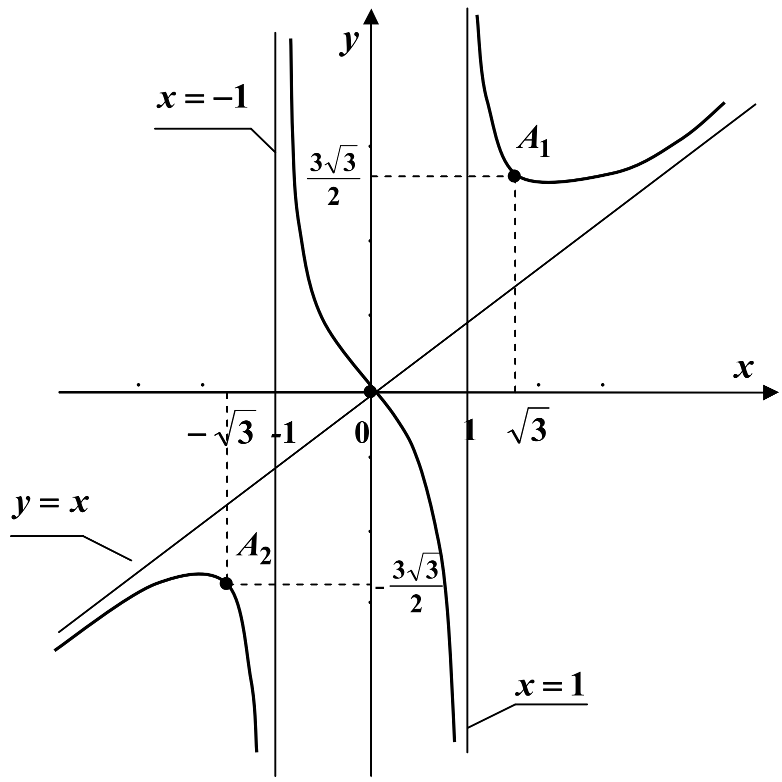
Для наклонных асимптот найдем k и b:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{\left(x^2-1\right)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(y - kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = 0.$$

Значит, уравнение наклонной асимптоты: $y = x$.

8) Построим график функции.



Пример 8.4.3. Исследовать функцию $y = x \cdot e^{-x}$ и построить ее график.

Решение

1) $D(y): x \in (-\infty;+\infty)$.

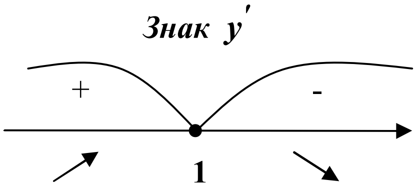
2) Если $x = 0$, то $y = 0$, следовательно, график пересекает ось Oy в точке $O(0;0)$. Если $y = 0$, то $x \cdot e^{-x} = 0$, откуда $x = 0$ ($e^{-x} \neq 0$). Получили ту же точку $O(0;0)$, в которой график пересекает ось Ox. Таким образом, график пересекает координатные оси в начале координат.

3) Функция не периодическая, не является четной или нечетной $\left(y(-x) \neq y(x)\right.$ и $\left.y(-x) \neq -y(x)\right)$.

4) Функция непрерывна в области определения, поэтому точек разрыва не имеет.

5) Вычислим $y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$.

Из условия $y' = 0$ найдем критические точки: $e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - x = 0$, откуда $x = 1$.



Функция возрастает на интервале $(-\infty;1)$ и убывает на интервале $(1;+\infty)$. Очевидно, что $x = 1$ – точка максимума функции.

$$y_{max} = y(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}4.$$

Точка $B\left(1;\frac{1}{e}\right)$ – экстремальная точка функции.

6) Найдем $y'' = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$.

Решим уравнение: $e^{-x}(x-2) = 0$. Так как $e^{-x} \neq 0$, значит $x - 2 = 0$, откуда $x = 2$ – критическая точка второго рода.

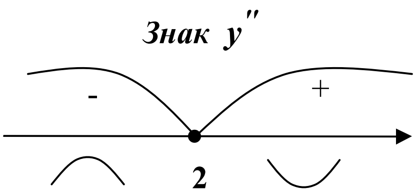


График функции вогнутый на интервале $(2;+\infty)$ и выпуклый на интервале $(-\infty;2)$.

Тогда в точке $x = 2$ функция имеет перегиб.

$$y(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2} \approx 0{,}3.$$

Точка $A\left(2;\frac{2}{e^2}\right)$ – точка перегиба графика функции.

