МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

РОБОЧА ПРОГРАМА,

методичні вказівки та індивідуальні завдання
до вивчення дисципліни «Вища математика-2»
для студентів спеціальностей
141 - електроенергетика, електротехніка та електромеханіка
(ліквідація академрізниці)

Контрольна робота

Дніпро НМетАУ 2017

Склав к.т.н., доц. Копорулін В.Л.

ЗМІСТ

ВСТУП

Вища математика без перебільшення є однією з найважливіших складових практично усіх природознавчих і технічних дисциплін. Тому її вивчення вкрай важливе для фундаментальної фахової підготовки сучасного інженера.

Аудиторні заняття, які проводяться для ліквідації студентами академрізниці, носять переважно оглядовий характер. Їх мета – створити уяву щодо загальної схеми побудови даного розділу математики, ознайомити з основними теоретичними відомостями і методами розв’язання типових задач. Головною ж формою навчання є самостійна робота. Вивчення теоретичних положень доцільно супроводжувати самостійним розв’язанням відповідних задач і лише після вироблення достатніх практичних навичок приступати до виконання завдань контрольної роботи. Необхідні консультації протягом навчального семестру надаються викладачами академії згідно із затвердженим розкладом.

Сьогодні в Інтернеті неважко знайти величезну кількість літератури з будь-якої теми, в тому числі і з вищої математики. Тому до списку рекомендованої літератури увійшли лише деякі з джерел. Рекомендації щодо їх використання дані у методичних вказівках до виконання контрольної роботи. Консультації відносно інших підручників студент може отримати у викладача.

Р О Б О Ч А   П Р О Г Р А М А

навчальної дисципліни
«ВИЩА МАТЕМАТИКА-2»

ІІІ семестр

Кількість годин: 90

Кількість кредитів: 3

Кількість контр. робіт: 1

Форма звітності: екзамен

Зміст програми

1. Ряди та інтеграл Фур’є

1. Періодичні процеси. Гармонічні коливання. Тригонометричний ряд та його властивості. Гармонічний аналіз.

2. Тригонометричний ряд Фур’є. Теорема збіжності ряду Фур’є. Умови Діріхле.

3. Розвинення в ряд Фур’є періодичних функцій на основному і довільному проміжках. Ефект Гіббса. Особливості рядів Фур’є парних і непарних функцій.

4. Розвинення в ряд Фур’є неперіодичних функцій.

5. Ряд Фур’є в комплексній формі. Поняття інтеграла Фур’є. Інтеграл Фур’є парних і непарних функцій. Комплексна форма інтеграла Фур’є.

6. Перетворення Фур’є.

2. Елементи операційного числення

7. Перетворення Лапласа: основні поняття і означення. Властивості перетворення Лапласа та їх застосування. Таблиця зображень деяких основних функцій.

8. Способи відновлення оригінала за зображенням. Розв’язання задач Коші для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і систем таких рівнянь операційним методом.

3. Основи теорії ймовірностей випадкових подій

9. Елементи комбінаторики: переставлення, розміщення, сполучення, загальні правила.

10. Основні поняття теорії ймовірностей: випадкові події, їх види та дії над ними, ймовірність випадкової події. Класична ймовірність. Статистична та геометрична ймовірності.

11. Умовна ймовірність. Теореми додавання і множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Ймовірності гіпотез. Формули Байєса.

12. Повторення незалежних випробувань: біноміальна формула Бернуллі, локальна формула Муавра-Лапласа, формула Пуассона, інтегральна формула Муавра-Лапласа.

4. Основи теорії ймовірностей випадкових величин

13. Одновимірні випадкові величини, їх типи. Закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин: ряд та многокутник розподілу, інтегральна та диференціальна функції розподілу.

14. Числові характеристики випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

15. Деякі найважливіші закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин: геометричний, біномний, Пуассона, рівномірний, показниковий. Нормальний розподіл (закон Гаусса).

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Підручники і навчальні посібники

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.

2. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 228 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: Учеб. пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 176 с.

7. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч.2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К.: Техніка, 2000. – 792 с.

8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

9. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

10. Решебник. Высшая математика. Специальные разделы / В.И. Афанасьев и др.; под ред. А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 400 с.

11. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч. 3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 596 с.

12. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов. – М.: Юрайт, Высшее образование, 2009. – 480 с.

13. Эйдерман В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

Збірники задач

14. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П. Дубовика, І.І. Юрика. – К.: А.С.К., 2004. – 480 с.
15. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2002. – 405 с.
16. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 336 с.
17. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу и др.; под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.
18. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 3: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 576 с.
19. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 4: Учеб. пособие для втузов / Под общ. ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА

Виконання контрольної роботи треба починати з вивчення теоретичних положень за наведеними посиланнями, причому це необхідно поєднувати з самостійним розв'язанням рекомендованих задач. До виконання контрольних завдань доцільно приступати тільки після вироблення достатніх практичних навичок. Типові приклади наведені з метою допомогти в цьому.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ

Рекомендується (скориставшись одним або двома з наведених нижче джерел)

– вивчити теоретичні положення за **[1]**, гл. 1, 2, 3 (§§ 3.1-3.4), 4, 5, 6 (§§ 6.1-6.3); **[2]**, гл. 6; **[3]**, гл. 1-7, 8 (§§ 1-7), 11, 12 (§§ 1-7), 13; **[5]**, гл. 9, §§ 3-4; **[7]**, гл. 3, §§ 3.1-3.11, 5.1-5.4, 6.1, 6.3; **[8]**, гл. XV, XVIII; **[9]**, гл. 1, гл. 2, §§ 2.1-2.5 ; **[12]**, гл. 14, § 7; **[13]**, гл. VIII;

– розібрати розв’язання задач у **[4]**, гл. III, §§ 8-9, гл. V, §§ 1-6, 8-11, 14, гл. VIII, §§ 1-4; **[6]**, гл. 1, § 1, пр. 1-24, § 2, пр. 1-3, § 4; **[10]**, гл. 2, 6 (§§ 6.1-6.15); **[11]**, гл. 2, § 3; **[13]**, гл. IX, § 33, №№ 33.36-33.41;
– самостійно розв’язати задачі: **[4]**, №№ 489, 492, 497, 500, 505, 506, 812-814, 832, 834, 837, 843, 846, 859, 866, 870, 871, 874, 883, 886, 898, 906, 912, 932, 1112, 1118, 1125, 1126, 1143, 1146, 1148, 1149; **[14]**, гл. 9, №№ 382, 384, 391, 403, 438, 442, 450, 451; **[15]**, №№ 5, 21, 28, 45, 51, 57, 82, 85, 93, 94, 99, 101, 112, 121, 126, 133, 146, 171, 173, 180, 193, 211, 220, 257, 260, 269, 272, 276, 296, 309, 329, 351; **[16]**, №№ 2552, 2560, 2563, 2570; **[17]**, №№ <u>1.4.</u>10, 12, 18, 21-б, 23-б, 25, 29, <u>6.1.</u>4, 6, 12, 18, 23, 24, <u>6.3.</u>4, 5, 6, 18, <u>6.4.</u>4, 14, 16, 24, 35, <u>6.5.</u>3, 5, 10, <u>6.6.</u>5, <u>6.7.</u>4, 10, 16, <u>6.8.</u>4, 9, <u>6.9.</u>4, 8, <u>6.10.</u>3, 4, <u>6.11.</u>2, 3, 4, 8, 59, <u>8.1.</u>2, 3, 6, 8, 10, 13, 23-31, 43, 54, 61, 62, 64, 67, <u>8.2.</u>2-7, 10, 12-а,б, 13, 14, <u>8.3.</u>4, 5, 9, 17, 38, 48, 49; **[18]**, гл. 14, №№ 1-9, 17, 18, 19, 25, 32, 34, 40, 44, 45, 47, 48, 74 -76, 79, 86,87, 93, 94, 111, 113, 114, 131; **[19]**, гл. 18, №№ 66, 68, 78, 84, 87, 164, 191, 196, 226, 244, 258-260, 271, 312, 352, 361, 364.

<u>Приклад 1.</u> Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x)=\begin{cases} x/3, & -3\le x\le 0, \\ 3-x, & 0<x\le 3 \end{cases}$, задану на проміжку, довжина якого дорівнює періоду.

Розв’язання. Графік функції наведений на рис. 1. Судячи з умови, період функції $T=2l=6$, тобто напівперіод $l=3$. Функція $f(x)$ не є ані парною, ані непарною, і на проміжку $[-3, 3]$, де вона задана, неперервна, за винятком однієї точки розриву першого роду $x=0$. Отже, $f(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле. Тому відповідний ряд Фур’є

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

де $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$,

збігається в кожній точці $x\in(-l, l)$, причому сума ряду $S(x)=f(x)$ у точках неперервності функції $f(x)$, $S(x)=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{t\to x+0} f(t)+\lim\limits_{t\to x-0} f(t)\right]$ у точках розриву, $S(\pm l)=\dfrac{1}{2}\left[\lim\limits_{t\to -l+0} f(t)+\lim\limits_{t\to l-0} f(t)\right]$ на кінцях інтервалу $(-l, l)$.

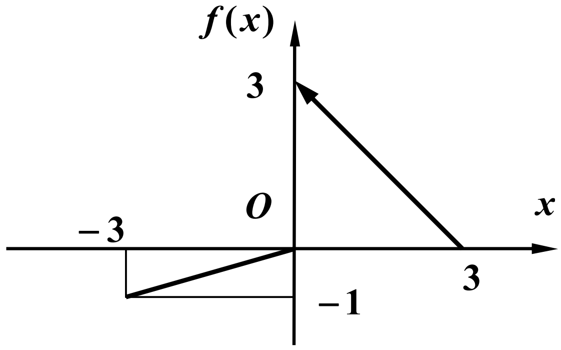

Рис. 1

Обчислимо коефіцієнти ряду:

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}\frac{x}{3}dx+\int_{0}^{3}(3-x)\,dx\right]=1,$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}\frac{x}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{0}^{3}(3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{3x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{0}+\left[\frac{3}{n\pi}(3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\right]\Bigg|_{0}^{3}\right\}=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,\end{cases}\quad (k=1, 2, ...),$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}\frac{x}{3}\sin\frac{n\pi x}{3}dx+\int_{0}^{3}(3-x)\sin\frac{n\pi x}{3}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{3x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}+\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{0}+\left(-\frac{3}{n\pi}(3-x)\cos\frac{n\pi x}{3}-\frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)\Bigg|_{0}^{3}\right]=$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[3-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{k\pi}, & n = 2k, \\ \dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad (k = 1, 2, ...).$$

Отже, враховуючи *тільки ненульові* члени ряду, одержуємо, що задана функція в точках її неперервності подається у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{3} + \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{3} + \frac{1}{k\pi}\sin\frac{2k\pi x}{3}.$$

В точці розриву $x = 0$ значення суми ряду

$$S(0) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0-0} f(x) + \lim_{x\to 0+0} f(x)\right] = \frac{1}{2}[0+3] = \frac{3}{2},$$

а в межових точках $x = \pm 3$ воно є

$$S(\pm 3) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -3+0} f(x) + \lim_{x\to 3-0} f(x)\right] = \frac{1}{2}[-1+0] = -\frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Кусково-гладка і абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$ функція $f(x)$ може бути подана у вигляді *інтеграла Фур'є*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left[A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x\right] d\alpha,$$

де $A(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\, dt$, $B(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\, dt$.

Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 2. Функція ані парна, ані непарна (загального типу).

