МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з дисципліни

«СУЧАСНА ТЕОРІЯ УПРАВЛІННЯ»

для студентів спеціальності 122 - «Комп'ютерні науки»
денної форми навчання

Дніпро НМетАУ 2019

УДК 681.3.07

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Сучасна теорія управління» для студентів спеціальності 122 – «Комп'ютерні науки» денної форми навчання/Укл. А.О. Журба. - Дніпро: НМетАУ, 2019 – 50 с.

Методичні вказівки містять навчально-методичні матеріали з дисципліни «Сучасна теорія управління»; знайомлять студентів з алгоритмами лінеаризації нелінійних залежностей, моделями в змінних стану та їх властивостями..

Призначені для студентів спеціальності 122 денної форми навчання, а також для слухачів курсів підвищення кваліфікації, студентів і аспірантів інших спеціальностей.

Укладачі: А.О. Журба, канд. техн. наук, доцент,

Друкується за авторською редакцією.

Затверджено на засіданні кафедри інформаційних технологій і систем, протокол № 9 від 06.03.2019 р.

Відповідальний за випуск О.І. Михальов, д-р техн. наук, проф.

Рецензент : О.І. Дерев'янко, канд. техн. наук, доцент (ДНУ)

Національна металургійна академія України.
49600, Дніпро, пр. Гагаріна, 4

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторна робота №1

ДОТИЧНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

Теоретичні відомості

Під *лінеаризацією* розуміють процедуру заміни в околі робочої точки або опорної траєкторії нелінійної моделі лінійною.

Основний зміст гіпотези лінеаризації полягає в тому, що відмінність в розв'язках нелінійних рівнянь і їх лінеаризованих представлень не така вже істотна, щоб приводити до недопустимих похибок при розв'язанні поставленої задачі.

Найбільш поширеними є описані нижче методи лінеаризації.

Перший метод лінеаризації. Нелінійна функція є аналітичною в робочій області і її можна розкласти в ряд Тейлора.

Так , якщо змінні стану об'єкта $x(t) = [x_1(t)x_2(t)...x_n(t)]^T$ пов'язані з вхідними $u(t) = [u_1(t)u_2(t)...u_m(t)]$ та вихідними $y(t) = [y_1(t)y_2(t)...y_r(t)]$ змінними за допомогою нелінійних рівнянь

$$dx(t)/dt = f(x(t),u(t),t), \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = g(x(t),u(t),t), \tag{1.1}$$

то , лінеаризуючи перше з них цим методом при умові наявності малих приростів $\Delta x(t)$, $\Delta x^{(1)}(t)$, $\Delta u(t)$ відносно стану рівноваги $f(x_0,u_0) = 0$ отримаємо лінійне рівняння

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_o \\ u=u_o}} \cdot \Delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_o \\ u=u_o}} \cdot \Delta u(t), \tag{1.2}$$

де

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & .... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & .... & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & ... & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

– матриці Якобі, x_0 – стан рівноваги при фіксованому управлінні u_0 і малих Δu.

Із другого рівняння системи (1.1) також отримаємо лінійне рівняння

$$\Delta y(t)=\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_o\\u=u_o}}\cdot\Delta x(t)+\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_o\\u=u_o}}\cdot\Delta u(t), \qquad (1.3)$$

з наступними значеннями частинних похідних:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & .... & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1} & \frac{\partial g_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_n}\end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial g}{\partial u}=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & .... & \frac{\partial g_1}{\partial u_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial g_r}{\partial u_1} & \frac{\partial g_r}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial u_m}\end{bmatrix}$$

Якщо виконати лінеаризацію відносно опорної траєкторії програмного руху з параметрами $x(t)=x_n(t)$, $u(t)=u_n(t)$, $y(t)=y_n(t)$, то система (1.1) буде мати вигляд :

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_n(t)\\u=u_n(t)}}\cdot\Delta x(t)+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_n(t)\\u=u_n(t)}}\cdot\Delta u(t),$$
$$\Delta y(t)=\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_n(t)\\u=u_n(t)}}\cdot\Delta x(t)+\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_n(t)\\u=u_n(t)}}\cdot\Delta u(t), \qquad (1.4)$$

Лінеаризовані рівняння (1.2) , (1.3) динамічних моделей можна записати у векторно-матричній формі:

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t),$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t), \qquad (1.5)$$

де $\mathrm{A}=\left\|\mathrm{a}_{\mathrm{i,j}}\right\|$, $B=\left\|b_{i,j}\right\|$, $C=\left\|c_{i,j}\right\|$, $D=\left\|d_{i,j}\right\|$ – матриці з незмінними елементами розмірів $(n\times n)$, $(n\times m)$, $(r\times n)$, $(r\times m)$ відповідно.

Лінеаризація системи (1.4) дасть

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+B(t)u(t),$$
$$y(t)=C(t)x(t)+D(t)u(t), \qquad (1.6)$$

де $\mathrm{A(t)}=\left\|\mathrm{a_{i,j}(t)}\right\|$, $\mathrm{B(t)}=\left\|\mathrm{b_{i,j}(t)}\right\|$, $\mathrm{C(t)}=\left\|\mathrm{c_{i,j}(t)}\right\|$, $\mathrm{D(t)}=\left\|\mathrm{d_{i,j}(t)}\right\|$ – змінні у часі матриці тих же порядків , що і в системі (1.5).

Другий метод лінеаризації . В ньому замість безпосереднього визначення частинних похідних в задані нелінійні рівняння вводяться змінні:

$$x(t)=x_0(t)+\Delta x(t),$$
$$u(t)=u_0(t)+\Delta u(t), \qquad (1.7)$$
$$y(t)=y_0(t)+\Delta y(t)$$

Усі складові , що стоять в правих частинах нелінійних рівнянь (1.1), отриманих після підстановки (1.7) , розбиваємо на три групи:

- складові , які не мають приростів $\Delta x(t)$ та $\Delta u(t)$;
- складові , які мають прирости $\Delta x(t)$ та $\Delta u(t)$ у вигляді простих множників;
- складові , які мають добутки або степені приростів $\Delta x(t)$ та $\Delta u(t)$.

Вважаючи прирости $\Delta x(t)$ та $\Delta u(t)$ малими по відношенню до відповідних координат опорної траєкторії ($x_o(t)$ та $u_o(t)$), можна знехтувати складовими третьої групи . Що ж стосується складових першої групи , то вони визначають опорний рух , а складові другої групи – рух у відхиленнях ($\Delta x(t), \Delta u(t)$) від опорної траєкторії ($x_o(t)$ та $u_o(t)$).

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Лінеаризуємо диференціальне рівняння

$$m(t)\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2}+k\left(\frac{\partial h(t)}{\partial t}\right)^2+m(t)\cdot g=p\cdot\frac{\partial m(t)}{\partial t}$$

відносно опорної траєкторії : $m(t)=m_0(t)+\Delta m(t)$ та $h(t)=h_0(t)+\Delta h(t)$.

Підставивши співвідношення , які складають опорну траєкторію в задане диференціальне рівняння , отримаємо :

$$\left[m_0(t)+\Delta m(t)\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[h_0(t)+\Delta h(t)\right]+k\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[h_0(t)+\Delta h(t)\right]\right\}^2+$$
$$+\left[m_0(t)+\Delta m(t)\right]g=p\frac{\partial}{\partial t}\left[m_0(t)+\Delta m(t)\right]$$

Із записаного вище рівняння маємо дві залежності:

а) відносно опорної траєкторії

$$m_0(t)\frac{\partial^2 h_0(t)}{\partial t^2}+k\left(\frac{\partial h_0(t)}{\partial t}\right)^2+m_0(t)\cdot g=p\cdot\frac{\partial m_0(t)}{\partial t}$$

б) в приростах (лінійне рівняння)

$$\frac{\partial^2 h_0(t)}{\partial t^2}\Delta m(t)+m_0(t)\frac{\partial^2 \Delta h(t)}{\partial t^2}+2k\frac{\partial h_0(t)}{\partial t}\cdot\frac{\partial \Delta h(t)}{\partial t}+g\cdot m(t)=p\cdot\frac{\partial \Delta m(t)}{\partial t}$$

Приклад 2. Виконаємо лінеаризацію моделі

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1^2(t) + x_2^2(t) - 17; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) \cdot x_2(t) - 4; \end{cases}$$

$$y(t) = x_1^2(t) \cdot x_2(t)$$

об'єкта керування в околі точки рівноваги , де $\dfrac{dx_1(t)}{dt} = \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 0$

Для знаходження точки, в якій будемо здійснювати лінеаризацію, розв'яжемо систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1^2(t) + x_2^2(t) - 17 = 0 \\ x_1(t) \cdot x_2(t) - 4 = 0 \end{cases}$$

Одним із розв'язків цієї системи є пара (x_1^*, x_2^*) = (4; 1).

Скориставшись першим методом лінеаризації , отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta x_1(t)}{dt} = a_{11}\Delta x_1(t) + a_{12}\Delta x_2(t); \\ \dfrac{d\Delta x_2(t)}{dt} = a_{21}\Delta x_1(t) + a_{22}\Delta x_2(t); \end{cases}$$

$$\Delta y(t) = c_1 \Delta x_1(t) + c_2 \Delta x_2(t),$$

де

$$a_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x_1^*, x_2^*)} = 2x_1^* = 8 \; ; \qquad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x_1^*, x_2^*)} = 2x_2^* = 2 \; ;$$

$$a_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x_1^*, x_2^*)} = x_2^* = 1 \; ; \qquad a_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x_1^*, x_2^*)} = x_1^* = 4 \; ;$$

$$c_1 = \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{(x_1^*, x_2^*)} = 2x_1^* x_2^* = 8 \; ; \qquad c_2 = \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{(x_1^*, x_2^*)} = [x_1^*]^2 = 16.$$

Тут $f_1 = x_1^2 + x_2^2 - 17$, $f_2 = x_1 \cdot x_2 - 4$, $g = x_1^2 \cdot x_2^2$.

Приклад 3. Лінеаризуємо функцію $y = x_1 \cdot x_2^2$ в околі точки (x_1^*, x_2^*) .

Нехай $y^* = x_1^* \cdot [x_2^*]^2$ *та* $x_1 = x_1^* + x_1$, $x_2 = x_2^* + x_2$, $y = y^* + \Delta y^*$.

Тоді після підстановки цих виразів у заданий отримаємо :

$$y^* + \Delta y = (x_1^* + \Delta x_1) \cdot (x_2^* + \Delta x_2)^2 = x_1^* \cdot [x_2^*]^2 + 2x_1^* x_2^* \Delta x_2 + x_1^* \cdot (\Delta x_2)^2 +$$
$$+ (x_2^*)^2 \cdot \Delta x_1 + 2x_2^* \Delta x_1 \Delta x_2 + \Delta x_1 (\Delta x_2)$$

Оскільки

$$\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \approx 0 \ , \quad [\Delta x_2]^2 \approx 0 \ , \quad \Delta x_1 \cdot [\Delta x_2]^2 \approx 0 \, ,$$

то

$$\Delta y = [x_2^*]^2 \Delta x_1 + 2x_1^* x_2^* \Delta x_2 \, . \qquad (1.8)$$

Такий же самий результат можна отримати , якщо скористатися виразом повного диференціалу функції y :

$$dy = x_2^2 dx_1 + 2x_1 x_2 dx_2$$

Замінивши x_1 та x_2^* на x_1 та x_2^* , а диференціали dx_1 , dx_2 та dy на прирости Δx_1 , Δx_2 та Δy , отримаємо (1.8).