7) Вертикальных асимптот график функции не имеет.

Для наклонных асимптот найдем k и b:

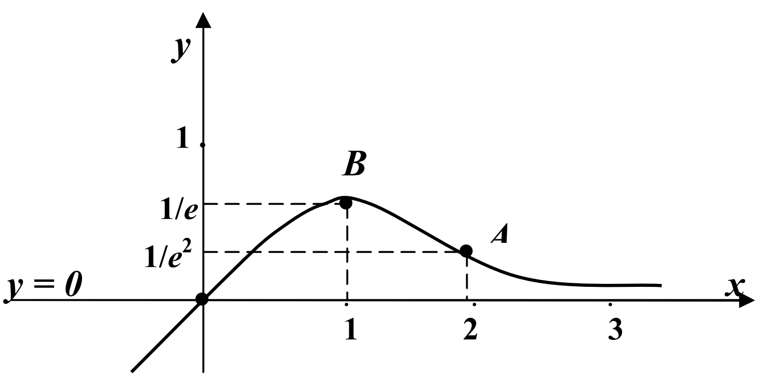
$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y - kx) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$

Поэтому $y = 0$ – прямая, совпадающая с осью $0x$, будет горизонтальной асимптотой.

В случае когда $x \to -\infty$: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x} = +\infty$, поэтому график не имеет асимптот.

8) Строим график.



Задания для самостоятельной работы

Исследовать функции на монотоность и экстремум :

1. $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 2$.

2. $y = 4x^3 - 3x^4 + 1$.

3. $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

4. $y = \frac{x}{x-2}$.

5. $y = 4xe^x$.

6. $y = ln\left(x^2 + 16\right)$.

7. $y = \sqrt[3]{x^2}\left(x - 5\right)$.

8. $y = \sqrt{x - x^2}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на $[a;b]$:

9. $y = 2x^3 + 9x^2 + 1$, $[-1;2]$.

10. $y = x^4 - 18x^2 + 20$, $[-1;2]$.

11. $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 2x^2$, $[-2\,;\,1]$.

12. $y = x - 4\sqrt{x} + 1$, $[1;9]$.

13. $y = e^{x^2 - 2x}$, $[0;3]$.

14. $y = 2tgx - tg^2 x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Найти точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости графиков функций :

15. $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3$;

16. $f(x) = (x+1)\cdot e^{x+1}$;

17. $f(x) = \sqrt[3]{x^5} - 2$;

18. $f(x) = \frac{3x-2}{5x}$;

19. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Найти асимптоты кривых:

20. $y = 12x - x^3$;

21. $y = \frac{x^2}{x+3}$;

22. $y = e^{-x^2}$;

23. $y = \frac{2x}{x+2}$;

24. $y = \frac{ln\,x}{x}$;

25. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

26. $y = \frac{4}{1+x^2}$.

Выполнить полное исследование функций и построить их графики :

27. $y = 2x^4 - x^2 + 1$;

28. $y = \frac{1-x^3}{x^2}$;

29. $y = x^2\sqrt{x-3}$;

30. $y = x^2 - 2\,ln\,x$;

31. $y = \frac{e^x}{x}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
2. Щипачев В.С. Высшая математика: Учеб. для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
4. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис – пресс, 2009. – 576 с.
5. Щипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 2003. –304 с.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 336 с.
7. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика. Приклади і задачі: Посібник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 624 с.

Приложение 1

Области определения и области значений основных элементарных функций

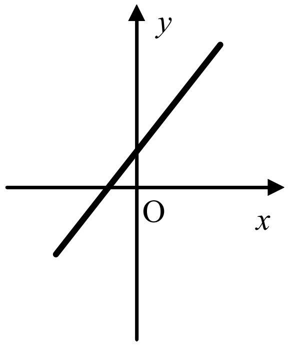
Функция	Область определения	Область значений
$y=x^n$	$(-\infty;+\infty)$	$[0;+\infty)$, n четное $(-\infty;+\infty)$, n нечетное
$y=\dfrac{1}{x^n}$	$(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$	$(0;+\infty)$, n четное $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, n нечетное
$y=\sqrt[n]{x}$	$[0;+\infty)$, n четное $(-\infty;+\infty)$, n нечетное	$[0;+\infty)$, n четное $(-\infty;+\infty)$, n нечетное
$y=\sin x$	$(-\infty;+\infty)$	$[-1;1]$
$y=\cos x$	$(-\infty;+\infty)$	$[-1;1]$
$y=tg\,x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$(-\infty;+\infty)$
$y=ctg\,x$	$(\pi n;\pi+\pi n)$, $n\in Z$	$(-\infty;+\infty)$
$y=\arcsin x$	$[-1;1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$[-1;1]$	$[0;\pi]$
$y=arctg\,x$	$(-\infty;+\infty)$	$\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$
$y=arcctg\,x$	$(-\infty;+\infty)$	$(0;\pi)$
$y=a^x$	$(-\infty;+\infty)$	$(0;+\infty)$
$y=\log_a x$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;+\infty)$