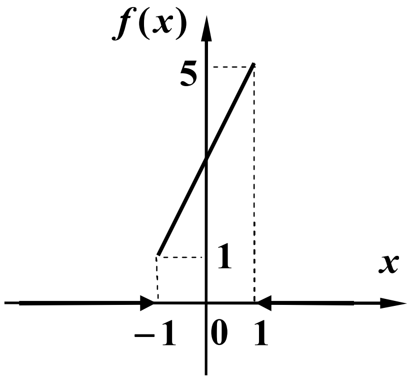

Рис. 2

Переконаємось, що $f(x)$ абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^{1} (2x+3)dx + \int_{1}^{+\infty} 0 \cdot dx = 0 + (x^2+3x)\Big|_{-1}^{1} + 0 = 6 < \infty .$$

Задана функція кусково-гладка на $(-\infty, +\infty)$. Це випливає з того, що $f'(x) = \begin{cases} 2, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ скінченна на кожному з проміжків. Отже, задану функцію справді можна зобразити інтегралом Фур'є. Знайдемо $A(\alpha)$ та $B(\alpha)$.

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(2t+3)\cos\alpha t\, dt = \left| \begin{matrix} u = 2t+3, & dv = \cos\alpha t dt, \\ du = 2dt, & v = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha t \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2t+3}{\alpha}\sin\alpha t \Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{\alpha}\int_{-1}^{1}\sin\alpha t\, dt \right) = \frac{1}{\pi}\left(6\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\cos\alpha t \Big|_{-1}^{1} \right) = 6\,\frac{\sin\alpha}{\pi\alpha},$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(2t+3)\sin\alpha t\, dt = \left| \begin{matrix} u = 2t+3, & dv = \sin\alpha t dt, \\ du = 2dt, & v = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha t \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2t+3}{\alpha}\cos\alpha t \Big|_{-1}^{1} + \frac{2}{\alpha}\int_{-1}^{1}\cos\alpha t\, dt \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4}{\alpha}\cos\alpha + \frac{2}{\alpha^2}\sin\alpha t \Big|_{-1}^{1} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{\alpha^2}\sin\alpha - \frac{4}{\alpha}\cos\alpha \right) = \frac{4}{\pi\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha \right).$$

Отже, інтеграл Фур’є заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[6\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\alpha x + \frac{4}{\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha \right)\sin\alpha x \right] d\alpha .$$

У точках розриву $x^* = \pm 1$ інтеграл Фур'є дорівнює

$$\frac{1}{2}\Big[f(x^*-0)+f(x^*+0)\Big].$$

<u>Приклад 3.</u> Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}, & -2\le x<0,\\ e^{-x}, & 0<x\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$$

Розв'язання. Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 3.

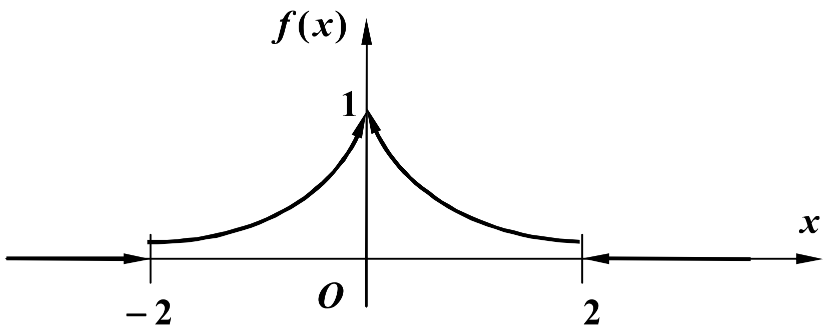

Рис. 3

Задана функція кусково-гладка і абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$, оскільки

похідна $f'(x)=\begin{cases} e^{x}, & -2\le x<0,\\ -e^{-x}, & 0<x\le 2,\\ 0, & |x|>2\end{cases}$ скінченна на кожному з проміжків і

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-2}0\cdot dx+\int\limits_{-2}^{0}e^{x}dx+\int\limits_{0}^{2}e^{-x}dx+\int\limits_{2}^{+\infty}0\cdot dx=\ 0+e^{x}\Big|_{-2}^{0}-e^{-x}\Big|_{0}^{2}+0=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{e^{2}}\right)<\infty.$$

Задана функція *парна*, отже, її можна подати інтегралом Фур'є у вигляді

$$f(x)=\int\limits_{0}^{+\infty}A(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha,$$

де $A(\alpha)=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt$. Отже,

$$A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2} e^{-t}\cos\alpha t dt=\frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{-t}}{1+\alpha^2}\left(-\cos\alpha t+\alpha\sin\alpha t\right)\right]\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\alpha^2}\left(\frac{-\cos 2\alpha+\alpha\sin 2\alpha}{e^2}+1\right).$$

Зауваження. Інтеграл $\int e^{-t}\cos\alpha t\,dt$ відноситься до так званих “циклічних” інтегралів, що беруться по частинах. Тут ми використали формулу первісної $\int e^{ax}\cos bx dx=\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$.

Таким чином, інтеграл Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{2}{\pi e^2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+e^2}{1+\alpha^2}\cos\alpha x\,d\alpha.$$

__Приклад 4.__ Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & -2\le x<0,\\ -e^{-x}, & 0<x\le 2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$$

Розв’язання. Ескіз графіка заданої функції наведений на рис. 4.

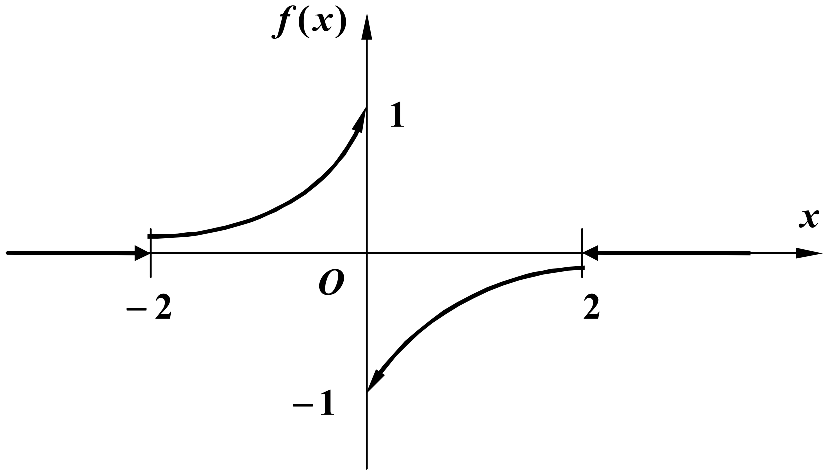

Рис. 4

Задана функція кусково-гладка і абсолютно інтегровна на $(-\infty, +\infty)$, оскільки похідна $f'(x) = \begin{cases} e^x, & -2 \le x < 0, \\ e^{-x}, & 0 < x \le 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$ скінченна на кожному з проміжків і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{-2} 0 \cdot dx + \int_{-2}^{0} e^x dx + \int_{0}^{2} e^{-x} dx + \int_{2}^{+\infty} 0 \cdot dx = 0 + e^x \Big|_{-2}^{0} - e^{-x} \Big|_{0}^{2} + 0 =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) < \infty .$$

Задана функція *непарна*, отже, її можна подати інтегралом Фур'є у вигляді

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} B(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha ,$$

де $B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt$. Отже,

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt = -\frac{2}{\pi} \int_{0}^{2} e^{-t} \sin \alpha t \, dt = -\frac{2}{\pi} \left[\frac{e^{-t}}{1+\alpha^2} \left(-\sin \alpha t - \alpha \cos \alpha t \right) \right] \Bigg|_{0}^{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\alpha^2} \left(\frac{\sin 2\alpha + \alpha \cos 2\alpha}{e^2} - \alpha \right).$$

Зауваження. Використана формула первісної "циклічного" інтеграла

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) .$$

Таким чином, інтеграл Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi e^2} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha + \alpha \cos 2\alpha - \alpha e^2}{1+\alpha^2} \sin \alpha x \, d\alpha .$$

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ задана лише на півосі $(0, +\infty)$, то її можна продовжити на всю вісь $(-\infty, +\infty)$ парним або непарним способом за наведеними вище формулами.

Приклад 5. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$.

Розв'язання. Якщо функція $f(x)$ така, що подається інтегралом Фур'є , то в кожній точці, де $f(x)$ диференційовна, існує функція

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx,$$

яка називається *перетворенням Фур'є функції* $f(x)$.

Задана функція кусково-гладка на $(-\infty,+\infty)$, оскільки $f'(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ скінченна на кожному скінченному відрізку $[-l,l]$ числової осі. Переконаємось далі, що $f(x)$ абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{1}xdx=-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{1}=1<\infty.$$

Отже, перетворення Фур'є існує і за наведеною формулою

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\int_{-1}^{0}xe^{-i\alpha x}dx+\int_{0}^{1}xe^{-i\alpha x}dx\right).$$

Інтегруючи частинами, одержимо

$$-\int_{-1}^{0}xe^{-i\alpha x}dx=e^{-i\alpha x}\left(\frac{x}{i\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=-\frac{1}{\alpha^2}+e^{-i\alpha}\left(\frac{1}{i\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right),$$

$$\int_{0}^{1}xe^{-i\alpha x}dx=-e^{-i\alpha x}\left(\frac{x}{i\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\Bigg|_{0}^{1}=-e^{-i\alpha}\left(\frac{1}{i\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}\right)-\frac{1}{\alpha^2}.$$

Підсумовуючи значення обох інтегралів, отримуємо $F(\alpha)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cdot\dfrac{e^{-i\alpha}-1}{\alpha^2}$.

Приклад 6. Знайти косинус- та синус-перетворення Фур'є функції

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & x>\pi\end{cases}.$$

Розв'язання. Якщо функція $f(x)$ кусково-гладка і абсолютно інтегровна на півосі $(0,+\infty)$, то існують функції

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,dx \quad \text{та} \quad F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x\,dx,$$

які називаються відповідно *косинус-перетворенням* та *синус-перетворенням Фур'є* функції $f(x)$.

Задана функція задовольняє вказані умови. Отже,

$$F_c(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin x\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}[\sin(1-\alpha)x+\sin(1+\alpha)x]\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\cos(1-\alpha)x}{1-\alpha}+\frac{\cos(1+\alpha)x}{1+\alpha}\right]\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\cos(1-\alpha)\pi}{1-\alpha}+\frac{\cos(1+\alpha)\pi}{1+\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{1+\alpha}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\cos\pi\alpha}{1-\alpha}+\frac{\cos\pi\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\cos\pi\alpha+1}{1-\alpha^2},$$

$$F_s(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin x\sin\alpha x\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi}[\cos(1-\alpha)x-\cos(1+\alpha)x]\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(1-\alpha)x}{1-\alpha}-\frac{\sin(1+\alpha)x}{1+\alpha}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin(1-\alpha)\pi}{1-\alpha}-\frac{\sin(1+\alpha)\pi}{1+\alpha}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin\pi\alpha\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{1}{1+\alpha}\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin\pi\alpha}{1-\alpha^2}.$$

Приклад 7. Знайти зображення функції $f(t)=te^{3t}\eta(t-2)$.

Розв'язання. Розглянемо два способи.

Перший спосіб. Перетворимо тотожно задану функцію:

$$f(t)=te^{3t}\eta(t-2)=te^{3(t-2+2)}\eta(t-2)=e^6te^{3(t-2)}\eta(t-2).$$

Оскільки $e^{3t}\to\dfrac{1}{p-3}$, то за теоремою запізнювання $e^{3(t-2)}\eta(t-2)\to\dfrac{1}{p-3}e^{-2p}$,

а за теоремою про диференціювання зображення

$$te^{3(t-2)}\eta(t-2)\to-\left(\frac{1}{p-3}e^{-2p}\right)'=-\left[-\frac{1}{(p-3)^2}e^{-2p}-2\frac{1}{p-3}e^{-2p}\right]=$$

$$= e^{-2p}\left[\frac{1}{(p-3)^2}+\frac{2}{p-3}\right].$$ З урахуванням лінійності перетворення Лапласа

остаточно маємо $F(p)=e^{-2p+6}\left[\frac{1}{(p-3)^2}+\frac{2}{p-3}\right]$.