Завдання для лабораторної роботи №1

Виконати лінеаризацію наведених нижче систем в околі їх точок рівноваги.

1) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_2 e^{x_1}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_2^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1 x_2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_1 \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 \cdot x_2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2, \\ \dot{x}_2 = \ln x_1, x_1 > 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 (x_2 - 1), \\ \dot{x}_2 = x_2 (x_1 + x_1^2); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + \sin x_2 - 1, \\ \dot{x}_2 = sh(x_1 - 1); \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + e^{x_2}, \\ \dot{x}_2 = x_2 (1 + x_2); \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 - 3x_1 + 2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2^2; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_1 + x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - e^{x_1}, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - 1; \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 + x_i x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^2; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} \dot{x}_1 = e^{x_1 + x_2} - 1, \\ \dot{x}_2 = x_2; \end{cases}$

15) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = \sin x_2; \end{cases}$ 16) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1^2), \\ \dot{x}_2 = x_2; \end{cases}$

17) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_2; \end{cases}$ 18) $\begin{cases} \dot{x}_1 = (2 - x_1 - 2x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (2 - x_2 - 2x_1)x_2; \end{cases}$

19) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - 2x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_2(3 - 2x_2); \end{cases}$ 20) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sin(x_1 + 2x_2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \ln(1 - x_2); \end{cases}$

21) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + 3x_1^5; \end{cases}$ 22) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2^2 + 7, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 - 13; \end{cases}$

23) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1; \end{cases}$ 24) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1; \end{cases}$

25) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - 1, \\ \dot{x}_2 = \ln(x_1^2 - x_2); \end{cases}$ 26) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 1 - x_1 - x_2 + x_i x_2, \\ \dot{x}_2 = x_i x_2 - 2; \end{cases}$

27) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1 - \cos x_2, \\ \dot{x}_2 = \sin^2 x_1 + 1 - e^{x_2}; \end{cases}$ 28) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4\sin x_1 + \ln(1 + x_2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x^2{}_i x_2; \end{cases}$

29) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2; \end{cases}$ 30) $\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin 2x_1, \\ \dot{x}_2 = 3\cos x_2. \end{cases}$

Лабораторна робота №2

МОДЕЛІ В ЗМІННИХ СТАНУ І ЇХ ПРЕДСТАВЛЕННЯ В РІЗНИХ БАЗИСАХ. ПОБУДОВА СТРУКТУРНИХ СХЕМ

Теоретичні відомості

При визначенні будь-якого поняття виникає потреба оперувати іншими, більш простими . У цьому розумінні поняття «*стан*» є первинним, оскільки немає більш простого поняття, за допомогою якого можна було б визначити, що таке стан динамічного об'єкта (системи). В теорії систем стан як первинне поняття не визначено. З'ясувати сенс цього поняття можна лише за допомогою різних прикладів.

Характеристика поняття «*стан*» дається, виходячи із тієї ролі, яку воно відіграє в описі об'єкта управління. Дійсно, один і той же вхідний сигнал електричного ланцюга зумовлює різні вихідні сигнали, якщо не фіксувати величину струму , що протікає через індуктивність, і напругу на ємності в момент часу t.

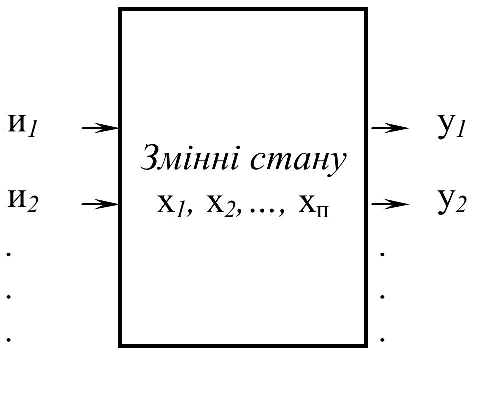
Задіяння проміжних змінних пов'язане з бажанням усунути вказану вище неоднозначність між вхідними та вихідними сигналами об'єкта управління.

Називаючи проміжні змінні *станом об'єкта*, поняття «*стан*» можна трактувати як мінімальну сукупність змінних , що має всю інформацію відносно попередньої поведінки об'єкта, яка необхідна для того, щоб судити про його майбутню поведінку, тобто для визначення його реакції на довільний вхідний вплив.

*Вимога мінімуму проміжних змінних у визначенні поняття «*стан*» пов'язана з необхідністю усунення надмірності в описі останнього.*

З математичної точки зору станом системи можуть бути початкові умови в момент t_0 *для розв'язання системи диференціальних або різницевих рівнянь, оскільки різним початковим умовам відповідають різні розв'язки, які можна також розглядати як змінні стану.*

Узагальнюючи вищесказане, відмітимо, що при аналізі будь-якої системи усі змінні, які її характеризують або які мають до неї будь-яке відношення, можна поділити на три групи (рис.2.1) :



- *вхідні змінні* $u = (u_1, u_2, \ldots u_m)$ *– змінні, що характеризують зовнішній вплив на входи системи;*
- *змінні стану* $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ *– внутрішні, проміжні змінні, сукупність яких повністю характеризує властивості системи;*
- *вихідні зміні* $y = (y_1, y_2, \ldots y_r)$ *– реакція*

системи на зовнішні впливи і той стан, який цікавить дослідника.

Рис.2.1. – Змінні, що характеризують систему

Виходячи із вищесказаного відмітимо що модель системи із введеним поняттям стану володіє такими властивостями:

- *вихідний сигнал в даний момент часу однозначно визначається вхідним сигналом і станом в даний момент часу;*
- *стан в наступний момент часу однозначно визначається вхідним сигналом і станом в даний момент часу.*

Наведені вище властивості неперервних детермінованих моделей об’єктів (систем) можна, наприклад, подати парою рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

$$y(t) = \varphi(x(t), u(t)). \tag{2.2}$$

Диференціальне рівняння (2.1), яке називається рівнянням стану об’єкта *при* $x(t_0) = x_0$ *дає вектор стану*

$$x(t) = \psi(x_0, u(t)).$$

В свою чергу, рівняння (2.2) визначає вихідні змінні в залежності від x*(*t*)* *та* φ*(*t*). Тому його називають* вихідним рівнянням *(рівнянням виходу) об’єкта (системи) .*

В окремих випадках рівняння стану і рівняння виходу приймають свою специфічну форму :

- *для лінійної неперервної стаціонарної системи :*

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(t_0) = x_0; \qquad y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

(2.3)

- *для цифрового фільтра :*

$$x[(k+1)T] = Ax[kT] + Bu[kT], \qquad x[k_0T] = x_0; \qquad y[kT] = Cx[kT] + Du[kT].$$

- *для кінцевого автомата :*

$$S(n+1) = \delta(S(n), x(n)), \qquad S(0) = S_0; \qquad y(n) = \lambda(S(n), (n)).$$

Слід відмітити, що якісні властивості змінних стану при одних і тих же сигналах и*(*t*) і* у*(*t*) суттєво залежить від базису, який використовується для їх опису.*

Так, скориставшись підстановкою x(t) = R z(t)*, де* R = [$и_1 \vdots$ $и_2 \vdots \ldots \vdots и_т$] *- модальна матриця, тобто матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці* A *заданої системи, отримаємо записану нижче математичну модель в змінних стану:*

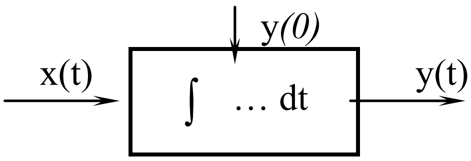
$$\frac{dz(t)}{dt} = \Lambda z(t) + \overline{B}u(t), \qquad z(0) = z_0;$$
$$y(t) = \overline{C}z(t) + \overline{D}u(t).$$

Тут $\Lambda = R^{-1}AR = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, λ_i, $(i = \overline{1,n})$ *– власні числа матриці* A, $\overline{B} = R^{-1}B$, $\overline{C} = CR$, $\overline{D} = D$.

Для цієї системи характерним є те , що всі її змінні стану є незалежними між собою.

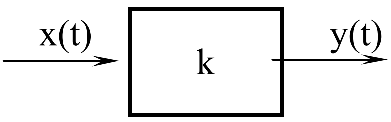
Часто динамічні моделі в змінних стану зображують за допомогою структурних схем, елементами яких є такі блоки:

а) *інтегратор*



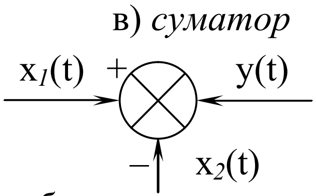
$$y(t) = \int_0^t x(\tau)\partial\tau + y(0)$$

б) *підсилювач*



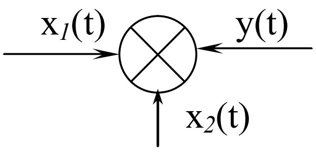
$$y(t) = kx(t)$$

в) *суматор*



$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

або



Скалярні величини на структурних схемах зображують одинарними стрілками , а векторні – подвійними .

Іноді бажано отримати математичну модель об'єкта (системи) в просторі стану спираючись на відоме діференціальне рівняння, яке описує його (її) динаміку.

Наприклад, диференціальне рівняння

$$a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+...+a_0 y(t)=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+...+b_0 u(t) \qquad (2.4)$$

можна перетворити у модель в змінних стану такими способами:

Спосіб І. Змінні стану визначаються співвідношеннями

$$x_n^{(1)}(t)=x_{i+1}(t), i=\overline{1,n-1},$$

$$x_n^{(1)}(t)=-\frac{a_o}{a_n}x_1(t)-\frac{a_1}{a_b}x_2(t)-...-\frac{a_{n-1}}{a_b}x_n(t)+\frac{1}{a_n}u(t),$$

а матриці A, B, C і D моделі (2.3) мають вигляд:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & ... & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, \ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}, \qquad (2.5)$$

$$C=[b_o-\frac{a_o}{a_n}b_n \vdots b_1-\frac{a_1}{a_n}b_n \vdots ... b_{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_n}b_n], \quad D=\begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}$$

Якщо в лінійному диференціальному рівнянні (2.4) всі $b_j=0$ для $j=\overline{1,m}$, то воно може бути приведене до форми, яка називається "нормальною". Остання характеризується тим, що змінна $y(t)$ і її похідні $y^{(i)}(t)$, $i=\overline{n-1}$ вважаються змінними стану, а $y_{(n)}(t)$ виражається через них із диференціального рівняня (2.4). Простір стану при цьому називають фазовими, а координати $x_i(t)$ – фазовими координатами.

Слід зазначити, що в загальному випадку математичної моделі (2.4) $x_i(t)$ в (2.3), (2.5) э абстрактною зміною і термін "фазова змінна" для неї стає умовною.

Математична модель (2.3), (2.5) може бути зображена за допомогою структурної схеми, представленої на рис. 2.2, де неперервні лінії відповідають компонентам з індексами від І-го до $m=n-1$, а складова з індексом $m=n$ показана пунктиром.