Приложение 2

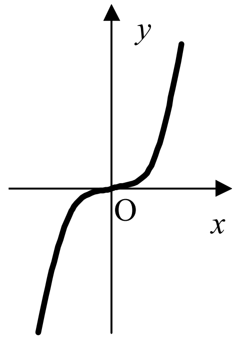
Графики основных элементарных функций

Степенные функции

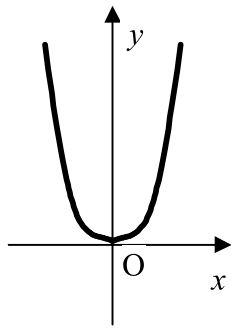
$y = kx + b$



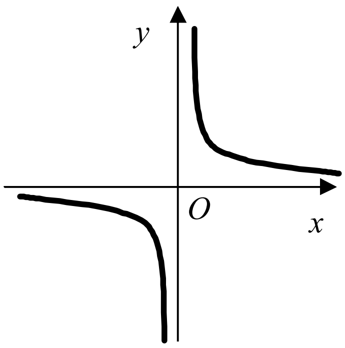
$y = x^3$, $y = x^{2n+1}$



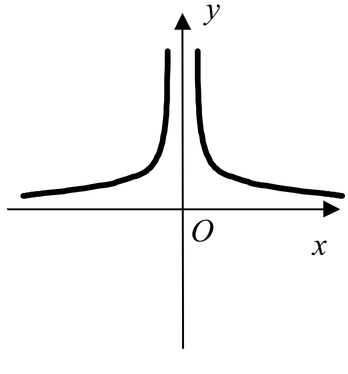
$y = x^2$, $y = x^{2n}$



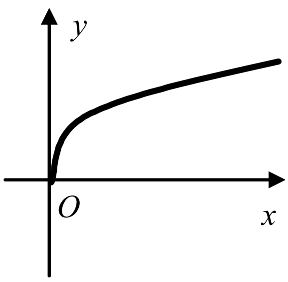
$y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$



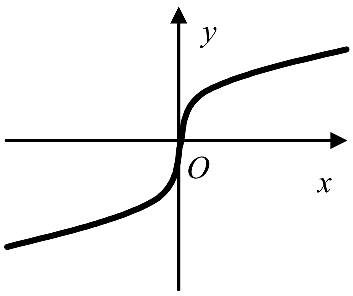
$y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$



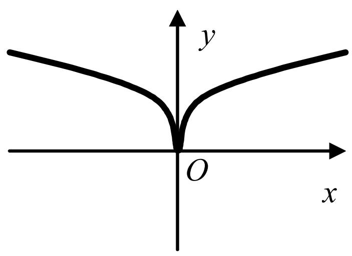
$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[2n]{x}$



$y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[2n+1]{x}$

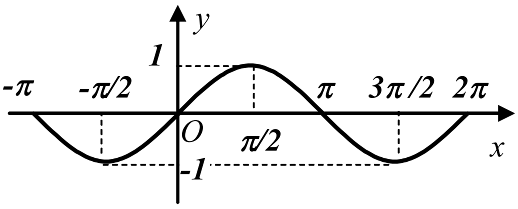


$y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = \sqrt[2n+1]{x^{2m}}$
$(2n + 1 > 2m)$