Другий спосіб. Перетворимо тотожно задану функцію дещо по іншому:

$$f(t)=te^{3t}\eta(t-2)=(t-2+2)e^{3t}\eta(t-2)=e^{3t}(t-2)\eta(t-2)+2e^{3t}\eta(t-2)=$$

$$=e^{3t}\big[(t-2)\eta(t-2)+2\eta(t-2)\big].$$

Оскільки $t\to\frac{1}{p^2}$, $1\to\frac{1}{p}$, то за теоремою запізнювання $(t-2)\eta(t-2)\to\frac{1}{p^2}e^{-2p}$, $\eta(t-2)\to\frac{1}{p}e^{-2p}$. Тоді за теоремою зміщення з урахуванням лінійності перетворення Лапласа одержуємо

$$F(p)=\frac{1}{(p-3)^2}e^{-2(p-3)}+\frac{2}{p-3}e^{-2(p-3)}.$$

<u>Приклад 8.</u> Знайти зображення функції $f(t)=\frac{e^{-2t}\sin^2 3t}{t}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2 3t=\frac{1-\cos 6t}{2}$, то за теоремою зміщення та властивістю лінійності перетворення Лапласа маємо

$$e^{-2t}\sin^2 3t\to\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+2}-\frac{p+2}{(p+2)^2+36}\right].$$

Тоді за теоремою про інтегрування зображення

$$f(t)=\frac{e^{-2t}\sin^2 3t}{t}\to\int_p^{+\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{q+2}-\frac{q+2}{(q+2)^2+36}\right]dq=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\Big[\ln|q+2|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\big[(q+2)^2+36\big]\Big]\Big|_p^B=\frac{1}{2}\lim_{B\to+\infty}\ln\frac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}}-\frac{1}{2}\ln\frac{p+2}{\sqrt{(p+2)^2+36}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(p+2)^2+36}{(p+2)^2}$$ (тут враховано, що $\lim\limits_{B\to+\infty}\ln\frac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}}=$

$$= \ln \lim_{B \to +\infty} \frac{B+2}{\sqrt{(B+2)^2+36}} = \ln 1 = 0 \text{).}$$

<u>**Приклад 9.**</u> Знайти зображення функції $f(t) = \int\limits_0^t \tau^3 e^{\tau} d\tau$.

Розв'язання.

Оскільки $t^3 \to \frac{3!}{p^4}$, то за теоремою зміщення $t^3 e^t \to \frac{3!}{(p-1)^4}$ (інакше: оскільки $e^t \to \frac{1}{p-1}$, то за теоремою про диференціювання зображення $t^3 e^t \to (-1)^3 \left(\frac{1}{p-1} \right)''' = \frac{6}{(p-1)^4}$). Тоді за теоремою про інтегрування оригіналу

$$f(t) = \int\limits_0^t \tau^3 e^{\tau} d\tau \to \frac{6}{p\,(p-1)^4}.$$

<u>**Приклад 10.**</u> Знайти зображення імпульсної функції $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 3, \\ h, & 3 \le t < 5, \\ 0, & t \ge 5. \end{cases}$

Розв'язання. Графік функції наведений на рис. 5.

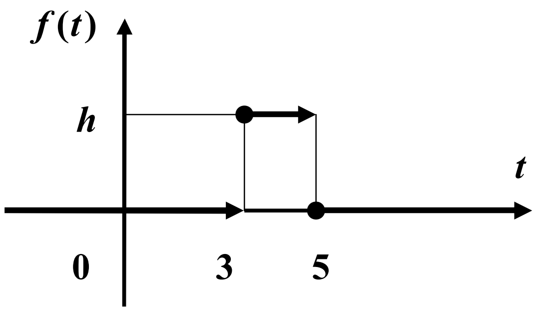

Рис. 5

Кусково-неперервна функція $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \quad t > b, \\ \varphi(t) \neq 0 & \forall t \in (a, b) \end{cases}$ (рис. 6)

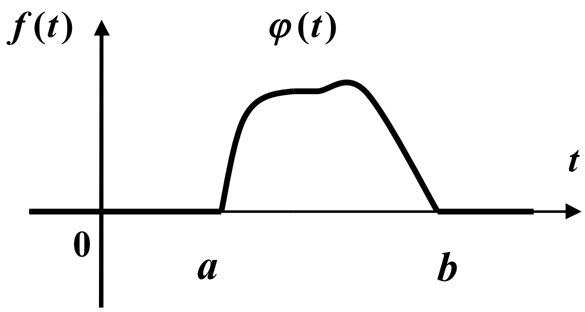

Рис. 6

подається формулою

$$f(t)=\ \ (t)\cdot\left[\,\eta(t-a)-\eta(t-b)\right],$$

отже, задана функція може бути зображена у вигляді

$$f(t)=h\cdot\eta(t-3)-h\cdot\eta(t-5)=h\left[\eta(t-3)-\eta(t-5)\right].$$

Тоді за властивістю лінійності і теоремою запізнювання маємо

$$f(t)\to h\left(e^{-3t}\frac{1}{p}-e^{-5t}\frac{1}{p}\right)=h\frac{e^{-3t}}{p}\left(1-e^{-2t}\right).$$

<u>Приклад 11.</u> Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p+3)}.$$

*Розв'язання***.** Розкладемо дріб $\dfrac{p+1}{(p-1)(p+3)}$ у суму найпростіших дробів:

$$F(p)=\frac{p+1}{(p-1)(p+3)}=\frac{1}{2(p-1)}+\frac{1}{2(p+3)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень з урахуванням лінійності знаходимо:

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

<u>Приклад 12.</u> Відновити оригінал за зображенням

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}.$$

*Розв'язання***.** Розкладемо дріб $\dfrac{1}{(p-1)(p+1)^3}$ у суму найпростіших дробів:

$$F(p)=\frac{1}{(p-1)(p+1)^3}=-\frac{1}{2(p+1)^3}-\frac{1}{4(p+1)^2}-\frac{1}{8(p+1)}+\frac{1}{8(p-1)}.$$

За таблицею оригіналів і зображень з урахуванням лінійності знаходимо:

$$f(t)=-\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t}=\frac{1}{8}\Big[e^t-e^{-t}\Big(2t^2+2t+1\Big)\Big].$$

<u>Приклад 13.</u> Знайти оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p)=\frac{pe^{-3p}}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}.$$

Розв'язання. Розкладемо дріб $\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}$ у суму найпростіших дробів:

$$\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}=\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+\frac{8}{3}}{p^2+4p+8}.$$

За таблицею основних зображень (додаток 1) і за теоремою зміщення з урахуванням лінійності маємо

$$\frac{1}{40}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+2}\leftarrow\frac{1}{40}e^{2t}+\frac{1}{8}e^{-2t},$$

$$-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+\frac{8}{3}}{p^2+4p+8}=-\frac{3}{20}\cdot\frac{p+2+\frac{2}{3}}{p^2+4p+8}\leftarrow-\frac{3}{20}\cdot e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t}\sin 2t,$$

отже,

$$\frac{p}{(p^2-4)(p^2+4p+8)}\leftarrow\frac{1}{40}e^{2t}+\frac{1}{8}e^{-2t}-\frac{3}{20}\cdot e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t}\sin 2t.$$

Тоді за теоремою запізнювання остаточно маємо

$$f(t)=\left[\frac{1}{40}e^{2t-6}+\frac{1}{8}e^{-2t+6}-\frac{1}{20}\cdot e^{-2t+6}[3\cos(2t-6)+\sin(2t-6)]\right]\cdot\eta(t-3).$$

<u>Приклад 14.</u> Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$x''+4x'+4x=e^{-2t}(\cos t+2\sin t),$$

що задовольняє початковим умовам $x(0) = -1$, $x'(0) = 1$.

Розв'язання. Нехай $x(t) \to X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу з урахуванням початкових умов маємо

$$x'(t) \to pX(p) + 1,\ x''(t) \to p^2 X(p) + p - 1.$$

За таблицею оригіналів і зображень (додаток 1) з урахуванням лінійності знаходимо

$$\cos t + 2\sin t \to \frac{p}{p^2+1} + 2\cdot\frac{1}{p^2+1} = \frac{p+2}{p^2+1}.$$

Тоді за теоремою зміщення

$$e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \to \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$p^2 X(p) + p - 1 + 4pX(p) + 4 + 4X(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}$$

або, після перетворень,

$$(p^2 + 4p + 4)X(p) + p + 3 = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Знайдемо звідси зображення розв'язку:

$$X(p) = -\frac{p^3 + 7p^2 + 16p + 11}{[(p+2)^2+1]\,(p+2)^2}.$$

Розклавши дріб у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$X(p) = -\frac{p+4}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2} = -\frac{p+2}{(p+2)^2+1} - 2\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1} + \frac{1}{(p+2)^2}.$$

Оскільки $\frac{p}{p^2+1} \leftarrow \cos t,\ \frac{1}{p^2+1} \leftarrow \sin t,\ \frac{1}{p^2} \leftarrow t$, то за теоремою зміщення і властивістю лінійності остаточно маємо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2\sin t).$$

<u>Приклад 15.</u> Знайти розв'язок задачі Коші $x'' - 2x' + x = f(t)$,

$x(0) = 0, x'(0) = 0$, де $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ -1, & 1 < t < 3, \\ 2, & t > 3. \end{cases}$

Розв'язання. Права частина рівняння є кусково-неперервною функцією. За формулою $f(t) = \ (t) \cdot [\ \eta(t-a) - \eta(t-b)]$ зобразимо її у вигляді

$$f(t) = -\left[\eta(t-1) - \eta(t-3)\right] + 2\,\eta(t-3)$$

або

$$f(t) = -\ \eta(t-1) + 3\eta(t-3).$$

Нехай $x(t) \to X(p)$. Тоді за теоремою про диференціювання оригіналу маємо $x'(t) \to pX(p)$, $x''(t) \to p^2 X(p)$. За таблицею оригіналів і зображень і теоремою лінійності

$$f(t) = -\ \eta(t-1) + 3\eta(t-3) \to -\frac{e^{-p}}{p} + 3 \cdot \frac{e^{-3p}}{p}.$$

Підставивши усі отримані вирази до заданого рівняння, отримаємо операторне рівняння у вигляді

$$(p^2 - 2p + 1)X(p) = \frac{3e^{-3p} - e^{-p}}{p},$$

звідки зображення розв'язку

$$X(p) = \frac{3e^{-3p} - e^{-p}}{p(p-1)^2}.$$

Розклавши дріб $\dfrac{1}{p(p-1)^2}$ у суму найпростіших дробів, отримаємо:

$$\frac{1}{p(p-1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{p} \leftarrow 1$, $\dfrac{1}{p^2} \leftarrow t$, то за теоремою зміщення з урахуванням лінійності

$$\frac{1}{p(p-1)^2} \leftarrow 1 - e^t + te^t.$$

Тоді за теоремою запізнювання з урахуванням лінійності остаточно маємо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$\tilde{x}(t) = 3\left(1 - e^{t-3} + (t-3)e^{t-3}\right)\eta(t-3) - \left(1 - e^{t-1} + (t-1)e^{t-1}\right)\eta(t-1).$$

<u>Приклад 16.</u> Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x} - x - 2y + 9t = 0 \\ \dot{y} - 2x - y = 4e^t \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 2.$$

Розв'язання. Позначимо $x(t) \to X(p)$, $y(t) \to Y(p)$. Оскільки $t \to \dfrac{1}{p^2}$, $e^t \to \dfrac{1}{p-1}$, то за теоремою про диференціювання оригіналу і властивістю лінійності отримуємо наступну систему операторних рівнянь відносно зображень $X(p)$ й $Y(p)$:

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - 2Y(p) = 1 - \dfrac{9}{p^2}, \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = 2 + \dfrac{4}{p-1}. \end{cases}$$

Знайдемо $X(p)$ й $Y(p)$ за формулами Крамера: $X(p) = \dfrac{\Delta_X}{\Delta}$, $Y(p) = \dfrac{\Delta_Y}{\Delta}$,

де $\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -2 \\ -2 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p - 3 = (p-3)(p+1)$,

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \dfrac{p^2-9}{p^2} & -2 \\ \dfrac{2p+2}{p-1} & p-1 \end{vmatrix} = \frac{p^4 + 2p^3 - 4p^2 + 18p - 9}{p^2(p-1)},$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-1 & \dfrac{p^2-9}{p^2} \\ -2 & \dfrac{2p+2}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{2p^3 + 4p^2 - 18}{p^2}.$$

Отже, $X(p)=\dfrac{p^4+2p^3-4p^2+18p-9}{p^2(p-1)(p-3)(p+1)}$, $Y(p)=\dfrac{2p^3+4p^2-18}{p^2(p-3)(p+1)}$.