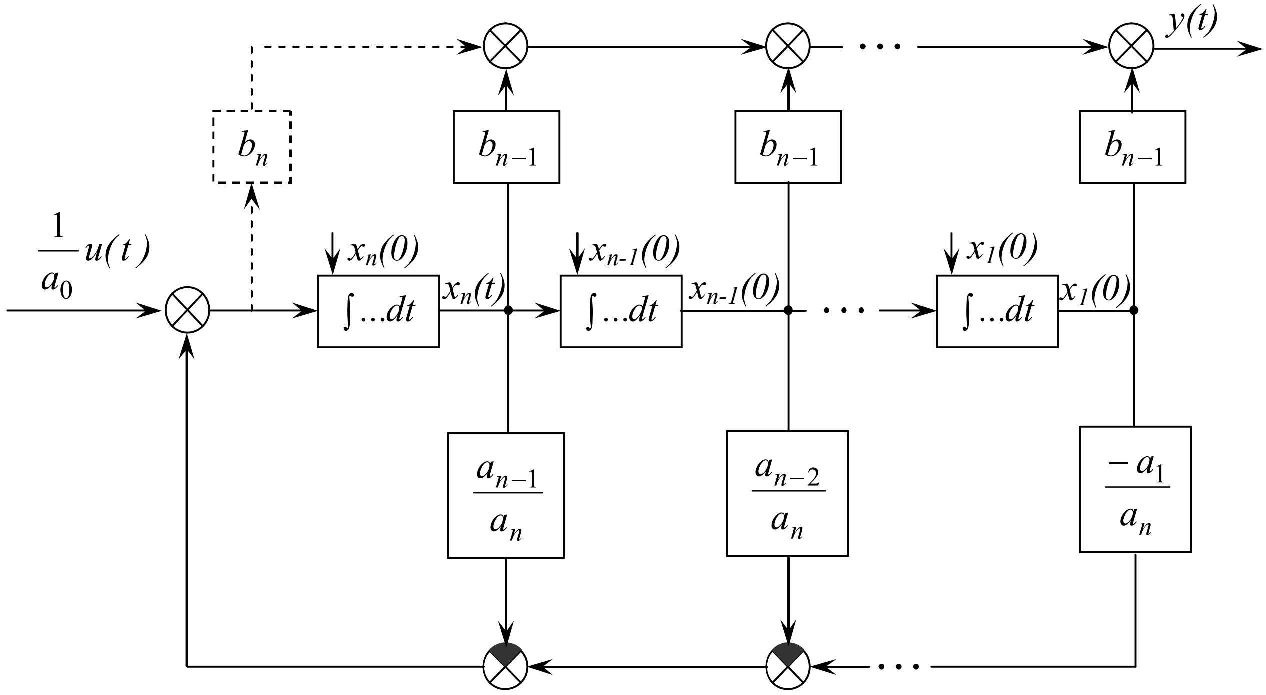


Рис. 2.2. – Структурна схема моделі (2.3), (2.5).

Спосіб 2. Тут також прийнято за основу те, що динаміка об'єкта (системи) описується диференціальним рівнянням (2.4), де $m=n$.

Змінні стану є лінійною комбінацією сигналів y(t) і u(t) та їх похідних:

$$x_1(t) = a_n y(t) - b_n u(t),$$
$$x_2(t) = a_{n-1} y(t) + a_n y^{(1)}(t) - b_n u^{(1)}(t) - b_{n-1} u(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n(t) = a_1 y(t) + a_2 y^{(1)}(t) + \ldots + a_n y^{(n-1)}(t) - b_n u^{(n-1)}(t) - \ldots - b_2 u^{(1)}(t) - b_1 u(t)$$

У цьому випадку матриці A, B, C і D мають вигляд:

$$A=\begin{bmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \cdots 0 \\ -\frac{a}{\ } & 0 & 1 & \cdots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ -\frac{a_0}{a_n} & 0 & 0 & \ldots 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot b_n \\ b_{n-2}-\frac{a_{n-2}}{a_n}\cdot b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_0-\frac{a_0}{a_n}\cdot b_b \end{bmatrix}, \qquad (2.6)$$

$$C=\begin{bmatrix} \frac{1}{a_n} 00..0 \end{bmatrix}, \qquad D=\begin{bmatrix} \frac{b_n}{a_n} \end{bmatrix}$$

Структурна схема моделі (2.3), (2.6) представлена на рис. 2.3.

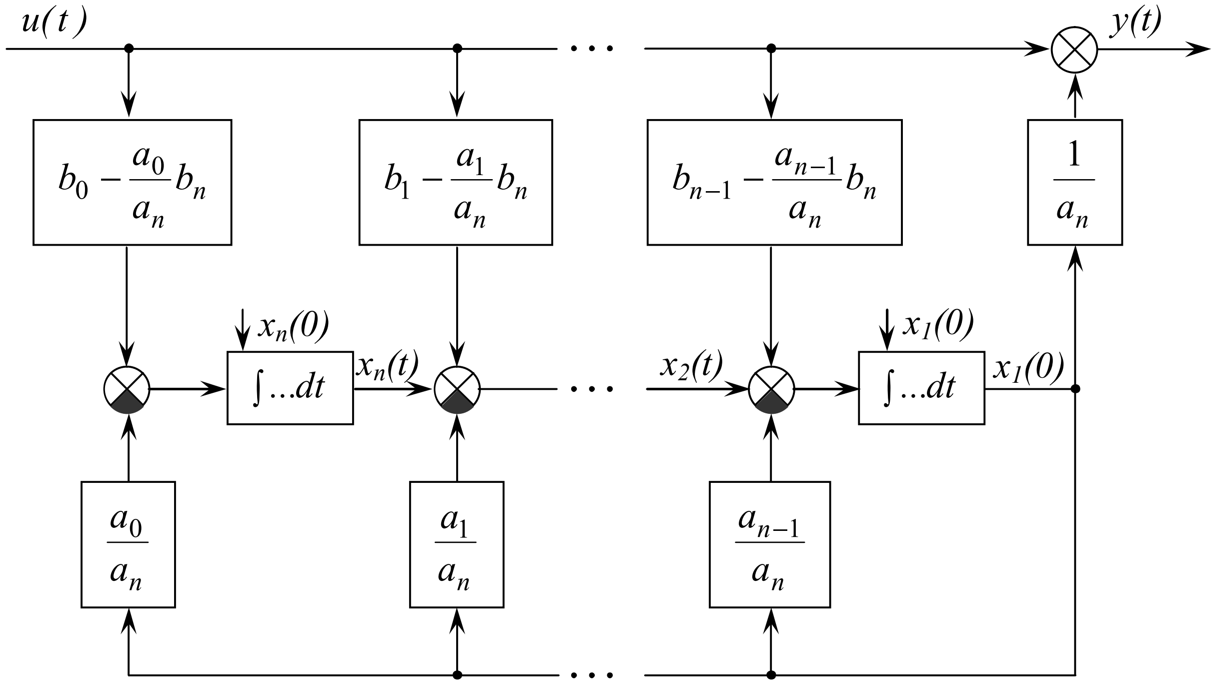


Рис. 2.3 – Структурна схема моделі (2.3), (2.6)

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. *Математичну модель*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 3u(t), & x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 7x_1(t) - 9x_2(t) + 6u(t), & x_2(0) = -4; \end{cases}$$

$$y(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t)$$

записати у базисі , утвореному власними векторами матриці

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}.$$

Для розв'язання сформульованої вище задачі знаходимо власні числа та власні вектори матриці А *:*

а)

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -7 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 \;, \quad \lambda_1 = -5 \;, \; \lambda_2 = -2 \;;$$

б)

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - 2 & +4 \\ -7 & \lambda_1 + 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} -7u_{11} + 4u_{21} = 0, \\ u_{11} = c, \quad u_{21} = 7c/4, \end{matrix} \quad u_1 = \begin{bmatrix} c \\ 7c/4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 - 2 & 4 \\ -7 & \lambda_2 + 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} -4u_{12} + 4u_{22} = 0, \\ u_{12} = c_1, \quad u_{22} = c, \end{matrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix},$$

Таким чином ,

$$R = \begin{bmatrix} c & c \\ 7c/4 & c \end{bmatrix}, \qquad R^1 = \frac{1}{3c}\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}B = \begin{bmatrix} 4/c \\ -1/c \end{bmatrix}, \quad CR = \begin{bmatrix} -13c/4 & -c \end{bmatrix}, \quad R^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} -15/c \\ 17/c \end{bmatrix}.$$

Математична модель об'єкта в базисі, утвореному власними векторами и$_1$ *та* и$_2$ *матриці* А *має вигляд :*

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -5z_1(t) + \dfrac{4}{c}u(t), & z_1(0) = -\dfrac{12}{c}; \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = -2z_2(t) - \dfrac{1}{c}u(t), & z_2(0) = \dfrac{17}{c}; \end{cases},$$

$$y(t) = -\frac{13 \cdot c}{4} z_1(t) - c \cdot z_2(t).$$

Приклад 2. *Математичні моделі попереднього прикладу (задану і отриману) зобразити у вигляді структурної схеми .*

Структурні схеми заданої і отриманої при с = *1 моделей мають вигляд, представлений на рис. 2.4 та рис. 2.5 відповідно.*

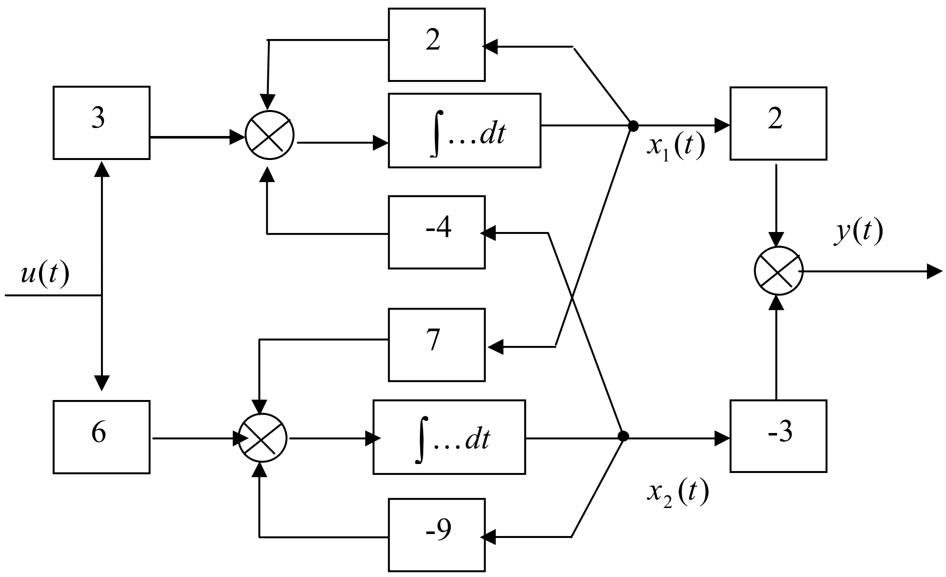


Рис.2.4 – Структурна схема заданої моделі

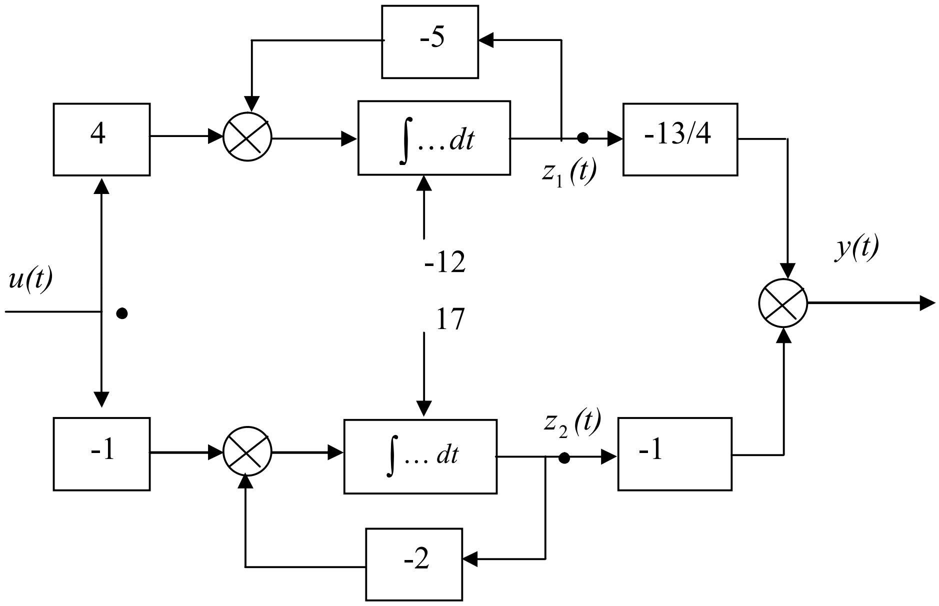


Рис. 2.5 – Структурна схема канонічної моделі

<u>Завдання для лабораторної роботи №2</u>

2.1. Математичні моделі, записані нижче, представити в канонічній формі з діагональною матрицею при змінних стану. Побудувати для обох видів моделей структурні схеми.

1) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - 3x_2(t) + 9u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = -4; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 5x_2(t);$	2) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -9x_1(t) + 4x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 6; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -8x_1(t) + 3x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = 8; \end{cases}$ $y(t) = 5x_1(t) - 4x_2(t);$
3) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + 3x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 6; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t) + 3u(t), \quad x_2(0) - 2; \end{cases}$ $y(t) = 7x_1(t) - 10x_2(t);$	4) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -6x_1(t) + 4x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 10; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -3x_1(t) + x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 7; \end{cases}$ $y(t) = 10x_1(t) - 13x_2(t);$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 5x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 7; \end{cases}$ $y(t) = x_2(t);$	6) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -6x_1(t) + 2x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 8; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) - 5u(t), \quad x_2(0) = -9; \end{cases}$ $y(t) = x_2(t);$
7) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -9x_1(t) + 6x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -7; \end{cases}$ $y(t) = 5x_1(t) - 6x_2(t);$	8) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 10x_1(t) - 3x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 60x_1(t) - 17x_2(t) - 7u(t), \quad x_2(0) = -7; \end{cases}$ $y(t) = 13x_1(t) - 3x_2(t);$
9) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -11x_1(t) + 2x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -40x_1(t) + 7x_2(t) + 23u(t), \quad x_2(0) = -3; \end{cases}$ $y(t) = -9x_1(t) - 2x_2(t);$	10) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = 8; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t);$
11) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 6; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) - 5x_2(t) - u(t), \quad x_2(0) = 10; \end{cases}$ $y(t) = 11x_1(t) - 14x_2(t);$	12) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) - 4x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 8x_1(t) - 9x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 7; \end{cases}$ $y(t) = -8x_1(t) + 5x_2(t);$
13) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 3x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) - 7x_2(t) - 4u(t), \quad x_2(0) = 9; \end{cases}$ $y(t) = x_2(t);$	14) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -9x_1(t) + 8x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 5x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = -3; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 5x_2(t);$
15) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -12x_1(t) + 2x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -40x_1(t) + 6x_2(t) - 6u(t), \quad x_2(0) = -4; \end{cases}$ $y(t) = -19x_1(t) + 4x_2(t);$	16) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -12x_1(t) + 5x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 8; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -10x_1(t) + 3x_2(t) - 5u(t), \quad x_2(0) = 6; \end{cases}$ $y(t) = x_2(t);$

17) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - 4x_2(t) + 11u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) - 6x_2(t) + 9u(t), \quad x_2(0) = 9; \end{cases}$ $y(t) = -14x_1(t) + 19x_2(t);$	18) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 4x_1(t) - 8x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 9; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) - 10x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = -8; \end{cases}$ $y(t) = 13x_1(t) - 17x_2(t);$
19) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -12x_1(t) + 9x_2(t) - 6u(t), \quad x_1(0) = 10; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 3x_2(t) - 5u(t), \quad x_2(0) = 5; \end{cases}$ $y(t) = 8x_1(t) - 11x_2(t);$	20) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -7x_1(t) + x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) - 2x_2(t) + 13u(t), \quad x_2(0) = -5; \end{cases}$ $y(t) = 12x_1(t) - 5x_2(t);$
21) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -8x_1(t) + 2x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -12x_1(t) + 2x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = -6; \end{cases}$ $y(t) = 12x_1(t) - 5x_2(t);$	22) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 6x_1(t) - 2x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 9; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 40x_1(t) - 12x_2(t) + 17u(t), \quad x_2(0) = -7; \end{cases}$ $y(t) = 9x_1(t) - 2x_2(t);$
23) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -11x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 3; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -18x_1(t) + 4x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = 4; \end{cases}$ $y(t) = 9x_1(t) - 4x_2(t);$	24) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 6x_2(t) + 10u(t), \quad x_1(0) = 9; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 4x_1(t) - 8x_2(t) + 8u(t), \quad x_2(0) = 8; \end{cases}$ $y(t) = -4x_1(t) + 5x_2(t);$
25) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 10x_1(t) - 3x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 60x_1(t) - 17x_2(t) - 7u(t), \quad x_2(0) = -7; \end{cases}$ $y(t) = 13x_1(t) - 3x_2(t);$	26) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - 3x_2(t) + 9u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = -4; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 5x_2(t);$
27) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -9x_1(t) + 8x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 5x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = -3; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 5x_2(t);$	28) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -12x_1(t) + 2x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -40x_1(t) + 6x_2(t) - 6u(t), \quad x_2(0) = -4; \end{cases}$ $y(t) = -19x_1(t) + 4x_2(t);$

29) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 4x_1(t) - 8x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 9; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) - 10x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = -8; \end{cases}$ $y(t) = 13x_1(t) - 17x_2(t);$	30) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -9x_1(t) + 6x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -7; \end{cases}$ $y(t) = 5x_1(t) - 6x_2(t);$
31) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -9x_1(t) + 8x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 5x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = -3; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 5x_2(t);$	32) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -12x_1(t) + 2x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -40x_1(t) + 6x_2(t) - 6u(t), \quad x_2(0) = -4; \end{cases}$ $y(t) = -19x_1(t) + 4x_2(t);$
33) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 6x_2(t) + 10u(t), \quad x_1(0) = 9; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 4x_1(t) - 8x_2(t) + 8u(t), \quad x_2(0) = 8; \end{cases}$ $y(t) = -4x_1(t) + 5x_2(t);$	34) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -11x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 3; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -18x_1(t) + 4x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = 4; \end{cases}$ $y(t) = 9x_1(t) - 4x_2(t);$

2.2. Моделі об’єктів керування, які описуються наступними диференціальними рівняннями, записати у вигляді моделі в змінних стану і побудувати для них структурні схеми.

1) $2y^{(2)}(t) + 3y^{1}(t) + 5y(t) = 8u^{(2)}(t) + 7u^{(1)}(t) + 5u(t)$,

2) $4y^{(3)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 2y(t) = 7u^{(2)}(t) + 5u^{(1)}(t) + u(t)$,

3) $5y^{(2)}(t) + 7y\ \ (t) = 2u^{(2)}(t) - 6u^{(1)}(t) + 5u(t)$,

4) $8y^{(3)}(t) + 6y^{(2)}(t) - 4y^{(1)}(t) = 2u^{(1)}(t) + 3u\ \ $,

5) $9y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 8y(t) = 6u^{(2)}(t) - 7u^{(1)}(t) + 9u(t)$,

6) $y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 7y(t) = 5u^{(2)}(t) - 6u^{(1)}(t) + 8u(t)$,

7) $2y^{(2)}(t) - 5y^{(1)}(t) + 8y(t) = 6u^{(2)}(t) + 5u^{(1)}(t) + u(t)$,

8) $4y^{(3)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 3y(t) = 2u^{(2)}(t) + 5u^{(1)}(t) + u(t)$,

9) $3y^{(2)}(t) - 4y^{(1)}(t) + 2y(t) = 6u^{(2)}(t) + 4u^{(1)}(t) - 7u(t)$,

10) $4y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 4y(t) = 5u^{(2)}(t) - 7u(t)$,

11) $2y^{(2)}(t) - 6y^{(1)}(t) + 2y(t) = -3u^{(2)}(t) + 4u^{(1)}(t) + 7u(t)$,

12) $3y^{(3)}(t) + 5y^{(1)}(t) - 8y(t) = 4u^{(2)}(t) + 2u(t)$,

13) $8y^{(2)}(t) - 4y^{(1)}(t) + 3y(t) = 6u^{(2)}(t) + 3u^{(1)}(t) + u(t)$,

14) $4y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) - 3y(t) = 5u^{(2)}(t) + 3u^{(1)}(t) + u(t)$,

15) $5y^{(2)}(t) - 3y^{(1)}(t) + 4y(t) = 2u^{(2)}(t) + 4u^{(1)}(t) - u(t)$,

16) $2y^{(3)}(t) + y(t) = 7u^{(2)}(t) + 6u^{(1)}(t) + 2u(t)$,

17) $6y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) + 5y(t) = 6u^{(2)}(t) + 8u(t)$,

18) $3y^{(3)}(t) + 7y^{(2)}(t) - 3y^{(1)}(t) + 5y(t) = 2u^{(1)}(t) + 7u(t)$,

19) $2y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 8y(t) = 7u^{(1)}(t) + 5u(t)$,

20) $y^{(2)}(t) + 8y^{(1)}(t)7y(t) = 2u^{(2)}(t) - 7u^{(1)}(t) + 3u(t)$,

21) $2y^{(3)}(t) - 3y^{(2)}(t) + 8y^{(1)}(t) + 5y(t) = 4u^{(2)}(t) - 3u^{(1)}(t) + 8u(t)$,

22) $4y^{(2)}(t) + 8y^{(1)}(t) + 12y(t) = 3u^{(2)}(t) + 5u(t)$,

23) $3y^{(2)}(t) + 7y^{(1)}(t) - 5y(t) = 8u^{(1)}(t) - 9u(t)$,

24) $2y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 7y(t) = 4u^{(2)}(t) + u(t)$,

25) $7y^{(3)}(t) + 2y^{(2)}(t) + 7y(t) = 4u^{(2)}(t) + u(t)$,

26) $4y^{(2)}(t) - 6y^{(1)}(t) - 5y(t) = u^{(2)}(t) + 3u^{(1)}(t) - u(t)$,

27) $5y^{(2)}(t) + 7y(t) = 2u^{(2)}(t) - 3u(t)$,

28) $6y^{(3)}(t) - 4y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 2y(t) = u^{(1)}(t) + 3u(t)$,

29) $7y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) + 5y(t) = 5u^{(1)}(t) + 6u(t)$,

30) $8y^{(2)}(t) + 3y^{(1)}(t) + 5y(t) = 5u^{(1)}(t) - 9u(t)$.

31) $9y^{(2)}(t) + 5y^{(1)}(t) + 8y(t) = 6u^{(2)}(t) - 7u^{(1)}(t) + 9u(t)$;

32) $2y^{(2)}(t) + 2y^{(1)}(t) + 7y(t) = 4u^{(2)}(t) + u(t)$;

33) $4y^{(2)}(t) + 8y^{(1)}(t) + 12y(t) = 3u^{(2)}(t) + 5u(t)$;

34) $7y^{(2)}(t) + 6y^{(1)}(t) + 5y(t) = 5u^{(1)}(t) + 5u(t)$;

Лабораторна робота №3

СТІЙКІСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

Теоретичні відомості

Для системи, яка описується диференціальним рівнянням

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \tag{3.1}$$

поза залежністю від того, який її рух $\varphi(t)$ вибрано за незбурений і який початковий момент часу t_0 задано, має місце наступне:

1^0 . Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння $\det(\lambda E - A) = 0$ від'ємні, то незбурений рух є асимптотично стійким.