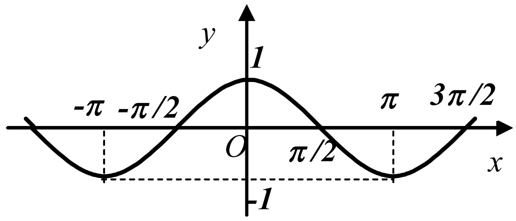


Тригонометрические функции

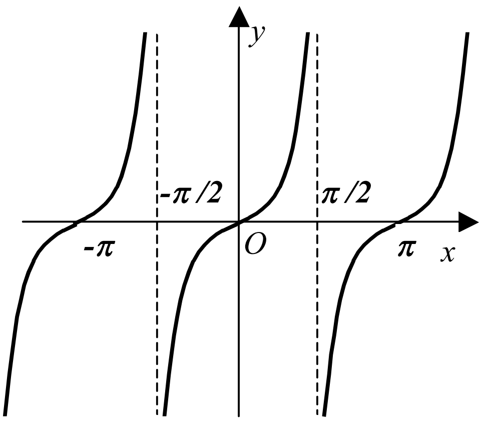
$y = \sin x$



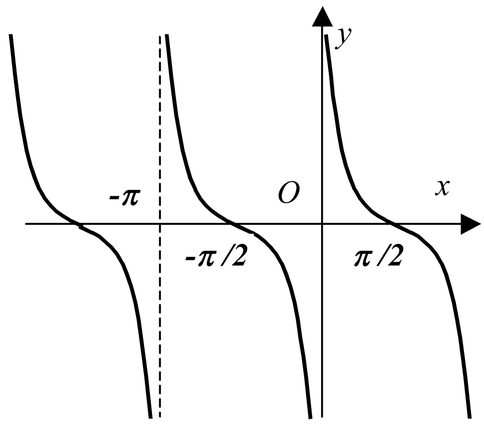
$y = \cos x$



$y = tg\, x$

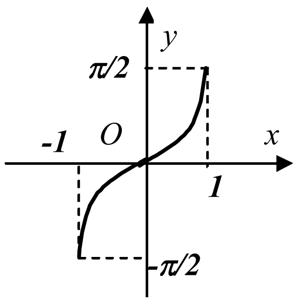


$y = ctg\, x$

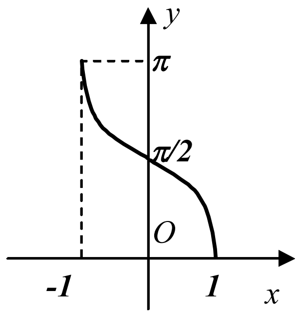


Обратные тригонометрические функции

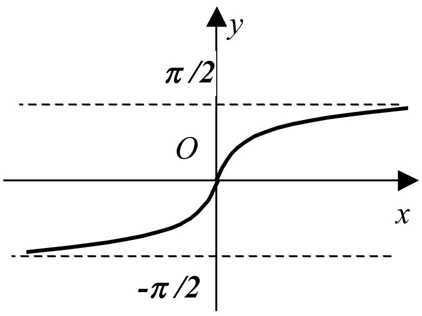
$y = \arcsin x$



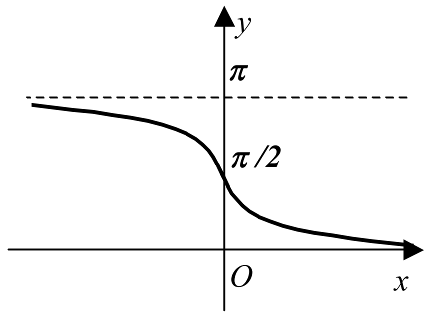
$y = \arccos x$



$y = arctg\, x$

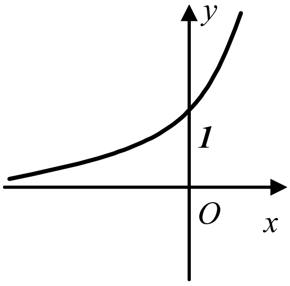


$y = arcctg\, x$

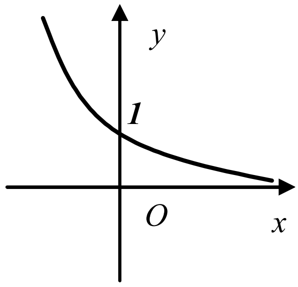


Показательные функции

$y = a^x, a > 1$

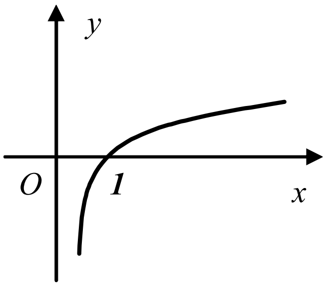


$y = a^x, 0 < a < 1$

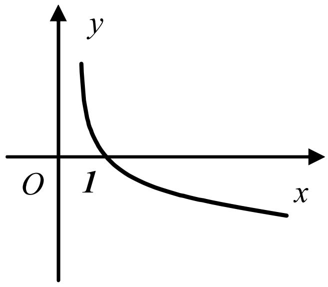


Логарифмические функции

$y = \log_a x, a > 1$



$y = \log_a x, 0 < a < 1$



Приложение 3

СПИСОК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И СЛОВОСОЧЕТАНИЙ НА РУССКОМ И ФРАНЦУЗСКОМ ЯЗЫКАХ

абсолютная величина – absolue valeur

аргумент – argument

асимптота – asymptote

~ **вертикальная –** asymptote vertical

~ **горизонтальная –** asymptote horizontal

~ **наклонная –** asymptote incline

бесконечность – infini

бесконечно малый – infinitesimal

бесконечно большой – infiniment grand

включительно – inclusivement

возрастать – croitre

вогнутый – concave

выпуклый – convexe

вычислять – calculer

геометрический смысл –le sens géométrique

график – diagramme; graphique

движение – mouvement

дифференциал – différentielle

дифференцирование – dérivation; différentiation

доказать – demontrer

достаточно – sufrire

дробь – fraction

зависимая переменная – dépendant variable

закон – loi; principe; règle

значение – valeur

интервал – intervalle

исследовать – examiner, analyser, etudier

касательная – tangente

координата – coordonnée

коэффициент – coefficient

линия – ligne

логарифм – logarithme
максимум – maximum
меньше– moins
механический смысл –le sens mecanique
минимум – minimum
многочлен – polynôme
множество – ensemble
множество значений – ensemble de valeurs
наибольший – le plus grand
наименьший – le moindre, minimum
найти – trouvei
независимый – indépendant
неопределенность – indétermination
необходимо – il est nécessaire
непрерывный – continu
непрерывность – continuité
неравенство – inégalité
нормаль – normale
область определения – domaine de définition, ensemble de définition
обозначать – désigner
ограниченный – limite
окрестность – voisinage
определение – détermination
отрезок – segment
отношение – relation; rapport
отрицательный – négatif
параметр – paramétre
переменная – variable