Розкладемо зображення у суму найпростіших дробів:

$$X(p)=\frac{5}{p}-\frac{3}{p^2}-\frac{2}{p-1}+\frac{2}{p-3}-\frac{4}{p+1},\quad Y(p)=-\frac{4}{p}+\frac{6}{p^2}+\frac{2}{p-3}+\frac{4}{p+1}.$$

Відновимо оригінали, застосувавши таблицю і властивість лінійності. Отже, розв'язок задачі має вигляд:

$$\tilde{x}(t)=5-3t-2e^{t}+2e^{3t}-4e^{-t},\quad \tilde{y}(t)=-4+6t+2e^{3t}+4e^{-t}.$$

Приклад 17. Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилили на **1000** кубиків однакового розміру і ретельно їх перемішали. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик має рівно одну пофарбовану грань.

Розв'язання. При розпилюванні вихідного куба, який має 6 граней, на $n=1000$ кубічних частин (загальне число можливих наслідків) утворюється $m=6\times 8\times 8=384$ кубика з однією пофарбованою гранню (число сприятливих наслідків). Тому за класичною формулою $P(A)=\dfrac{m}{n}$ маємо

$$P(A)=\frac{384}{1000}=\frac{96}{250}=0{,}384.$$

Приклад 18. Колоду з **36** гральних карт ретельно перемішують і навмання витягують одразу **3** карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоча б одна "дама".

Розв'язання. Знайдемо ймовірність *протилежної* події, а саме: серед узятих карт немає жодної "дами". За класичною формулою маємо

$$q=\frac{C_4^0\cdot C_{32}^3}{C_{36}^3}.$$

Тоді шукана ймовірність $p=1-q=1-\dfrac{C_{32}^3}{C_{36}^3}=0{,}3053$.

Приклад 19. Та ж сама задача, але карти витягують *по черзі*, одну за одною.

Розв'язання. У даному випадку, на відміну від попереднього, маємо не одну, а три *залежні* події. Тому за теоремою множення ймовірностей залежних подій

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)$$

маємо $q=\frac{32}{36}\cdot\frac{31}{35}\cdot\frac{30}{34}=\frac{248}{357}$. Тоді $p=1-q=\frac{114}{357}=0{,}3053$.

<u>Приклад 20.</u> У крузі радіуса R розміщений малий круг радіуса $r<R$. Знайти ймовірність того, що точка, навмання кинута у великий круг, влучить також і в малий круг.

Розв'язання. За «геометричним» означенням ймовірності $P(A)=\frac{\Omega_A}{\Omega}$ маємо

$$p=\frac{S_r}{S_R}=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{r^2}{R^2}.$$

<u>Приклад 21.</u> Розрив електричної мережі може відбутися внаслідок відмови елемента E_1 або одночасно двох елементів E_2 й E_3, які відмовляють незалежно один від одного відповідно з ймовірностями $p_1=0{,}3$, $p_2=p_3=0{,}2$. Визначити ймовірність розриву електричної мережі.

Розв'язання. Мережа буде працювати (подія A), якщо жоден з елементів не відмовить. Тому за теоремою множення ймовірностей незалежних подій $P(A)=(1-p_1)\cdot(1-p_2p_3)=0{,}672$. Отже, ймовірність розриву мережі (подія $\overline{A}$)

$$P(\overline{A})=1-P(A)=0{,}328.$$

<u>Приклад 22.</u> Стрілець робить один постріл по мішені, яка складається з круга й двох концентричних кілець. Ймовірності попадання в круг і кільця відповідно дорівнюють $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}2,$ $p_3=0{,}1$. Визначити ймовірність промаху.

Розв'язання. Мішень буде уражена (подія A), якщо відбудеться влучання або в круг, або в одне з кілець. Оскільки стрілець робить тільки один постріл, то ці події несумісні. За теоремою додавання ймовірностей несумісних подій $P(A_1+A_2+....+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$ маємо

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}6.$$

Отже, ймовірність промаху (подія $\overline{A}$) є $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}4$.

<u>Приклад 23.</u> Технічний пристрій містить три блоки, надійності яких відповідно дорівнюють $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}3$. При відмові за проміжок часу t усіх трьох блоків пристрій напевно виходить з ладу, при відмові лише одного блока ймовірність виходу з ладу $0{,}2$, а при відмові двох блоків вона складає $0{,}6$. Знайти ймовірність того, що за проміжок часу t пристрій вийде з ладу.

Розв'язання. Нехай подія A – вихід пристрою з ладу за проміжок часу t – відбувається за умови появи однієї з несумісних подій: B_1 – усі три блоки за час t працювали безвідмовно, B_2 – за час t відмовив тільки один блок, B_3 – за час t відмовили два блоки, B_4 – за час t відмовили усі три блоки.

Ймовірності відмов кожного з блоків: $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$, $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. За теоремами додавання і множення ймовірностей знайдемо ймовірності появ подій B_i $(i = \overline{1,4})$:

$$P(B_1) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}09,$$

$$P(B_2) = q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}36,$$

$$P(B_3) = q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}41,$$

$$P(B_4) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14.$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{4} P(B_i) = 0{,}09 + 0{,}36 + 0{,}41 + 0{,}14 = 1$, то події B_i $(i = \overline{1,4})$ утворюють повну групу. Відповідні умовні ймовірності події A дорівнюють: $P_{B_1}(A) = 0$, $P_{B_2}(A) = 0{,}2$, $P_{B_3}(A) = 0{,}6$, $P_{B_4}(A) = 1$. За формулою повної ймовірності $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$ маємо

$$P(A) = 0{,}09 \cdot 0 + 0{,}36 \cdot 0{,}2 + 0{,}41 \cdot 0{,}6 + 0{,}14 \cdot 1 = 0{,}458.$$

Приклад 24. По каналу зв'язку передається один з двох можливих сигналів x_1 або x_2, причому сигнал x_2 передається вдвічі частіше, ніж сигнал x_1. Через перешкоди можливі викривлення: замість одного сигналу може бути прийнятий інший і навпаки. Властивості каналу зв'язку такі, що сигнал x_1 зазнає викривлень приблизно у **10 %** випадків, а сигнал x_2 - у **20 %**. Нехай був отриманий сигнал x_1. Яка ймовірність того, що був переданий саме цей сигнал?

Розв'язання. Нехай подія A - був отриманий сигнал x_1.
Висунемо гіпотези: H_1- був переданий сигнал x_1; H_2- був переданий сигнал x_2. Тоді $P(H_1)=\frac{1}{3}$, $P(H_2)=\frac{2}{3}$, $P_{H_1}(A)=\frac{9}{10}$, $P_{H_2}(A)=\frac{4}{5}$. Ймовірність отримати за даних умов сигнал x_1 за формулою повної ймовірності є

$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$. За відповідною формулою Байєса $P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}$ ймовірність того, що був переданий саме сигнал x_1 (апостеріорна ймовірність гіпотези H_1) є

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{5}{6}}=\frac{9}{25}=0{,}36.$$

Таким чином, отримання сигналу x_1 дещо збільшує ймовірність гіпотези H_1 у порівнянні з її апріорним значенням $\frac{1}{3}\approx 0{,}33$.

Приклад 25. Ймовірність того, що витрата електроенергії протягом однієї доби не перевищить установленої норми, дорівнює $p=0{,}75$. Знайти ймовірність того, що у найближчі 6 діб витрата електроенергії протягом **4** діб не перевищить норми.

Розв'язання. Ймовірність перевитрати електроенергії протягом кожної доби стала і дорівнює $q=1-0{,}75=0{,}25$. Оскільки число спроб $n=6$ невелике, а ймовірність $p=0{,}75$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за формулою Бернуллі $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, де $k=4$:

$$P_6(4)=C_6^4p^4q^2=\frac{6!}{4!\,2!}\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25^2=0{,}297\,.$$

Приклад 26. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно **70** разів у **243** спробах, якщо ймовірність появи цієї події у кожній спробі стала і дорівнює **0,25**.

Розв'язання. Оскільки число спроб $n=243$ велике, а ймовірність $p=0{,}25$ не мала, то шукану ймовірність обчислимо за локальною формулою Лапласа $P_n(k)\sim\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$: $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-243\cdot 0{,}25}{\sqrt{243\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}=1{,}37$, значення $\varphi(x)=\varphi(1{,}37)=0{,}1561$ обчислюємо на калькуляторі за формулою $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ або знаходимо за таблицею у додатку 4,

$$P_{243}(70)=\frac{1}{\sqrt{243\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}}\cdot 0{,}1561=0{,}0231.$$

Приклад 27. Ймовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює $p=0{,}2$. Визначити ймовірність того, що зі **100** конденсаторів за час T вийдуть з ладу від **14** до **26** конденсаторів.

Розв'язання. Скористаємось інтегральною формулою Лапласа $P_n(k_1,k_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, у якій покладемо $n=100,\quad k_1=14,\quad k_2=26,$ $p=0{,}2,\quad q=1-p=0{,}8$. Обчисливши $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{14-100\cdot 0{,}2}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=-1{,}5$, $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{26-100\cdot 0{,}2}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=1{,}5$, за таблицею у додатку 5 знаходимо $\Phi(1{,}5)=0{,}4332$. Оскільки функція $\Phi(x)$ непарна, то $\Phi(-1{,}5)=-\,0{,}4332$. Тоді $P_{100}(14{,}26)=\Phi(1{,}5)-\Phi(-1{,}5)=2\cdot 0{,}4332=0{,}8664$.

Приклад 28. Знайти ймовірність того, що серед **30** навмання відібраних людей знайдеться хоча б одна людина, що народилася 1 січня. Якою повинна бути мінімальна чисельність групи людей, щоб з імовірністю не менше **50%** можна було стверджувати, що серед них знайдеться хоча б одна людина, що народилася 1 серпня? Прийняти, що дні народження *розподілені рівномірно*, тобто немає високосних років, близнюків, народжуваність не залежить від дня тижня, місяця, пори року, країни проживання та інших факторів.