2^0 . Якщо серед коренів характеристичного рівняння є хоч би один, дійсна частина якого додатна, то незбурений рух є нестійким.

3^0 . Якщо деякі корені характеристичного рівняння мають нульові дійсні частини, а інші корені мають від'ємні дійсні частини, то:

- незбурений рух буде стійким (не асимптотично), коли корені з нульовими дійсними частинами є простими;
- незбурений рух буде нестійким, якщо хоч би один корінь з нульовою дійсною частиною є кратним.

Як відомо, система (3.1) є результатом лінеаризації відповідної нелінійної моделі в околі її стану рівноваги. Тому сформульоване вище положення складає основу першого методу Ляпунова.

Інтуїтивно ясно, що коли повна енергія деякої фізичної системи має мінімум в точці рівноваги, то ця точка є точкою стійкої рівноваги. Вищезазначена ідея лежить в основі методу аналізу стійкості, який називається прямим або другим методом Ляпунова. Цей метод є єдиним відомим строгим апаратом дослідження стійкості нелінійних систем. Його суть полягає в тому, що якщо для системи $\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t)]$ існує знакоозначена функція $V[x(t)]$, похідна за часом якої $dV[x(t)]/dt$ з врахуванням рівняння руху системи є знакосталою функцією зі знаком протилежним знакові функції $V[x(t)]$, то стан рівноваги стійкий. Якщо ж похідна $dV[x(t)]/dt$ є знакоозначеною функцією, протилежною за знаком з $V[x(t)]$, то стан рівноваги є асимптотично стійким.

Функції Ляпунова для лінійних систем будують за наступною схемою. Якщо треба проаналізувати стійкість системи (3.1), то функцію Ляпунова вибирають у вигляді квадратичної форми

$$V[x(t)] = x^T(t)Bx(t)$$

з симетричною матрицею B.

Для знаходження матриці В вирахуємо повну похідну $V[x(t)]$ за часом, враховуючи при цьому систему (3.1):

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = \frac{dx^T(t)}{dt} \cdot B \cdot x(t) + x^T(t) \cdot B \cdot \frac{dx(t)}{dt} = x^T(t) \cdot (A^T B + BA) \cdot x(t)$$

Будемо вимагати, щоб квадратична форма $V[x(t)]$ задовольняла рівнянню

$$\frac{dV[x(t)]}{dt} = W[x(t)],$$

(3.2)

де $W[x(t)] = x^T(t)Cx(t)$ - задана квадратична форма.

Порівнюючи (3.1) та (3.2), отримаємо матричне рівняння Ляпунова для визначення матриці В:

$$A^T B + BA = C$$

(3.3)

Нехай $\mathrm{Re}\lambda_j(A) < 0, \quad 1 \le j \le n$. Тоді для будь-якої симетричної від'ємної означеної матриці С існує єдиний розв'язок матричного рівняння (3.3) у вигляді додатно означеної матриці В. При цьому рух заданої системи (3.1) буде асимптотично стійким.

Критерій стійкості Зубова В.І. Для з'ясування того факту, чи є система (3.1) стійкою у відповідності з цим критерієм, необхідно і достатньо переконатись в тому, що виконується умова:

$$B^k \to 0 \text{ при } k \to \infty, \tag{3.4}$$

де $$B = E + 2(A - E)^{-1}.$$

Оцінку (3.4) є сенс здійснювати, використовуючи будь-яку із норм матриці:

$$\|B\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |B_{ij}|, \quad \|B\|_2 = \max_i \sum_{i=1}^{n} |B_{ij}|, \quad \|B\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ij}^2}.$$

Підпростори стійких і нестійких станів лінійних систем зі сталими параметрами.

Якщо матриця *A* в *n*-вимірній системі (3.1) має *n* різних характеристичних чисел, то підпростір стійких станів цієї системи є дійсним лінійним підпростором, який породжений тими власними векторами матриці *A*, що відповідають власним числам зі строго від'ємними дійсними частинами. У свою чергу, для такої системи підпростір нестійких станів є дійсним підпростором, який породжено тими власними векторами, котрі відповідають власним числам з невід'ємними дійсними частинами.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Вільна динамічна система описується диференціальними рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 7x_1(t) - 9x_2(t). \end{cases}$$

Треба зробити висновок відносно стійкості цієї системи.

Матриця цієї системи має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}.$$

Запишемо її характеристичне рівняння:

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ -7 & \lambda + 9 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0 .$$

Оскільки обидва корені цього рівняння

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{та} \quad \lambda_2 = -5$$

мають від'ємні значення, то задана динамічна система є асимптотично стійкою.

Приклад 2. За допомогою прямого методу Ляпунова з'ясувати характер стану (0,0) рівноваги системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1^3(t), \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -x_2^3(t). \end{cases}$$

Тут не можна скористатися лінеаризованою моделлю. Проте можна показати, що стан рівноваги (0,0) асимптотично стійкий, якщо розглянути поведінку функції Ляпунова $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ на траєкторіях заданої системи.

Дійсно, оскільки

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} = 2x_1(-x_1^3) + 2x_2(-x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4),$$

то точка рівноваги (0,0) є асимптотично стійкою нерухомою точкою системи ($V(x_1, x_2)$ та $dV(x_1, x_2)/dt$ є знакоозначеними функціями протилежних знаків).

Приклад 3. За допомогою другого методу Ляпунова оцінити стійкість вільного руху системи:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Для цього симетричну від'ємно означену матрицю C виберемо у вигляді:

$$C = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

В свою чергу, симетричну матрицю B будемо шукати у вигляді:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

Підставивши матрицю A системи, а також матриці B та C в рівняння Ляпунова, отримаємо:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -4 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

або

$$\begin{cases} 4b_{11} + 14b_{12} = -4 \\ -4b_{11} - 7b_{12} + 7b_{22} = 0 \\ -8b_{12} - 18b_{22} = -5 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь, будемо мати матрицю

$$B = \begin{bmatrix} 87/20 & -107/70 \\ -107/70 & 67/70 \end{bmatrix},$$

яка відповідно критерію Сильвестра є додатно означеною, а задана система – асимптотично стійкою, оскільки $V(x) > 0$, а $dV(x)/dt < 0$.

Приклад 4. За допомогою критерію Зубова з'ясувати, чи є рух системи

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = 2x_1(t) - 4x_2(t), \\ dx_2(t)/dt = 7x_1(t) - 9x_2(t) \end{cases}$$

стійким.

Тут матриця A має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -0 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} -1/9 & 4/9 \\ -7/9 & 10/9 \end{bmatrix},$$

Тому матриця B дорівнює:
а її степенями будуть матриці:
Оскільки норми цих матриць

$$B^2 = \begin{bmatrix} -0{,}7654 & 0{,}4444 \\ -0{,}7778 & 0{,}9630 \end{bmatrix}, \qquad B^4 = \begin{bmatrix} 0{,}3909 & 0{,}878 \\ 0{,}0960 & 0{,}5816 \end{bmatrix},$$

$$B^8 = \begin{bmatrix} 0{,}1612 & 0{,}0854 \\ 0{,}0934 & 0{,}3466 \end{bmatrix}, \qquad B^{16} = \begin{bmatrix} 0{,}0340 & 0{,}0434 \\ 0{,}0474 & 0{,}1281 \end{bmatrix}$$

$\|B\|_1 = 1{,}8888,\ \|B^2\|_1 = 1{,}7408,\ \|B^4\|_1 = 0{,}6776,\ \|B^8\|_1 = 0{,}4400 \quad та \ \|B^{16}\|_1 = 0{,}1755$

мають тенденцію зменшуватися до нуля, то слід чекати, що $B^k \to 0$ при $k \to \infty$.

Тобто, вільний рух заданої системи є асимптотично стійким.

Приклад 5. Знайти підпростори стійкого та нестійкого станів системи, котра описується рівняннями:

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = x_z(t) + 2x_2(t), & x_1(0) = x_{10,} \\ dx_2(t)/dt = 2x_1(t) + x_2(t), & x_2(0) = x_{20}. \end{cases}$$

Матриця параметрів цієї системи має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Знайдемо її власні числа

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0, \qquad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1.$$

Отже, матриця А заданої системи має одне додатне $\lambda_1=3$ і одне від'ємне $\lambda_2=-1$ власні числа.

Обчислимо власний вектор u_1, який відповідає характеристичному числу $\lambda_1=3$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & -2 \\ -2 & \lambda_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

або $2u_{11}-2u_{21}=0$.

Звідки маємо

$$u_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Цей власний вектор відповідає додатному характеристичному числу і тому визначає підпростір нестійких станів заданої системи.

Знайдемо тепер власний вектор u_2, який відповідає характеристичному числу $\lambda_2=-1$:

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 - 1 & -2 \\ -2 & \lambda_2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

або $-2u_{12}-2u_{22}=0$.

З останнього виразу маємо

$$u_2 = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Отриманий вектор u_2 відповідає від'ємному характеристичному числу. Тому він визначае підпростір стійких станів системи, котра досліджується.

Завдання для лабораторної роботи №3

3.1. Дана свободная динамическая система, которая описывается дифференциальными уравнениями. Сделать вывод относительно стойкости этой системы.

3.2. С помощью метода Ляпунова сделать вывод относительно стойкости системы.

3.3. С помощью критерия Зубова сделать вывод относительно стойкости системы.

1) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 4x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 4x_1(t) - 5x_2(t); \end{cases}$	2) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 5x_1(t) - 3x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 18x_1(t) - 10x_2(t); \end{cases}$
3) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t); \end{cases}$	4) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -8x_1(t) + 2x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -12x_1(t) + 2x_2(t); \end{cases}$
5) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -11x_1(t) + 3x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -18x_1(t) + 4x_2(t); \end{cases}$	6) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -7x_1(t) + x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) - 2x_2(t); \end{cases}$
7) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) - 4x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 8x_1(t) - 9x_2(t); \end{cases}$	8) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) - 5x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 10x_1(t) - 12x_2(t); \end{cases}$
9) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 3x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) - 7x_2(t); \end{cases}$	10) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -9x_1(t) + 4x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -8x_1(t) + 3x_2(t); \end{cases}$
11) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -12x_1(t) + 5x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -10x_1(t) + 3x_2(t); \end{cases}$	12) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -6x_1(t) + 2x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t); \end{cases}$

13) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 10x_1(t) - 3x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 60x_1(t) - 17x_2(t); \end{cases}$	14) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 20x_1(t) - 7x_2(t); \end{cases}$
15) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -7x_1(t) - 2x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 40x_1(t) + 11x_2(t); \end{cases}$	16) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -11x_1(t) + 2x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -40x_1(t) + 7x_2(t); \end{cases}$
17) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 6x_1(t) - 2x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 40x_1(t) - 12x_2(t); \end{cases}$	18) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -12x_1(t) + 2x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -40x_1(t) + 6x_2(t); \end{cases}$
19) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -7x_1(t) + 6x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + 3x_2(t); \end{cases}$	20) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 5x_2(t); \end{cases}$
21) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - 3x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t); \end{cases}$	22) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 6x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 4x_1(t) - 8x_2(t); \end{cases}$
23) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + 3x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t); \end{cases}$	24) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -12x_1(t) + 9x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 3x_2(t); \end{cases}$
25) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -9x_1(t) + 8x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 5x_2(t); \end{cases}$	26) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - 4x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) - 6x_2(t); \end{cases}$
27) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 4x_1(t) - 8x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) - 10x_2(t); \end{cases}$	28) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) - 5x_2(t); \end{cases}$
29) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -6x_1(t) + 4x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -3x_1(t) + x_2(t); \end{cases}$	30) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -9x_1(t) + 6x_2(t); \end{cases}$
31) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -9x_1(t) + 4x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -8x_1(t) + 3x_2(t); \end{cases}$	32) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) - 5x_2(t); \end{cases}$

33) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -6x_1(t) + 2x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t); \end{cases}$	34) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 4x_2(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 4x_1(t) - 5x_2(t); \end{cases}$

3.4. Найти подпространства устойчивого и неустойчивого движений системы.

1) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = 7z_1(t) - 6z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = 9z_1(t) - 8z_2(t); \end{cases}$	2) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = 5z_1(t) - 4z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = 6z_1(t) - 5z_2(t); \end{cases}$
3) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -5z_1(t) + 4z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = -6z_1(t) + 5z_2(t); \end{cases}$	4) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -8z_1(t) + 6z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = -9z_1(t) + 7z_2(t); \end{cases}$
5) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = 10z_1(t) - 8z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = 12z_1(t) - 10z_2(t); \end{cases}$	6) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = 16z_1(t) - 9z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = 30z_1(t) - 17z_2(t); \end{cases}$
7) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = 11z_1(t) + 6z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = 20z_1(t) - 11z_2(t); \end{cases}$	8) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -11z_1(t) + 6z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = -20z_1(t) + 11z_2(t); \end{cases}$
9) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -17z_1(t) + 9z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = -30z_1(t) + 16z_2(t); \end{cases}$	10) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = 22z_1(t) - 12z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = 40z_1(t) - 22z_2(t); \end{cases}$
11) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = 4z_1(t) - 3z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = 6z_1(t) - 5z_2(t); \end{cases}$	12) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = 3z_1(t) - 2z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = 4z_1(t) - 3z_2(t); \end{cases}$
13) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -3z_1(t) + 2z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = -4z_1(t) + 3z_2(t); \end{cases}$	14) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -5z_1(t) + 3z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = -6z_1(t) + 4z_2(t); \end{cases}$
15) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = 6z_1(t) - 4z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = 8z_1(t) - 6z_2(t); \end{cases}$	16) $\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -8z_1(t) + 9z_2(t); \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = -6z_1(t) + 7z_2(t); \end{cases}$

17) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-5z_1(t)+6z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=-4z_1(t)+5z_2(t);\end{cases}$	18) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=5z_1(t)-6z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=4z_1(t)-5z_2(t);\end{cases}$
19) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=7z_1(t)-9z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=6z_1(t)-8z_2(t);\end{cases}$	20) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-10z_1(t)+12z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=-8z_1(t)+10z_2(t);\end{cases}$
21) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-5z_1(t)+3z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=-6z_1(t)+4z_2(t);\end{cases}$	22) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-3z_1(t)+2z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=-4z_1(t)+3z_2(t);\end{cases}$
23) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=3z_1(t)-2z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=4z_1(t)-3z_2(t);\end{cases}$	24) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=4z_1(t)-3z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=6z_1(t)-5z_2(t);\end{cases}$
25) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-6z_1(t)+4z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=-8z_1(t)+6z_2(t);\end{cases}$	26) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-8z_1(t)-6z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=9z_1(t)+7z_2(t);\end{cases}$
27) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-5z_1(t)-4z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=6z_1(t)+5z_2(t);\end{cases}$	28) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=5z_1(t)+4z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=-6z_1(t)-5z_2(t);\end{cases}$
29) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=7z_1(t)+6z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=-9z_1(t)-8z_2(t);\end{cases}$	30) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-10z_1(t)-8z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=12z_1(t)+10z_2(t);\end{cases}$
31) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-5z_1(t)+3z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=-6z_1(t)+4z_2(t);\end{cases}$	32) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=7z_1(t)-9z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=6z_1(t)-8z_2(t);\end{cases}$
33) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-10z_1(t)+12z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=-8z_1(t)+10z_2(t);\end{cases}$	34) $\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-10z_1(t)-8z_2(t);\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=12z_1(t)+10z_2(t);\end{cases}$

Лабораторна робота №4

КЕРОВАНІСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

Теоретичні відомості

Керованістю системи називається така її властивість, яка полягає в тому, що під дією деякого управляючого впливу $u(t)$ на протязі скінченого відрізку часу T вона переходить з будь-якого початкового стану $x(0)$ в начало координат $x(T)=0$.

У цьому випадку система буде повністю керованою. Якщо ж даною властивістю система володіє не для усіх початкових станів або не по усім координатам, то вона буде неповністю керованою.

Мають місце і повністю некеровані системи.

Критерій керованості Калмана.

Система *n*-го порядку, яка описується рівняннями

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ &y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

є повністю керованою, коли ранг *матриці керованості*

$$G = \left[B \vdots AB \vdots A^2 B \vdots \ldots \vdots A^{n-1} B\right] \tag{4.2}$$

дорівнює *n*.

Якщо $rang G = r < n$, то система є неповністю керованою. У цьому випадку можна виділити повністю керовану частину системи, що має порядок r. Інша частина системи , яка має порядок *n-r*, буде некерованою. Величина *q=n-r* іменується *степенем некерованості* системи.

Коли система знаходиться під впливом єдиного сигналу *u(t)*, то матриця *G* – квадратна. Для повної керованості такої системи необхідно, щоб $\det G \neq 0$.

Критерій керованості Гільберта.

Система *n*-го порядку, яка описується рівняннями

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \ldots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

з діагональною матрицею при змінних стану $x_i(t) \quad (i = \overline{1,n})$ є повністю керованою тоді, коли матриця при управляючих впливах $u_j(t) \quad (j = \overline{1,m})$ не має нульових рядків, тобто

$$\left[b_{k1}\, b_{k2} \ldots b_{km}\right] \neq \left[0\, 0 \ldots 0\right] \text{ при } k = \overline{1,n}.$$

Підпростір керованих станів лінійної системи (4.1) зі сталими параметрами є лінійним простором, який складається із станів, котрі можуть бути досягнуті з нульового стану за скінчений термін *T*.

Цей лінійний підпростір є породженим l стовпцями матриці керованості

$$G=\left[B\vdots AB\vdots A^2B\vdots\ldots\vdots A^{n-1}B\right].$$

Якщо моделі (4.1) та (4.3) повністю керовані, то $l=n$. Інакше $l<n$.

Слід відмітити, що підпростір керованих станів системи (4.1) є інваріантним по відношенню до матриці *A* (тобто, коли вектор *x(t)* належить підпростору керованих станів, то вектор *Ax(t)* також належить цьому простору).

Канонічна форма керованості. Сформуємо невироджене перетворення з матрицею $T=\left[T_1\vdots T_2\right]$, де вектор-стовпці матриці T_1 утворюють базис *m*-вимірного ($m\le n$) підпростору керованих станів системи (4.1), а вектор-стовпці матриці T_2 разом з вектор-стовпцями матриці $T_1=\left[t_1\vdots t_2\vdots\ldots\vdots t_m\right]$ утворюють базис усього *n*-вимірного простору.

Запишемо це перетворення у вигляді: $x(t)=Tz(t)$.

Тоді диференціальне рівняння (4.1) перетвориться в канонічну форму керованості:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t)\\ z_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

(4.4)

$$y(t)=CTz(t)+Du(t)$$

Тут A_{11}- матриця розміру $m\times m$, пара (A_{11},B_1) є повністю керованою. Вектор $z_1(t)$ має вимірність *m*, а вектор $z_2(t)$ – $(n-m)$.

Відмітимо, що поведінка $z_2(t)$ повністю незалежна від впливу будь-яких зовнішніх причин, тоді як на $z_1(t)$ впливають $u(t)$ і $z_1(t)$. Той факт, що пара (A_{11},B_1) є повністю керованою, є слідством приналежності стану $\left[z_1(0)\vdots 0\right]^T$ підпростору керованих станів системи (4.4).

Власні числа матриці A_{11} називаються полюсами керованості системи, а власні числа матриці A_{22} - полюсами некерованості. Підпростір керованих станів системи (4.4) породжується власними векторами, які відповідають полюсам керованості системи.

Приклади розв’язування задач.

Приклад I. Для моделі об'єкта управління, яка має матрицю при змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$ з дійсним спектром $\{\lambda_1,\lambda_2\}$:

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt=2x_1(t)-4x_2(t)+4u(t), & x_1(0)=x_{10};\\ dx_2(t)/dt=7x_1(t)-9x_2(t)+7u(t), & x_2(0)=x_{21};\end{cases} \qquad (4.5)$$

$$y(t) = x_1(t) + 2x_2(t),$$

необхідно отримати її канонічну модель з діагональною матрицею і побудувати для останньої структурну схему.

З метою побудови канонічної моделі задану модель (4.5) представимо у векторно-матричній формі (4.1), де

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \qquad x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Тепер за допомогою підстановки $x(t)=Rz(t)$, котра використовує модальну матрицю $R=[u_1;\ u_2]$, де $u_1=[4/7\ \ 1]^T$ та $u_2=[1;\ 1]^T$ - власні вектори матриці A заданої системи, перейдемо від змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$ до змінних стану $z_1(t)$ та $z_2(t)$.

Отримаємо:

$$\begin{aligned} &\frac{dz(t)}{dt} = \Lambda z(t) + \overline{B}u(t), \ z(0) = z_0, \\ &y(t) = \overline{C}z(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{4.6}$$

де

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ - & 2 \end{bmatrix}, \ \overline{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{C} = \begin{bmatrix} 18/7 & 3 \end{bmatrix}, \qquad Z_0 = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7(x_{20} - x_{10})/3 \\ (7x_{10} - 4x_{20})/3 \end{bmatrix}.$$

Для побудови структурної схеми канонічної моделі (4.6) представимо її у скалярному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -5z_1(t) + 7u(t), \qquad z_1(0) = z_{10}, \\[2ex] \dfrac{dz_2(t)}{dt} = -2z_2(t), \qquad z_2(0) = z_{20} \end{cases} \tag{4.7}$$

$$y(t) = \frac{18}{7} z_1(t) + 3z_2(t)$$

Структурна схема цієї моделі представлена на рис. 4.1.