период – période
положительный – positif
построить график функции – construire le graphique de la fonction
предел – limite
~ **конечный –** limite fini; limite final
~ **односторонний –** limite unilatéral

~ **слева** – limite à gauche
~ **справа** – limite à droite
преобразование – conversion; transformation
пример – exemple; exercice
принадлежать – appartenir
приближенное равенство – approximativement
приращение – accroissement; incrément
прогрессия – progression
~ **арифметическая** – progression arithmétique
~ **геометрическая** – progression géométrique
произвольный – volontaire, n'importe quel, tout
производная – dérivée
промежуток – intervalle , segment
равенство – egalite
равняется – egal
равносильный – identique
разрыв – discontinuité
расстояние – distance
рациональность – rationnalité
решение – résolution; solution
свойство – propriété
секущая – sécante
симметричный – symétrique
скачок функции – sout de la fonction
скорость – vitesse
~ **мгновенная** – vitesse momentané, vitesse instantané
~ **средняя** – vitesse moyen
следовательно – donc
сократить – réduire
соответственный – correspondant; conforme; corrélatif
степень – puissance, degré
~ **старшая** – principal puissance
сравнивать – comparer, confronter
стремиться – tendre
существовать – exister, subsister, vivre

таблица – table
теорема – théorème
точка – point
~ **критическая –** point critique
~ **перегиба –** point d'inflexion
~ **разрыва –** point de la rupture
убывать – décrootre
уравнение – équation
функция – fonction
~ **дифференцируемая –** fonction dérivable
~ **линейная –** fonction linéaire
~ **логарифмическая –** fonction logarithmique
~ **непрерывная –** fonction continue
~ **неявная –** fonction implicite
~ **нечетная –** fonction impair
~ **обратная –** fonction inverse
~ **параметрическая –** fonction paramétrique
~ **показательная –** fonction exponentiel
~ **периодическая –** fonction périodique
~ **рациональная –** fonction rationnel
~ **сложная –** fonction composé (complexe; compliqué)
~ **тригонометрическая –** fonction trigonometrique
~ **четная –** fonction paire
~ **элементарная –** fonction élémentaire
формула – formule
число – nombre
~ **действительное –** nombre réel
~ **иррациональное –** nombre irrationnel
~ **натуральное –** nombre naturel
~ **отрицательное –** nombre négatif
~ **положительное –** nombre positif
~ **рациональное –** nombre rationnel
экстремум – extrémum

Приложение 4

СПИСОК МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И СЛОВОСОЧЕТАНИЙ НА РУССКОМ И АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКАХ

абсолютная величина – absolute value

аргумент – argument, independent, variable

асимптота – asymptote

~ вертикальная – asymptote vertical

~ горизонтальная – asymptote horizontal

~ наклонная – asymptote inclined, asymptote sloping

бесконечность – infinity

бесконечно малый – infinitesimal

бесконечно большой – infinitely big

включительно – inclusively, inclusive

возрастать – increase

вогнутый – concave

выпуклый – convex, bulging, prominent, distinct

вычислять – compute, calculate

геометрический смысл – geometric sense

график – graph, diagram, chart, schedule

движение – movement

дифференциал – differential

дифференцирование – differentiation

доказать – argue, prove, demonstrate

достаточно – sufficiently

дробь – fraction

зависимая переменная – dependent variable

закон – law, principle

значение – value, meaning, significance, valuation

интервал – interval

исследовать – examine

касательная – tangent

координата – coordinate

коэффициент – coefficient

линия – line
логарифм – logarithm
максимум – maximum
меньше –less
механический смысл –mechanical sense
минимум – minimum
многочлен – polynomial
множество – set, aggregate, collection, ensemble
множество значений – range of function
наибольший – greatest, largest
наименьший – the least
найти – find
независимый – independent
неопределенность – indeterminacy, uncertainty
необходимый – necessary
непрерывный – continuous
непрерывность – continuity
неравенство – inequality
нормаль – normal
область определения – range of definition
обозначать – designate, denote
ограниченный – bounded, limited, restricted
окрестность – neighbourhood
определение – definition, determination
отрезок – segment, interval
отношение – ratio, quotient, relation
отрицательный – negative
параметр – parameter
переменная – variable, argument
период – period
положительный – positive, affirmative
построить график функции – to construct the function's graph
предел – limit
~ конечный – limit final, limit finite
~ односторонний – limit unilateral

~ слева – left-side limit

~ справа – right-side limit

преобразование – transformation, conversion, processing

пример – example, instance

принадлежать – belong, pertain (to)

приближенное равенство – approximate

приращение – increment, increase

прогрессия – progression

~ арифметическая – progression arithmetic

~ геометрическая – progression geometric

произвольно – at will

производная – derivative

промежуток – interval, span, gap

равенство – equality

равняется – alike, equal (to)

равносильный – equivalent

разрыв – break, gap, discontinuity

расстояние – distance, separation (of a lens), spread

рациональность – rationality

решение – solution, decision, determination

свойство – property, character

секущая – secant, transversal

симметричный – symmetric(al)

скачок функции – function's jump

скорость – speed, velocity, rate

~ мгновенная – speed instantaneous

~ средняя – speed mean

следовательно – consequently, hence, therefore

сократить – shorten, reduce, cancel, contract

соответствовать – correspond (to), conform(to)

степень – power, degree, extent

~ старшая – higher power

сравнивать – compare

стремится – tend to

существовать – exist, be in existence

таблица – table, list, array, plate

теорема – theorem

точка – point

~ **критическая** – critical point

~**перегиба** – point of inflexion

~**разрыва** – point of discontinuity

убывать – decrease, diminish

уравнение – equation

функция – function

~ **линейная** – linear function

~ **логарифмическая** – logarithmic function

~ **непрерывная** – continuous function

~ **неявная** – implicit function

~ **нечетная** – odd function

~ **обратная** – inverse function

~ **параметрическая** – parametric function

~ **показательная** – exponential function

~ **периодическая** – repeating function

~ **рациональная** – rational function

~ **степенная** – power function

~ **сложная** – composite function

~ **тригонометрическая** – trigonometric function

~ **четная** – even function

~ **элементарная** – elementary function

формула – formula

число – number, quantity, integer

~ **действительное** – real integer

~ **иррациональное** – irrational integer

~ **натуральное** – positive integer

~ **отрицательное** – negative integer

~ **положительное** – positive (affirmative) integer

~ **рациональное** – rational number

экстремум – extreme

Учебное издание

Кагадий Лариса Петровна
Шинковская Ирина Леонидовна
Заец Ирина Петровна
Сушко Лариса Федоровна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Часть I

Учебное пособие

Тем. план 2014, поз.

Подписано к печати . Формат 60x84 $_{1/16}$ Бумага печат. Печать плоская.
Учетно-изд. листов . Услов. печат. лист. . Тираж экз. Заказ № .

Национальная металлургическая академия Украины
49600, г. Днепропетровск – 5, пр. Гагарина, 4

Редакционно-издательский отдел НМетАУ