Розв'язання. Ймовірність окремої особи народитися у певний день року складає $p = \dfrac{1}{365}$ і є доволі малою. Тому шукану ймовірність обчислимо за допомогою формули Пуассона $P_n(k) \sim \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ при $\lambda = np = 30 \cdot \dfrac{1}{365} = 0{,}08219$:

$P(A) = 1 - P_{30}(0) = 1 - \dfrac{e^{-0{,}08219}}{0!} \approx 1 - 0{,}9211 = 0{,}0789$. З іншого боку маємо $P(A) = 1 - (1-p)^n = 1 - \left(\dfrac{364}{365}\right)^{300} \approx 0{,}0790$. Отже, як бачимо, результати практично співпадають. При $n = 400$ ймовірність зростає до **0,6658**, а при $n = 600$ вона складає вже **0,807**, тобто приблизно **81**%. Мінімальну чисельність людей, при якій ймовірність збігу з певною датою принаймні одного дня народження складає **50**%, знайдемо з нерівності $1 - \left(\dfrac{364}{365}\right)^n \geq 0{,}5$:

$$\left(\frac{364}{365}\right)^n \leq 0{,}5 \Rightarrow n \ln\left(\frac{364}{365}\right) \geq \ln 0{,}5 \Rightarrow n \geq \left[\frac{-0{,}6931}{-0{,}002743}\right] = 253.$$

Отже, $n = 253$. Це число помітно більше, ніж половина днів у році (**365/2** = **182.5**); так відбувається через те, що у решти членів групи дні народження можуть збігатися між собою, і це зменшує ймовірність збігу одного з них із заданим днем народження.

Приклад 29. Ймовірність прийому радіосигналу за певних умов дорівнює **0,75**. Скільки сигналів повинно бути передано, щоб ймовірність відхилення частоти прийнятих сигналів від ймовірності прийому не більш, ніж на **0,035**, дорівнювала **0,95**?

Розв'язання. Ймовірність того, що модуль відхилення відносної частоти $\dfrac{m}{n}$ від сталої ймовірності p не перевищує *заданого* числа $\varepsilon > 0$, є

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Покладемо $p=0{,}75,\quad q=1-p=0{,}25,\quad \varepsilon=0{,}035,\quad P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=0{,}95$.

Отримаємо рівняння $0{,}95=2\Phi\left(0{,}035\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}75\cdot 0{,}25}}\right)$ або, після невеликого перетворення, $\Phi\left(0{,}035\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}1875}}\right)=0{,}475$. За таблицею у додатку 5 знаходимо $0{,}475=\Phi(1{,}96)$, звідки маємо $0{,}035\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}1875}}=1{,}96$.

Отже, $n=0{,}1875\cdot\left(\frac{1{,}96}{0{,}035}\right)^2=588$.

Приклад 30. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

x_i	13	18	19	x_4	25
p_i	0,18	p_2	0,22	0,20	0,15

Знайти x_4, p_2, $D(X)$, $\sigma(X)$, якщо $M(X)=18{,}77$.

Розв'язання. Для відшукання p_2 використаємо умову $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$, тобто $0{,}18+p_2+0{,}22+0{,}2+0{,}15=1$, звідки знаходимо $p_2=0{,}25$.

Тоді маємо рівняння

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p_i=13\cdot 0{,}18+18\cdot 0{,}25+19\cdot 0{,}22+x_4\cdot 0{,}2+25\cdot 0{,}15=18{,}77$$

або $14{,}77+0{,}2\cdot x_4=18{,}77$, звідки знаходимо $x_4=\frac{4}{0{,}2}=20$.

Отже, закон розподілу дискретної величини має вигляд

x_i	13	18	19	20	25
p_i	0,18	0,25	0,22	0,2	0,15

Тоді

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot p_i-[M(X)]^2==13^2\cdot 0{,}18+18^2\cdot 0{,}25+19^2\cdot 0{,}22+20^2\cdot 0{,}2+$$

$$+25^2\cdot 0{,}15-(18{,}77)^2=364{,}59-352{,}3129=12{,}28,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=3{,}50.$$

Приклад 31. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 8;\\ (x-8)^3, & 8<x\le 9;\\ 1\ , & x>9.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ й середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$; в) ймовірність попадання випадкової величини на відрізок $[8{,}25;\ 8{,}75]$.

Розв'язання.

а) Щільність розподілу $f(x)$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 8,\\ 3(x-8)^2, & 8<x\le 9,\\ 0\ , & x>9;\end{cases}$$

б) Оскільки $f(x)$ ненульова лише на проміжку $[8,9)$, то користуємось формулами $M(X)=\int\limits_a^b x\ f(x)dx$, $D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$. Отже, маємо

$$M(X)=\int\limits_8^9 x\cdot 3(x-8)^2dx=3\int\limits_8^9 x(x-8)^2dx=\left|\begin{array}{lcr}x-8=t & & \\ x=t+8 & & \\ x & 8 & 9\\ t & 0 & 1\end{array}\right|=$$

$$=3\int\limits_0^1(t+8)\,t^2dt=3\int\limits_0^1\left(t^3+8t^2\right)dt=3\left(\frac{t^4}{4}+8\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=3\left(\frac{1}{4}+\frac{8}{3}\right)=8{,}75,$$

$$D(X)=\int\limits_8^9 x^2\cdot 3(x-8)^2dx-[M(X)]^2=3\int\limits_8^9\left(x^4-16x^3+64x^2\right)dx-8{,}75^2=$$

$$= 3\left(\frac{x^5}{5} - 4x^4 + \frac{64}{3}x^3\right)\Bigg|_8^9 - 76{,}56 = \frac{383}{5} - 76{,}56 = 0{,}04,$$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}2$;

в) ймовірність попадання неперервної випадкової величини X в заданий інтервал $(a; b)$ обчислюється за формулою $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$. Отже, в даному випадку

$$P(8{,}25 < X < 8{,}75) = F(8{,}75) - F(8{,}25) = 0{,}75^3 - 0{,}25^3 = 0{,}406.$$

<u>Приклад 32.</u> Гармата робить **4** постріли по мішені з однієї і тієї ж позиції. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює **0,8**. Скласти закон розподілу кількості влучень, знайти середнє значення, дисперсію та середнє квадратичне відхилення кількості влучень.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X – кількість влучень у мішень. Її можливі значення: $x_1 = 0,\quad x_2 = 1,\ x_3 = 2,\quad x_4 = 3,\quad x_5 = 4$.

Результати пострілів не залежать один від одного, ймовірність влучення при одному пострілі є сталою величиною. Це означає, що випадкова величина X розподілена за біноміальним законом.

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $n = 4,\quad k = 0, 1, 2, 3, 4;\quad p = 0{,}8;\quad q = 1 - p = 0{,}2.$

Обчислимо

$$P(0) = C_4^0 p^0 q^4 = (0{,}2)^4 = 0{,}0016;$$

$$P(1) = C_4^1 p q^3 = 4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256;$$

$$P(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536;$$

$$P(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q = 4 \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096;$$

$$P(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 0{,}8^4 = 0{,}4096.$$

Перевіримо вірність обчислень:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0{,}0016 + 0{,}0256 + 0{,}1536 + 0{,}4096 + 0{,}4096 = 1.$$

Шуканий закон розподілу має вигляд:

x	0	1	2	3	4
p	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Математичне сподівання (середнє значення) кількості влучень $M(X)=np=4\cdot 0{,}8=3{,}2$, дисперсія $D(X)=npq=4\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}64$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$.

<u>Приклад 33.</u> Електронний пристрій складається з **1000** елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента протягом одного року дорівнює **0,002**. Знайти імовірність того, що за рік відмовлять не менше трьох елементів.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X - число елементів, які відмовили. За законом Пуассона $P_n(k)=\dfrac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

Вважаючи $n=1000,\ p=0{,}002$, одержимо $\lambda=np=1000\cdot 0{,}002=2$.

Ймовірність відмови не менш трьох елементів

$$P(X\ge 3)=\sum_{k=3}^{\infty}P(X=k)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2).$$

$$P(X=0)=P_{1000}(0)=\frac{2^0\cdot e^{-2}}{0!}=0{,}13534,\ P(X=1)=P_{1000}(1)=\frac{2^1\cdot e^{-2}}{1!}=0{,}27068,$$

$$P(X=2)=P_{1000}(2)=\frac{2^2\cdot e^{-2}}{2!}=0{,}27068.$$

Тоді $P(X\ge 3)=1-0{,}13534-2\cdot 0{,}27068=0{,}3233$.

<u>Приклад 34.</u> Автобуси деякого маршруту рухаються точно за розкладом. Проміжок руху **15** хвилин. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме черговий автобус менше **10** хвилин.

Розв'язання. Пасажир може підійти до зупинки у будь-який момент. Тому час очікування можна вважати випадковою величиною X, яка рівномірно розподілена у інтервалі руху автобусів.

Щільність розподілу $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, де $(b-a)$ - довжина інтервалу, у якому знаходяться ймовірні значення X. У даному випадку $b-a=15$, тому $f(x)=\dfrac{1}{15}$. Оскільки автобуси йдуть точно за розкладом (тобто наступний прийде не раніше означеного часу), то пасажир чекатиме його менше 10 хвилин, якщо $5<X<15$.

Ймовірність попадання випадкової величини в деякий інтервал обчислюється за формулою $P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, отже,

$$P(5 < X < 15) = \int\limits_{5}^{15} \frac{1}{15}dx = \left.\frac{x}{15}\right|_{5}^{15} = \frac{2}{3}.$$

<u>Приклад 35.</u> Середній час безвідмовної роботи радіоелектронного обладнання літака за статистичними даними складає **200** годин. Знайти ймовірність відмови обладнання протягом **10** годин польоту.

Розв'язання. Час T безвідмовної роботи обладнання є випадковою величиною, розподіленою за показниковим законом $F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0, \end{cases}$ де λ – інтенсивність відмов (кількість відмов за одиницю часу). У даному випадку $t = 10,\ \lambda = \frac{1}{200}$ і ймовірність відмови за час t буде складати $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{10}{200}} = 0{,}049$.

<u>Приклад 36.</u> Найбільший поперечний діаметр заготовок деталей, що поступають в обробку, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням **5** см і середнім квадратичним відхиленням **0,3** см. Написати диференціальну функцію розподілу, побудувати її схематичний графік, вказавши його характерні точки, і знайти ймовірність того, що: а) діаметр взятої навмання заготовки буде знаходитись в межах від **4,7** до **6,2** см; б) відхилення діаметра заготовки від середнього не перевищить за абсолютною величиною **0,6** см.

Розв'язання. Випадкова величина X – найбільший поперечний діаметр заготовки. Оскільки вона розподілена нормально, то диференціальна функція розподілу виражається формулою $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де a – математичне сподівання (середнє значення), σ – середнє квадратичне відхилення. Функція

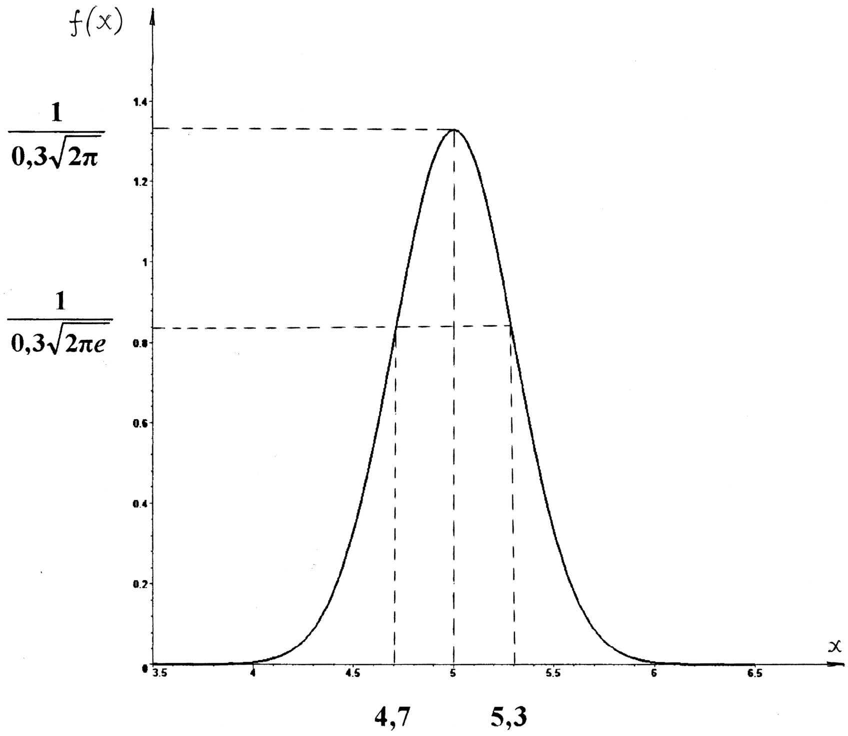

Рис. 7

досягає максимуму $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ в точці $x = a$, її графік має дві точки перегину $\left(a \pm \sigma;\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$. В даному випадку $a = 5$, $\sigma = 0,3$. Тому $f(x) = \dfrac{1}{0,3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{0,18}}$, максимум $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx 1,33$ в точці $x = 5$, точки перегину $(4,7;\ 0,81)$ й $(5,3;\ 0,81)$. Графік функції показаний на рис. 7.

а) Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – інтегральна функція Лапласа (її значення наведені у додатку 5).

Оскільки $\alpha = 4,7$, $\beta = 6,2$, то маємо

$$P(4,7 < X < 6,2) = \Phi\left(\frac{6,2-5}{0,3}\right) - \Phi\left(\frac{4,7-5}{0,3}\right) = \Phi(4) + \Phi(1) = 0,3413+0,5=0,8413;$$

б) ймовірність того, що модуль відхилення X від її математичного сподівання a не перевищить заданого числа $\delta > 0$, $P\left(\mid X - a \mid < \delta \right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma} \right)$.

У даному випадку $\delta = 0,6$, отже

$$P\left(|X - 5| < 0,6 \right) = 2\Phi \left(\frac{0,6}{0,3} \right) = 2\Phi\left(2\right) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544 .$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію, задану на проміжку, довжина якого дорівнює періоду.

1. $f(x) = \begin{cases} 5, & -\pi \le x \le 0 \\ x - 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

2. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \end{cases}$.

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x \le 0 \\ x + 2, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

4. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & -2 \le x \le 0 \\ -3, & 0 < x \le 2 \end{cases}$.

5. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

6. $f(x) = \begin{cases} 2x, & -3 \le x \le 0 \\ -1, & 0 < x \le 3 \end{cases}$.

7. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & -\pi \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

8. $f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & -2 \le x \le 0 \\ 2, & 0 < x \le 2 \end{cases}$.

9. $f(x) = \begin{cases} -3, & -\pi \le x \le 0 \\ 2x + 5, & 0 < x \le \pi \end{cases}$.

10. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & -4 \le x \le 0 \\ -5, & 0 < x \le 4 \end{cases}$.

Завдання 2. Подати у вигляді інтеграла Фур'є функцію $f(x)$, продовживши її для від'ємних значень вказаним чином.

1. $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$, непарне продовження.

2. $f(x)=\begin{cases}4+3x, 0\le x\le 2\\ 0, \quad x>2\end{cases}$, парне продовження.

3. $f(x)=\begin{cases}2+\dfrac{x}{3}, 0\le x\le 3\\ 0, \quad x>3\end{cases}$, непарне продовження.

4. $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}\\ 0, \quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$, парне продовження.

5. $f(x)=\begin{cases}e^{3x}, 0\le x\le 2\\ 0, \quad x>2\end{cases}$, непарне продовження .

6. $f(x)=\begin{cases}4x-3, 0\le x\le 2\\ 0, \quad x>2\end{cases}$, парне продовження.

7. $f(x)=\begin{cases}0, \quad 0\le x<1\\ x+2, 1<x\le 3\\ 0, \quad x>3\end{cases}$, непарне продовження.

8. $f(x)=\begin{cases}5, \quad 0\le x<1\\ 2x+3, \ 1\le x\le 4\\ 0, \quad x>4\end{cases}$, парне продовження.

9. $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{x}{3}, 0\le x\le \pi\\ 0, \quad x>\pi\end{cases}$, непарне продовження.

10. $f(x)=\begin{cases}e^{3x}, 0\le x\le 1\\ 0, \quad x>1\end{cases}$, парне продовження.

Завдання 3. Знайти зображення оригіналу.

1. $f(t)=t^2e^{t-3}\eta(t-3)$. 2. $f(t)=(t-3)e^{5t-5}\eta(t-1)$.

3. $f(t)=te^{2t}\cos 3t$. 4. $f(t)=e^{4t}\cos^2 t$.

5. $f(t)=t\sin^2(t-4)\eta(t-4)$. 6. $f(t)=e^{-t}(t-2)^3$.

7. $f(t)=e^{-t}\cos(4t-8)\eta(t-2)$. 8. $f(t)=t^2\cos\dfrac{t}{2}$.

9. $f(t)=e^{t}\sin 2t\cos 4t$. 10. $f(t)=e^{-2t+10}\sin^2(t-5)\eta(t-5)$.

Завдання 4. Відновити оригінал за зображенням.

1. $F(p)=\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$. 2. $F(p)=\dfrac{2-3p}{p^2+4p+8}e^{-3p}$.

3. $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$. 4. $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2+4p+6}e^{-p}$.

5. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$. 6. $F(p)=\dfrac{2+p}{p^2+4p+5}e^{-5p}$.

7. $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$. 8. $F(p)=\dfrac{4-p}{p^2+6p+11}e^{-p}$.

9. $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p+2)(p-1)^2}$. 10. $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2-4p+10}e^{-3p}$.

Завдання 5. За допомогою перетворення Лапласа розв’язати задачу Коші.

1. $\ddot{x}+x=2\cos t,\quad x(0)=-1,\quad \dot{x}(0)=1$.

2. $\ddot{x}+4x=2\sin 2t,\quad x(0)=-1,\quad \dot{x}(0)=0$.

3. $\ddot{x}+2\dot{x}+10x=\sin 3t+6\cos 3t,\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=1$.

4. $\ddot{x}+2\dot{x}+x=te^{t},\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1$.

5. $\ddot{x}+x=6e^{-t},\quad x(0)=3,\quad \dot{x}(0)=1$.

6. $\ddot{x}-2\dot{x}-3x=2t,\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=1$.

7. $\ddot{x} - 9x = \sin t - \cos t, \quad x(0) = -3, \quad \dot{x}(0) = 2$.

8. $\ddot{x} + \dot{x} + x = t^2 + 2t, \quad x(0) = 4, \quad \dot{x}(0) = -2$.

9. $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 2e^t \cos\frac{t}{2}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$.

10. $\ddot{x} + 4x = 4e^{2t} + 4t^2, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2$.

Завдання 6. Розв’язати задачу.

1. При дослідженні **12** зразків деякого сплаву було виявлено, що **3** зразка містять 0,3% сторонньої домішки, **4** зразка – 0,2% і 5 зразків – 0,1%. Навмання вибрали **2** зразка. Знайти ймовірність того, що вони будуть містити один і той самий відсоток домішки.

2. У першій урні **5** білих і **3** чорних кулі, у другій – **6** білих і **9** чорних. З другої урни випадковим чином перекладають у першу дві кулі, після чого з першої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля – біла?

3. Абонент забув останню цифру номера телефону і набирає її навмання. Яка ймовірність того, що він додзвониться не більше, ніж за три спроби?

4. Випадковим чином відібрані **30** людей. Яка ймовірність того, що хоча б у двох будь-яких з них дні народження співпадають? Прийняти, що дні народження розподілені рівномірно. *Вказівка:* при обчисленні факторіалів застосувати формулу Стірлінга $\ln n! \approx n(\ln n - 1) + \frac{1}{2}\ln(2\pi n)$.

5. Є три однакових за видом ящика. У першому ящику **23** білих кулі, у другому – **9** білих і **14** чорних куль, у третьому – **23** чорних кулі. З вибраного навмання ящика вийняли білу кулю. Знайдіть ймовірність того, що куля вийнята з другого ящика.

6. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює **0,7**, а для другого - **0,8**. Кожен зі стрільців робить по одному пострілу і у випадку промаху стріляє ще раз. Знайти ймовірність того, що в результаті в мішені буде дві пробоїни.

7. У урну, яка містить **3** кулі, кинули білу кулю, після чого навмання витягли одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла, якщо всі припущення про початковий склад куль (за кольором) рівноможливі.

8. Пасажир підходить до зупинки автобусів двох маршрутів. Інтервал руху автобусів 1-го маршруту складає **19** хвилин, а 2-го маршруту – **21** хвилину. Вважаючи, що пасажира влаштує автобус будь-якого з маршрутів, знайдіть ймовірність того, що він виїде з зупинки не пізніше, ніж через **6** хвилин.

9. Є **13** монет, з яких **3** штуки браковані: внаслідок заводського браку на цих монетах з обох сторін викарбуваний герб. Навмання обрану монету кидають **9** разів, причому при всіх киданнях вона лягає гербом вгору. Знайдіть ймовірність того, що була обрана монета з двома гербами.

10. Причиною розриву електричного ланцюга служить вихід з ладу елемента $\boldsymbol{R_1}$ або одночасний вихід з ладу елементів $\boldsymbol{R_2}$ і $\boldsymbol{R_3}$. Елементи можуть вийти з ладу незалежно один від одного з вірогідністями відповідно **0,1**, **0,2** і **0,3**. Знайти ймовірність розриву електричного ланцюга.

Завдання 7. Розв’язати задачу.

1. Змішали лимони з трьох контейнерів. У першому містилося **25%** всіх лимонів, у другому – **30%**, в третьому – **45%**. Знайти ймовірність того, що серед **200** навмання взятих лимонів не менше **90** стиглих, якщо в першому контейнері таких лимонів було **60%**, у другому – **65%**, в третьому – **40%**.

2. По каналу зв'язку передається **6** повідомлень. Кожне повідомлення може бути спотворено завадами з імовірністю **0.2** незалежно від інших. Знайти ймовірність того, що не менше **3** з **6** повідомлень передані спотвореними.

3. Число дзвінків із замовленнями, які надходять до фірми протягом однієї години, розподілено за законом Пуассона з параметром $\boldsymbol{\lambda = 2}$. Знайти ймовірність того, що за першу годину роботи фірми замовлень буде менше двох, а за другу – не менше двох.

4. Імовірність того, що хоча б один з **4** комп'ютерів в інтернет-кафе зайнятий, становить **0,9984**. Яка ймовірність того, що в даний момент буде зайнято **82** комп'ютера зі **100**?

5. Тест складається з **10** запитань, на кожне з яких пропонується **4** варіанта відповіді. Яка ймовірність того, що студенту вдасться вгадати правильні відповіді щонайменше на **6** запитань?

6. Імовірність того, що частинка, яка вилетіла з радіоактивного джерела, буде зареєстрована лічильником, дорівнює **0,0001**. За час спостереження з джерела вилетіло **30 000** частинок. Знайти ймовірність того, що лічильник зареєстрував не менше **4** частинок.

7. Імовірність настання події $\boldsymbol{A}$ в кожному з незалежних випробувань постійна і дорівнює **0,3**. Відомо, що ймовірність настання події $\boldsymbol{A}$ не менше **600** й не більше $\boldsymbol{m}$ разів, при **2 100** випробуваннях дорівнює **0,8469**. Знайти $\boldsymbol{m}$.

8. Ймовірність промаху при одному пострілі становить **0,2**. При якому мінімальному числі пострілів ймовірність того, що буде зроблено не менше **2** промахів, становитиме не менше **0,9**?

9. Знайти ймовірність того, що з **600** мешканців села хоча б троє народилися 20 травня. Прийняти, що дні народження розподілені рівномірно.

10. Імовірність прихованого дефекту виробу, не виявленого технічним контролем, дорівнює **0,02**. Вироби укладаються в коробки по **100** штук. Яка ймовірність того, що в окремо взятій коробці буде не більше двох дефектних виробів?

Завдання 8. Скласти ряд розподілу вказаної випадкової величини X і знайти її функцію розподілу $F(x)$, обчислити математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

1. На шляху вершника **4** перешкоди, які він може подолати з імовірностями відповідно $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}4$, $p_4 = 0{,}5$. Випадкова величина X – число подоланих перешкод.

2. Імовірність безвідмовної роботи впродовж гарантійного терміну для приладів першого типу дорівнює **0,9**, для приладів другого типу – **0,7**, для приладів третього типу – **0,8**. Випадкова величина X – число приладів, які безвідмовно пропрацювали гарантійний термін, серед трьох приладів різних типів.

3. В урні міститься **6** куль, **4** з яких – білі. Навмання взято одразу **3** кулі. Випадкова величина X – число білих куль серед узятих.

4. При усталеному технологічному процесі підприємство випускає **2/3** виробів вищого гатунку і **1/3** першого гатунку. Випадкова величина X – число виробів вищого гатунку з чотирьох, взятих навмання.

5. З **20** деталей, серед яких **5** нестандартних, для перевірки якості навмання відібрані **4** деталі. Випадкова величина X – число нестандартних деталей серед відібраних.

6. За статистичними даними хоча б одна пожежа, яка потребує виїзду пожежної команди, за даний період часу може виникнути у трьох районах міста відповідно з імовірностями $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$. Випадкова величина X – число районів, у які за даний період пожежна команда виїжджала хоча б один раз (хибні виклики не враховуються).

7. Гра полягає в накиданні кілець на кілочок. Два гравці отримують по **4** кільця і одночасно кидають по одному з цих кілець до першого влучення на кілочок. Ймовірність влучення при одному кидку для першого гравця складає **0,2**, а для другого – **0,3**. Випадкова величина X – кількість зроблених кидків.

8. Прилад комплектується з двох вузлів, імовірності браку яких становлять відповідно **0,1** та **0,05**. Прилад вважається бракованим, якщо бракований хоча б один з його вузлів. Навмання відібрані **4** прилади. Випадкова величина X – число бракованих приладів серед відібраних.

9. Гральну кістку кидають **3** рази. Випадкова величина X – число випадінь шістки.

10. На спортивних змаганнях за жеребом з **10** юнаків та **5** дівчат відбирають **3** членів суддівської бригади. Випадкова величина X – число дівчат серед відібраних.

Завдання 9. Дана щільність розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X. Знайти C, функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ та ймовірність попадання випадкової величини X у відрізок $\left[M(X)-\sigma(X),\, M(X)+\sigma(X)\right]$.

1. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{1+x^2}, & x\in\left[0,\sqrt{3}\right];\\ 0, & x\notin\left[0,\sqrt{3}\right].\end{cases}$$

2. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}, & x\in\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right];\\ 0, & x\notin\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right].\end{cases}$$

3. $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{x}, & x\in\left[\dfrac{1}{e},e\right];\\ 0, & x\notin\left[\dfrac{1}{e},e\right].\end{cases}$$

4. $$f(x)=\begin{cases}C(2x-x^2), & x\in\left[0,1\right];\\ 0, & x\notin\left[0,1\right].\end{cases}$$

5. $f(x)=\begin{cases} Cx(1-x), & x\in[0,1]; \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$ 6. $f(x)=\begin{cases} C\sqrt[3]{1-x}, & x\in[0,1]; \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} C\ln x, & x\in[1,e]; \\ 0, & x\notin[1,e]. \end{cases}$ 8. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{C}{(1+x)^2}, & x\in[0,1]; \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} C\sqrt{1-x}, & x\in[0,1]; \\ 0, & x\notin[0,1]. \end{cases}$ 10. $f(x)=\begin{cases} C\left(1-\dfrac{x}{3}\right), & x\in[0,3]; \\ 0, & x\notin[0,3]. \end{cases}$

Завдання 10. Розв'язати задачу.

1. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X дорівнюють відповідно **30** і **4**. Знайти ймовірність того, що X у п'яти випробуваннях три рази прийме значення з інтервалу $(29, 31)$.

2. Встановлено, що тривалість безвідмовної роботи двох верстатів, що працюють незалежно один від одного, є випадковими величинами, розподіленими за показниковим законом з параметрами $\lambda_1 = 0{,}001$, $\lambda_2 = 0{,}002$. Відомо також, що ймовірність безвідмовної роботи обох верстатів протягом не менше t годин складає **0,1225**. Знайти час t.

3. Світлофор, встановлений на деякому перехресті, дозволяє рух транспорту (зелене світло) протягом 1 хвилини і забороняє (червоне світло) протягом 45 секунд. Знайти ймовірність того, що автомобіль, який під'їхав до перехрестя у випадковий момент часу, проїде на зелене світло.

4. Вимірювання дальності до об'єкта супроводжується систематичними і випадковими помилками. Систематична помилка складає **50** м у бік заниження дальності, випадкові ж помилки підпорядковуються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 100$ м. Знайти ймовірність вимірювання дальності з помилкою, що за абсолютною величиною не перевищує **150** м.

5. Три робота на автоматичній лінії по зваріванню кузовів автомобілів працюють незалежно один від одного. Тривалості їх безвідмовної роботи є випадковими величинами, розподіленими за показниковим законом з параметрами $\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}01}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = 0{,}02}$, $\boldsymbol{\lambda_3 = 0{,}03}$. Знайти ймовірність того, що протягом **8** годин з моменту увімкнення лінія зупиниться через одночасну відмову двох роботів.

6. Час виготовлення деталі – випадкова величина, що рівномірно розподілена на відрізку **[4, 6]** хв. Виготовлено **4** деталі. Знайти ймовірність того, що час виготовлення кожної з деталей відхиляється від середнього не більше ніж на **40** сек.

7. Кулька, яку виготовляє автомат, вважається стандартною, якщо відхилення її диаметра від проектного не перевищує **2** мм. Випадкові відхилення диаметрів кульок підпорядковуються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням **1,6** мм і математичним сподіванням, що дорівнює нулю. Який відсоток стандартних кульок виготовляє автомат?

8. Час безвідмовної роботи кожного з двох пристроїв, що працюють незалежно один від одного, є випадковими величинами, розподіленими за показниковим законом з параметрами $\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}002}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = \lambda}$. Визначити середній час безвідмовної роботи другого пристрою, якщо ймовірність того, що обидва пристрої спільно пропрацюють без відмов не менше **600** годин, складає $\boldsymbol{0{,}2231}$.

9. Процентний вміст домішки, що міститься в деякому продукті, є випадковою величиною, розподіленою рівномірно на відрізку **[1.8, 4.0]**. Знайти ймовірність того, що продукт містить від **2** до **3%** домішки.

10. Відомо, що дисперсія нормально розподіленої випадкової величини $\boldsymbol{X}$ дорівнює **81**, а $\boldsymbol{P(X < 37) = 0.97128}$. Знайдіть середнє значення цієї величини.

ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Номер варіанта контрольної роботи, що виконується, повинен співпадати з ДВОМА останніми цифрами номера залікової книжки. Номери задач з кожного завдання вибираються з таблиці, наведеної нижче.

Виконана контрольна робота переписується в окремий зошит. Розв'язки задач наводяться зі збереженням номерів задач, у порядку зростання цих номерів. Перед розв'язком кожної задачі треба повністю виписати її умову. Робота з не усіма виконаними задачами, або ж з такими, що повністю або частково не відповідають даному варіанту, вважається виконаною невірно.

СКЛАД ВАРІАНТІВ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Номер варіанта	Завд. 1	Завд. 2	Завд. 3	Завд. 4	Завд. 5	Завд. 6	Завд. 7	Завд. 8	Завд. 9	Завд. 10
00	6	6	4	5	6	1	6	4	5	6
01	4	7	3	9	10	6	4	2	9	10
02	3	4	9	6	5	7	3	9	6	5
03	9	3	8	1	1	4	9	8	1	1
04	1	10	10	3	3	5	1	10	3	3
05	10	2	2	2	9	3	10	3	2	9
06	2	8	1	8	2	10	2	1	8	2
07	8	9	7	4	8	2	8	7	4	8
08	7	5	6	7	7	8	7	6	7	7
09	5	1	5	10	4	9	5	5	10	4
10	4	10	7	3	3	4	3	7	3	3
11	1	2	1	7	5	6	2	1	7	5
12	9	9	5	1	1	5	9	5	1	1
13	7	7	3	4	7	9	7	3	4	7
14	5	6	2	10	10	8	6	2	10	10
15	8	4	10	8	6	7	4	10	8	6
16	6	8	4	5	8	10	8	4	5	8
17	10	3	6	2	4	2	10	6	2	4
18	3	5	9	9	9	1	5	9	9	9
19	2	1	8	6	2	3	1	8	6	2
20	5	6	6	8	5	10	6	6	10	5
21	2	9	9	2	3	7	9	9	2	3
22	9	2	2	9	4	6	2	2	9	4
23	4	7	7	4	7	4	7	7	4	7
24	1	10	10	1	9	1	10	10	1	9
25	6	5	5	7	6	2	5	5	7	8

26	7	4	4	6	2	3	4	4	6	2
27	8	3	3	5	8	5	3	3	5	6
28	3	8	8	3	1	8	8	8	3	1
29	10	1	1	10	10	9	1	1	8	10
30	5	6	6	1	5	4	6	6	1	5
31	4	5	5	2	10	6	5	5	2	10
32	7	10	8	6	6	5	10	8	6	6
33	3	4	4	3	1	10	4	4	3	1
34	9	9	10	9	3	7	9	10	9	3
35	6	7	7	5	8	3	7	7	5	8
36	2	1	2	8	7	2	1	2	8	7
37	10	8	9	10	4	8	8	9	10	4
38	1	2	3	4	2	9	2	3	4	2
39	8	3	1	7	9	1	3	1	7	9
40	6	4	7	4	7	1	4	7	4	7
41	5	10	5	3	10	9	10	5	3	10
42	2	3	8	7	6	4	3	8	7	8
43	10	7	4	2	1	8	7	4	2	1
44	1	5	9	8	5	3	5	9	8	5
45	4	2	3	5	2	5	2	3	5	2
46	3	6	6	10	4	2	6	6	10	4
47	8	8	2	6	8	7	8	2	6	6
48	9	1	10	9	3	6	1	10	9	3
49	7	9	1	1	9	10	9	1	1	9
50	10	2	1	7	8	3	2	1	7	8
51	9	8	2	8	1	4	8	2	8	1
52	8	9	3	6	6	5	9	3	6	6
53	7	7	5	5	5	6	7	5	5	5
54	1	1	10	9	4	7	1	10	9	4
55	5	5	6	3	9	10	5	6	3	9
56	4	4	7	2	3	8	4	7	2	3
57	3	3	8	1	10	9	3	8	1	10
58	2	10	9	10	7	2	10	9	10	7
59	6	6	4	4	2	1	6	4	4	2
60	9	10	1	5	8	1	10	1	5	8
61	3	8	4	7	7	2	8	4	7	7
62	5	7	7	3	10	9	7	7	3	10
63	6	4	2	9	4	5	4	2	9	4
64	8	6	5	1	3	6	6	5	1	3
65	10	9	9	8	2	7	9	6	8	2
66	7	1	3	6	6	3	1	3	6	6
67	4	5	6	2	1	8	5	9	2	1
68	1	3	10	4	5	4	3	10	4	5
69	2	2	8	10	9	10	2	8	10	9
70	10	6	7	2	6	8	6	7	2	6
71	6	7	6	9	1	6	7	6	9	1
72	7	10	2	6	7	9	10	2	6	7
73	1	1	9	5	5	7	1	9	5	5
74	9	9	3	4	8	10	9	3	4	8

75	**8**	**8**	**4**	**3**	**10**	**5**	**8**	**4**	**3**	**10**
76	**2**	**2**	**10**	**8**	**2**	**4**	**2**	**10**	**8**	**2**
77	**3**	**3**	**8**	**10**	**4**	**3**	**3**	**8**	**10**	**4**
78	**5**	**5**	**5**	**1**	**3**	**2**	**5**	**5**	**1**	**3**
79	**4**	**4**	**1**	**7**	**9**	**1**	**4**	**1**	**7**	**9**
80	**8**	**7**	**1**	**6**	**6**	**4**	**7**	**1**	**6**	**6**
81	**10**	**1**	**3**	**7**	**8**	**5**	**1**	**3**	**7**	**8**
82	**6**	**10**	**4**	**3**	**3**	**1**	**10**	**4**	**3**	**3**
83	**9**	**6**	**2**	**8**	**7**	**10**	**6**	**2**	**8**	**7**
84	**5**	**9**	**5**	**9**	**10**	**3**	**9**	**5**	**9**	**10**
85	**7**	**8**	**7**	**10**	**9**	**2**	**8**	**7**	**10**	**9**
86	**1**	**2**	**10**	**5**	**5**	**6**	**2**	**10**	**5**	**5**
87	**3**	**5**	**8**	**1**	**1**	**7**	**3**	**8**	**1**	**1**
88	**4**	**4**	**6**	**2**	**4**	**8**	**5**	**6**	**2**	**4**
89	**2**	**3**	**9**	**4**	**2**	**9**	**4**	**9**	**4**	**2**
90	**8**	**9**	**8**	**8**	**4**	**4**	**9**	**8**	**8**	**4**
91	**4**	**6**	**1**	**4**	**2**	**2**	**6**	**1**	**4**	**2**
92	**10**	**1**	**9**	**6**	**7**	**7**	**1**	**9**	**6**	**7**
93	**3**	**3**	**7**	**1**	**10**	**10**	**3**	**7**	**1**	**10**
94	**7**	**2**	**3**	**5**	**6**	**6**	**2**	**3**	**5**	**6**
95	**5**	**4**	**2**	**7**	**5**	**5**	**4**	**2**	**7**	**5**
96	**6**	**10**	**6**	**10**	**9**	**9**	**10**	**6**	**10**	**9**
97	**1**	**5**	**10**	**2**	**3**	**3**	**5**	**10**	**2**	**3**
98	**2**	**7**	**5**	**3**	**8**	**8**	**7**	**5**	**3**	**8**
99	**9**	**8**	**4**	**9**	**1**	**1**	**8**	**4**	**9**	**1**

ДОДАТКИ

Додаток 1

ЗОБРАЖЕННЯ ОСНОВНИХ ОРИГІНАЛІВ

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ
Одинична функція Хевісайда $\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$	$\frac{1}{p}$
e^t	$\frac{1}{p-1}$

$\sin t$	$\dfrac{1}{p^2+1}$
$\cos t$	$\dfrac{p}{p^2+1}$
$sh\, t$	$\dfrac{1}{p^2-1}$
$ch\, t$	$\dfrac{p}{p^2-1}$

Додаток 2

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

ОРИГІНАЛ	ЗОБРАЖЕННЯ
Лінійність	
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i(p)$
Подібність	
$f(\alpha t) \quad (\forall \alpha > 0)$	$\dfrac{1}{\alpha} F\left(\dfrac{p}{\alpha}\right) \quad (\forall \alpha > 0)$
Зокрема, e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$

$sh(at)$	$\dfrac{a}{p^2 - a^2}$
$ch(at)$	$\dfrac{p}{p^2 - a^2}$
Зміщення	
$e^{-\alpha t} f(t) \quad (\forall \alpha)$	$F(p+\alpha) \quad (\forall \alpha)$
Зокрема, $e^{-bt} \sin t$	$\dfrac{1}{(p+b)^2 + 1}$
$e^{-bt} \cos t$	$\dfrac{p+b}{(p+b)^2 + 1}$
Запізнювання	
$f(t - t_0) \cdot \eta(t - t_0) \quad (\forall t_0 > 0)$	$e^{-t_0 p} F(p) \quad (\forall t_0 > 0)$
Зокрема, $\eta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1, & t \ge t_0 \end{cases}$ ***(узагальнена одинична функція)***	$e^{-t_0 p} \cdot \dfrac{1}{p}$
Диференціювання оригіналу	
$f(t)$	$F(p)$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
$f''(t)$	$p^2 F(p) - p\, f(0) - f'(0)$
$f'''(t)$	$p^3 F(p) - p^2 f(0) - p\, f'(0) - f''(0)$
……………………………………. $f^{(n)}(t)$	………………………………………. $p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0)$, $f^{(i)}(0) = \lim_{t \to 0+0} f^{(i)}(t) \quad (i = 0, 1, ..., n-1)$
Інтегрування оригіналу	

$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{F(p)}{p}$
Диференціювання зображення	
$f(t)$	$F(p)$
$t \cdot f(t)$	$-F'(p)$
$t^2 f(t)$	$F''(p)$
$t^3 f(t)$	$-F'''(p)$
………………………………………. $t^n f(t)$	………………………………………………. $(-1)^n F^{(n)}(p)$
Зокрема, t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
Інтегрування зображення	
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(q)dq$
Зокрема, $\dfrac{\sin t}{t}$	$\dfrac{\pi}{2} - arctg\, p$
Згортка	
$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$	
Теорема Бореля	
$f(t) * g(t)$	$F(p) \cdot G(p)$

Інтеграли Дюамеля	
$\int_0^t f(\tau)\cdot g'(t-\tau)d\tau + f(t)\cdot g(0)$ $\int_0^t g'(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau + f(t)\cdot g(0)$ $\int_0^t g(\tau)\cdot f'(t-\tau)d\tau + f(0)\cdot g(t)$ $\int_0^t f'(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau + f(0)\cdot g(t)$	$p\cdot F(p)\cdot G(p)$

Додаток 3

ОРИГІНАЛИ ДЕЯКИХ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

ЗОБРАЖЕННЯ	ОРИГІНАЛ
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{-at}-be^{-bt}\right)$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	te^{-at}
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)\,e^{-at}$

$\dfrac{1}{p^2(p+a)}$	$\dfrac{1}{a^2}\left(e^{-at}+at-1\right)$
$\dfrac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\dfrac{1}{ab(a-b)}\left(a-b+be^{-at}-ae^{-bt}\right)$
$\dfrac{1}{p(p+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}\left[1-e^{-at}(1+at)\right]$
$\dfrac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}-(b-a)te^{-bt}\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2}\left[-ae^{-at}+a+b(b-a)te^{-bt}\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)^3}$	$te^{-at}\left(1+\dfrac{a}{2}t\right)$
$\dfrac{p^2}{(p+a)^3}$	$e^{-at}\left(1-2at+\dfrac{a^2}{2}t^2\right)$
$\dfrac{1}{p[(p+b)^2+a^2]}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-bt}\left(\cos(at)+\dfrac{b}{a}\sin(at)\right)\right]$
$\dfrac{1}{p(p^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}[1-\cos(at)]$
$\dfrac{2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\sin^2(at)$
$\dfrac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}$	$\cos^2(at)$
$\dfrac{1}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[e^{-at}+\dfrac{a}{b}\sin(bt)-\cos(bt)\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[-ae^{-at}+a\cos(bt)+b\sin(bt)\right]$
$\dfrac{p^2}{(p+a)(p^2+b^2)}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left[a^2e^{-at}-ab\sin(bt)+b^2\cos(bt)\right]$
$\dfrac{1}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[e^{-at}-e^{-bt}\cos(ct)+\right.$ $\left.+\dfrac{a-b}{c}e^{-bt}\sin(ct)\right]$
$\dfrac{p}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\dfrac{1}{(b-a)^2+c^2}\left[-ae^{-at}+ae^{-bt}\cos(ct)-\right.$

	$-\frac{ab-b^2-c^2}{c}e^{-bt}\sin(ct)\Big]$
$\frac{p^2}{(p+a)[(p+b)^2+c^2]}$	$\frac{1}{(b-a)^2+c^2}\Big[a^2e^{-at}+[(a-b)^2+c^2-a^2]\,e^{-bt}\cdot$ $\cdot\cos(ct)-\left\{ac+b\left(c-\frac{(a-b)b}{c}\right)\right\}e^{-bt}\sin(ct)\Big]$
$\frac{1}{p^3(p+a)}$	$\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^2}t+\frac{1}{2a}t^2-\frac{1}{a^3}e^{-at}$
$\frac{1}{p^2(p+a)(p+b)}$	$-\frac{a+b}{a^2b^2}+\frac{1}{ab}t+\frac{1}{a^2(b-a)}e^{-at}+\frac{1}{b^2(a-b)}e^{-bt}$
$\frac{1}{p^2(p+a)^2}$	$\frac{1}{a^2}t\left(1+e^{-at}\right)+\frac{2}{a^3}\left(e^{-at}-1\right)$
$\frac{1}{(p+a)^2(p+b)^2}$	$\frac{1}{(a-b)^2}\left[e^{-at}\left(t+\frac{2}{a-b}\right)+e^{-bt}\left(t-\frac{2}{a-b}\right)\right]$
$\frac{1}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{1}{a}\sin(at)-\frac{1}{b}\sin(bt)\right]$
$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[\cos(at)-\cos(bt)]$
$\frac{p^2}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[-a\sin(at)+b\sin(bt)]$
$\frac{p^3}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$	$\frac{1}{b^2-a^2}[-a^2\cos(at)+b^2\cos(bt)]$
$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}t\sin(at)$
$\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}[\sin(at)+at\cos(at)]$
$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$	$t\cdot\cos(at)$
$\frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$	$t\cdot sh(at)$
$\frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$	$t\cdot ch(at)$

$\dfrac{p^3}{(p^2+a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2}\left[\,2\cos(at)-at\sin(at)\right]$
$\dfrac{1}{[(p+b)^2+a^2]^2}$	$\dfrac{1}{2a^2}e^{-bt}\left[\dfrac{1}{a}\sin(at)-t\cos(at)\right]$
$\dfrac{1}{p^2(p^2+a^2)}$	$\dfrac{1}{a^2}\left[t-\dfrac{1}{a}\sin(at)\right]$
$\dfrac{a(p^2+a^2-b^2)}{[p^2+(a-b)^2][p^2+(a+b)^2]}$	$\sin(at)\cdot\cos(bt)$

Додаток 4

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,3989**	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	**0,2420**	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518

1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	**0,0540**	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	**0,0044**	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0008	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 5

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	**0,00000**	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	**0,34134**	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774

1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	**0,47725**	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3,0	**0,49865**									
3,1	49903									
3,2	49931									
3,3	49952									
3,4	49966									
3,5	**0,49977**									
3,6	49984									
3,7	49989									
3,8	49993									
3,9	49995									
4,0	**0,499968**									
4,5	**0,499997**									
5,0	**0,49999997**									