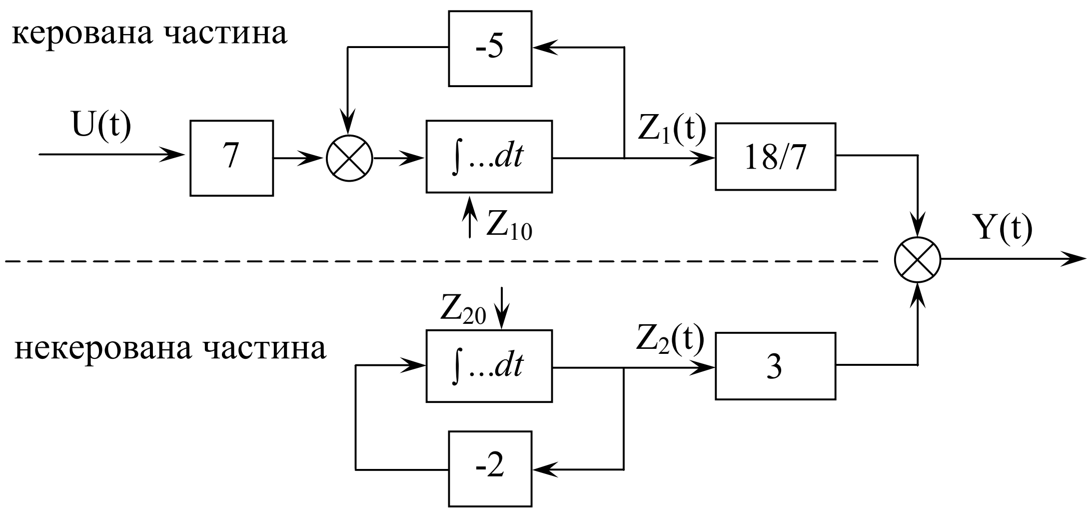


Рис. 4.1 – Структурна схема канонічної моделі

Приклад 2. Дослідити моделі (4.5) і (4.6) розглянуті у попередньому прикладі з метою визначення міри їхньої керованості за допомогою критеріїв Калмана та Гільберта.

Оскільки матриця при змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$ у моделі (4.5) має загальний вигляд, то керованість цієї моделі будемо досліджувати за допомогою критерію Калмана.

Визначимо ранг матриці керованості

Некерована частина

$$G = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -20 \\ 7 & -35 \end{bmatrix}.$$

Тут $detG$ =-140+140=0. Тому $rangG = 1<2=n$. На основі цього робимо висновок: система (4.5) є частково керованою.

Зауважимо, що матрицю G можна записати у такий спосіб:

$$G = \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \right].$$

Власне число λ_1=-5, яке тут задіяне, є полюсом керованості системи (4.5).

У свою чергу, канонічна модель (4.6), яка є еквівалентною моделі (4.5), має діагональну матрицю $\Lambda= diag\{-5, -2\}$ при змінних стану $z_1(t)$ та $z_2(t)$.

При цьому матриця

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix},$$

що стоїть при керуючому впливові u(t), є матрицею з одним нульовим рядком.

Тому, відповідно до критерію Гільберта, система (4.6) частково керована. Тобто, відносно заданої (4.5) і канонічної (4.6) моделей, які є еквівалентними, маємо однакові висновки – вони є частково керованими.

Приклад 3. Побудувати для моделей (4.5) та (4.6) підпростір керованих станів.

Оскільки у моделі (4.6) керованою є змінна $z_1(t)$, а некерованою – змінна стану z_2(t), то підпростір керованості визначається власним вектором $u1=[4/71]^T$ матриці A, з яким співпадають вісь z_1 і вектори $B=7u_1$, та $AB= -5B = -35u_1$, котрі є складовими матриці керованості $G = [B \ \ AB]$ (рис. 4.2).

Приклад 4. Для моделей (4.5) і (4.6) визначити область досяжності.

З розглянутого у прикладі 2 видно, що ці моделі є частково керованими. Тому для побудови області досяжності змінних стану вказаних моделей через точку (x_{10}, x_{20}) площини (x_1, x_2) проводимо пряму лінію паралельно власному векторові $u_1=[4/7\ 1]^T$ матриці A, що визначає підпростір керованості (рис. 4.3).

Частина площини між цією лінією і віссю z_1, котра співпадає з власним вектором u_1, є областю досяжноті систем (4.5) та (4.6). Останнє означає: які б зміни не відбувалися з сигнальним впливом $u(t)$, зображуючі точки (x_1, x_2) та (z_1, z_2) системи змінних стану еквівалентних моделей (4.5) і (4.6) ніколи не вийдуть за межі побудованої полоси (області досяжності).

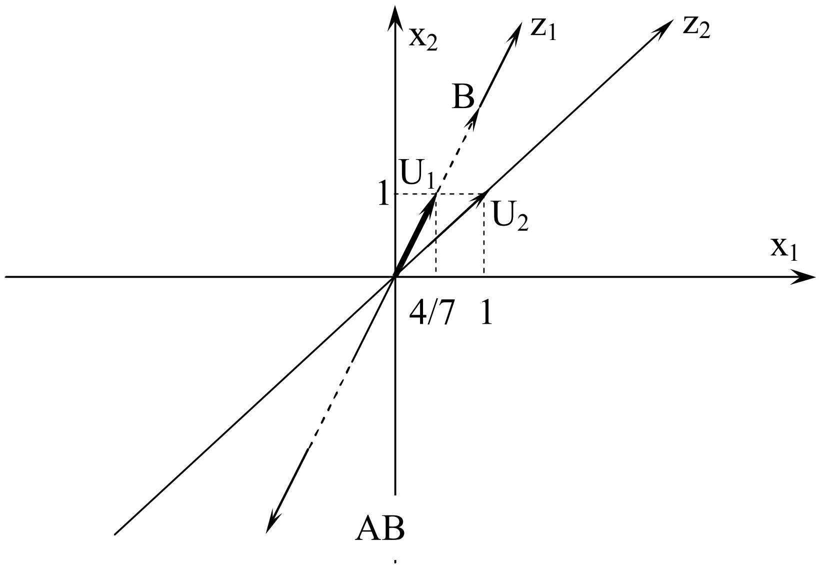


Рис. 4.2. Підпростір керованих станів моделей (4.5) та (4.6).

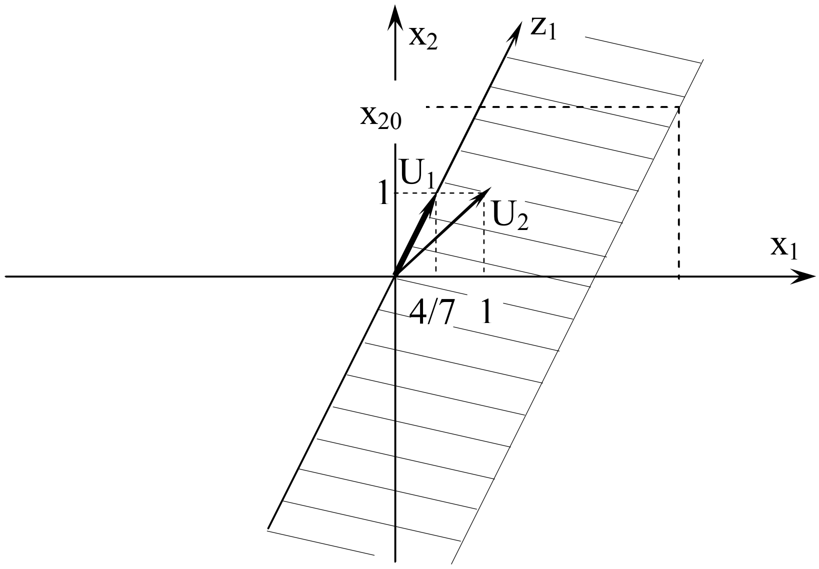


Рис. 4.3. Область досяжності системи

<u>Зауваження:</u> У випадку повної керованості моделі системи другого порядку областю досяжності є уся площина *(x_1, x_2)*.

Приклад 5. Для моделі (4.5) побудувати канонічну форму керованості.

В результаті розгляду прикладу 2 було встановлено, Що ранг матриці керованості цієї моделі дорівнює одиниці в той час, коли її порядок дорівнює двом. Тобто модель (4.5) є частково керованою.

Тому для побудови канонічної форми керованості скористаємося перетворенням $x(t)=Tz(t)$ з матрицею $T=[T_1;T_2]$, сформованою у такий спосіб. В якості вектора T_1 візьмемо вектор B, який є першим стовпцем матриці керованості G. Що ж стосується вектора T_2, то його виберемо довільно, але так, щоб $detT \neq 0$.

Нехай

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ і } detT=1, \text{ а } \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Канонічна форма керованості для моделі (4.5), враховуючи вищесказане, буде мати вигляд:

$$\frac{dz(t)}{dt} = T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t), \qquad z(0) = T^{-1}x_o.$$
$$y(t) = CTz(t),$$

де

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -4\\ 7 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix},\quad T^{-}B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$CT=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}185\end{bmatrix},\quad z(0)=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -7 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_{10}-x_{20}\\ -7x_{10}+4x_{20}\end{bmatrix}.$$

Після цього запишемо канонічну форму керованості у скалярному вигляді:

$$\begin{cases}\dfrac{dz_1(t)}{dt}=-5z_1(t)-z_2(t)+u(t), & z_1(0)=2x_{10}-x_{20}\\ \dfrac{dz_2(t)}{dt}=-2z_2(t), & z_2(0)=-7x_{10}+4x_{20}\end{cases}$$

<u>Завдання для лабораторної роботи №4</u>

4.1. Для записаних нижче моделей побудувати канонічні моделі з діагональними матрицями при змінних стану.

4.2. Дослідити задані та канонічні моделі з метою визначення міри їхньої керованості за допомогою критеріїв Калмана і Гільберта.

4.3. Визначити підпростори керованості та області досяжності змінних стану досліджуваних моделей.

4.4. Побудувати канонічні форми керованості для заданих моделей.

1) $\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=-6x_1(t)+4x_2(t)-3u(t), & x_1(0)=6;\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-8x_1(t)+6x_2(t)-3u(t), & x_2(0)=5;\end{cases}$ $y(t)=x_1(t);$	2) $\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=-10x_1(t)-8x_2(t)-3u(t), & x_1(0)=7;\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=12x_1(t)+10x_2(t)+3u(t), & x_2(0)=-8;\end{cases}$ $y(t)=4x_1(t)+3x_2(t);$
3) $\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=-3x_1(t)+2x_2(t)+3u(t), & x_1(0)=7;\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-4x_1(t)+3x_2(t)+6u(t), & x_2(0)=2;\end{cases}$ $y(t)=-5x_1(t)+3x_2(t);$	4) $\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=-8x_1(t)+9x_2(t)+2u(t), & x_1(0)=1;\\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-6x_1(t)+7x_2(t)+2u(t), & x_2(0)=-5;\end{cases}$ $y(t)=-5x_1(t)+7x_2(t);$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) - 2x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 4; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 4x_1(t) - 3x_2(t) - u(t), \quad x_2(0) = 5; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t);$	6) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + 6x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 6; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + 5x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 4; \end{cases}$ $y(t) = -5x_1(t) + 7x_2(t);$
7) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 5x_1(t) - 4x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) - 5x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 4; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t);$	8) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 7x_1(t) - 9x_2(t) - 6u(t), \quad x_1(0) = 3; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) - 8x_2(t) - 4u(t), \quad x_2(0) = -2; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) - 2x_2(t);$
9) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + 4x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = -3; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 5x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 2; \end{cases}$ $y(t) = 2x_1(t) - x_2(t);$	10) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -8x_1(t) - 6x_2(t) - 4u(t), \quad x_1(0) = -4; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 9x_1(t) + 7x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 3; \end{cases}$ $y(t) = -x_1(t);$
11) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 7x_1(t) - 6x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 2; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 9x_1(t) - 8x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -3; \end{cases}$ $y(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t);$	12) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 11x_1(t) - 6x_2(t) + 9u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 20x_1(t) - 11x_2(t) + 15u(t), \quad x_2(0) = -6; \end{cases}$ $y(t) = -8x_1(t) + 5x_2(t);$
13) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -8x_1(t) + 6x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 1; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -9x_1(t) + 7x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 2; \end{cases}$ $y(t) = -4x_1(t) + 3x_2(t);$	14) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 5x_1(t) - 6x_2(t) - 3u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 4x_1(t) - 5x_2(t) - 2u(t), \quad x_2(0) = -2; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t);$
15) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -10x_2(t) + 12x_1(t) - 9u(t), \quad x_1(0) = -2; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -8x_1(t) + 10x_2(t) - 6u(t), \quad x_2(0) = 3; \end{cases}$ $y(t) = -x_1(t) + 2x_2(t);$	16) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 4; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 4x_2(t) + 4u(t), \quad x_2(0) = 6; \end{cases}$ $y(t) = -4x_1(t) + 3x_2(t);$
17) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 4x_1(t) - 3x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 3; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) - 5x_2(t) - 2u(t), \quad x_2(0) = 2; \end{cases}$ $y(t) = -x_1(t);$	18) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 5x_1(t) + 4x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 3; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) - 5x_2(t) + u(t), \quad x_2(0) = -2; \end{cases}$ $y(t) = -2x_1(t) - x_2(t);$

19) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 16x_1(t) - 9x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 30x_1(t) - 17x_2(t) + 10u(t), \quad x_2(0) = -6; \end{cases}$ $y(t) = -x_1(t) + x_2(t);$	20) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -11x_1(t) + 6x_2(t) + u(t), \quad x_1(0) = 3; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -20x_1(t) + 11x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -4; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t);$
21) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) - 4x_2(t) - 6u(t), \quad x_1(0) = -5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) + 5x_2(t) + 9u(t), \quad x_2(0) = 2; \end{cases}$ $y(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t);$	22) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) + 2x_2(t) + u(t), \quad x_1(0) = 2; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = 4; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t);$
23) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 7x_1(t) + 6x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 4; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -9x_1(t) - 8x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -6; \end{cases}$ $y(t) = -4x_1(t) - 3x_2(t);$	24) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 7x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -4; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t);$
25) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) - 4x_2(t) - 6u(t), \quad x_1(0) = -5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 6x_1(t) + 5x_2(t) + 9u(t), \quad x_2(0) = 2; \end{cases}$ $y(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t);$	26) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) + 2x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + 3x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 2; \end{cases}$ $y(t) = -5x_1(t) + 3x_2(t);$
27) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) + 2x_2(t) + u(t), \quad x_1(0) = 2; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + 3x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = 4; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t);$	28) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 7x_1(t) - 6x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 2; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 9x_1(t) - 8x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = -3; \end{cases}$ $y(t) = 5x_1(t) - 3x_2(t);$
29) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + 4x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = -3; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 5x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 2; \end{cases}$ $y(t) = 2x_1(t) - x_2(t);$	30) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -10x_1(t) - 8x_2(t) - 3u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 12x_1(t) + 10x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = -8; \end{cases}$ $y(t) = 4x_1(t) + 3x_2(t);$
31) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -8x_1(t) + 6x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 1; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -9x_1(t) + 7x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 2; \end{cases}$ $y(t) = -4x_1(t) + 3x_2(t);$	32) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) - 2x_2(t) - u(t), \quad x_1(0) = 4; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 4x_1(t) - 3x_2(t) - u(t), \quad x_2(0) = 5; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t);$

33) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 5x_1(t) - 6x_2(t) - 3u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 4x_1(t) - 5x_2(t) - 2u(t), \quad x_2(0) = -2; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t);$	34) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + 6x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 6; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + 5x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 4; \end{cases}$ $y(t) = -5x_1(t) + 7x_2(t);$

Лабораторна робота №5

СПОСТЕРЕЖУВАНІСТЬ ТА ВІДТВОРЮВАНІСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

Теоретичні відомості

Спостережуваністю системи називається така її властивість, яка полягає в тому, що шляхом спостереження (виміру) на обмеженому відрізку часу *T* за вихідними величинами *y(t)* при заданих вхідних впливах *u(t)* можна визначити всі координати початкового стану системи $x(t_0)$.

У цьому випадку система буде повністю спостережуваною. Система буде частково спостережуваною, якщо в результаті обробки інформації відносно вихідної величини визначаються не всі координати початкового стану системи.

Якщо ж вихідний сигнал системи не містить ніякої інформації про змінні стану, то система буде не спостережуваною.

Спостережуваність означає, що є можливість оцінити $x(t_0)$ за майбутніми значеннями вхідних і вихідних змінних. В задачах управління і фільтрації, проте, є тільки значення вхідних *u(t)* та вихідних *y(t)* змінних при $t_0 - T \le t \le t_0$. Тому в останньому випадку більш доцільно розглядати таку властивість змінних стану, як відтворюваність, яка ставить задачу визначення стану $x(t_0)$ за минулими спостереженнями *u(t)* та *y(t)*.

Критерії спостережуваності і відтворюваності Калмана

Система *n*-го порядку, що описується рівняннями

$$\begin{aligned} &dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ &y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

є повністю спостережуваною, коли ранг *матриці спостережуваності*

$$H = \left[C^T \vdots A^T C^T \vdots (A^T)^2 C^T \vdots \ldots \vdots (A^T)^{n-1} C^T \right] \tag{5.2}$$

дорівнює *n*.

У тому випадку, якщо є єдина вимірювана вихідна величина *u(t)*, матриця *C* складається з одного рядка. При цьому матриця *H* є квадратною і система (5.1) буде повністю спостережуваною при умові, що $\det H \neq 0$.

В свою чергу, *матриця відтворюваності* для системи (5.1) має вигляд:

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \ldots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Неважко з’ясувати, що для системи (5.1) зі сталими параметрами спостережуваності витікає повна відтворюваність змінних стану і навпаки, оскільки $Q = H^T$ і $rangQ = rangH$.

Критерій спостережуваності і відтворюваності Гільберта

Система *n*-го порядку, яка описується рівняннями

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \\ &y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{5.4}$$

з діагональною матрицею *A*, що стоїть при змінних стану $x_i(t)$ $i = \overline{1,n}$ є повністю спостережуваною і відтворюваною, коли матриця спостереження (вимірювання) *C* не має нульових стовпців.

Підпростір спостережуваних (відтворюваних) станів

Підпростір, який є породженим стовпцями матриці спостережуваності *H*, або, що те ж саме, рядками матриці відтворюваності *Q* називається підпростіром спостережуваності (відтворюваності).

Якщо для системи *n*-го порядку (5.1) $rangH = rangQ = r$, то підпростір спостережуваних (відтворюваних) станів має вимірність r.

Канонічна форма спостережуваності

Якщо ранг матриці спостережуваності системи (5.1) дорівнює $l\ (l \le n)$, то сформуємо матрицю перетворення $z(t) = Vx(t)$ у вигляді:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix},$$

де вектор-рядки матриці V_1 утворюють базис l-вимірного підпростору спостережуваності (зокрема, їми можуть бути l лінійно незалежних рядків матриці *Q*). Вектор-рядки V_1 разом з вектор-рядками матриці V_2 утворюють базис *n*- вимірного простору.

Тоді система (5.1) в нових змінних стану приймає вигляд так званої *канонічної форми спостережуваності*:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}u(t), \quad \begin{bmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \end{bmatrix} = Vx_0 \\ &y(t) = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} + Du(t). \end{aligned}$$

(5.5)

де $z_1(t)$ - l- вимірний вектор спостережуваних (відтворюваних), а $z_2(t)$ - $(n-l)$- вимірний вектор не спостережуваних (невідтворюваних) змінних стану.

Приклади розв’язування задач

Приклад 1. Для моделі обєкта управління, яка має матрицю при змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$ з дійсним спектром $\{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) - x_2(t) + 3u(t); \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 2u(t) \end{cases} \tag{5.6}$$
$$y(t) = 4x_1(t) - 2x_2(t)$$

необхідно отримати її канонічну форму з діагональною матрицею і побудувати для останньої структури схему.

З метою побудови кононічної моделі задану систему (5.6)представимо у векторно-матричній форії (5.1), де

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1-1 \\ 2-4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = [4-2], \quad D = [0], \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix};$$

Тепер за допомогою підстановки *x(t)=Rz(t)*, котра використовує модельну матрицю $R = [U_1; U_2]$; де $U_1 = [1;1]^T$; та $U_2 = [1;2]^T$-власні вектори матриці A заданої системи, перейдемо від змінних стану $x_1(t)$ та $x_2(t)$ до змінних стану $z_1(t)$ та $z_2(t)$.

Отримаємо:

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + \bar{B}u(t); z(0) = z_0; \qquad y(t) = \bar{c}z(t) + Du(t); \tag{5.7}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} -2;0 \\ 0;-3 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \bar{C}[2;0]; \quad z_0 = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{10} - x_{20} \\ x_{20} - x_{10} \end{bmatrix};$$

Для побудови структурної схеми канонічної моделі (5.7) представимо останню у скалярному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -2z_1(t) + 4u(t;); z_1(0) = z_{10}; \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = -3z_2 - u(t); z_2(0) = z_{20}; \\ y(t) = 2z_1(t) \end{cases}$$

Структурна схема цієї моделі представлена на рис.5.1.

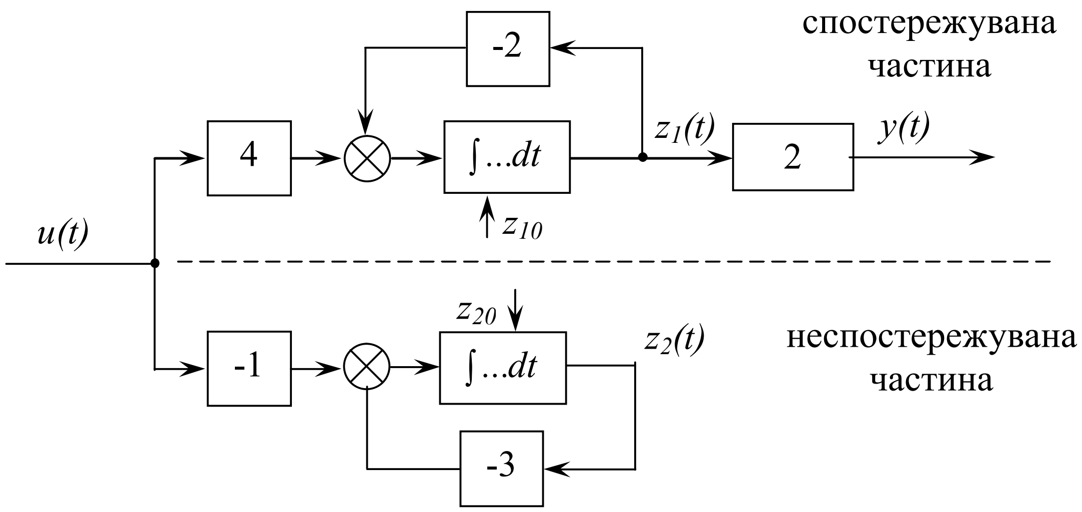


Рис.5.1- Структурна схема канонічної моделі.

Приклад 2.

Дослідити моделі (5.6) і(5.8), розглянуті у попередньому прикладі, з метою визначення міри їхньої керованості за допомогою критеріїв Калмана та Гільберта.

Визначемо ранг матриці спостережуваності:

$$H=\left[C^T \vdots A^T C^T\right]=\begin{bmatrix} 4\vdots & -8 \\ -2\vdots & 4 \end{bmatrix};$$

Оскільки $detH$=16-16 = 0, тому $rangH$=1<2=n. На основі цього робимо висновок: система (5.6) є частково керованою.

Зауважимо, що матрицею H можна записати у такий спосіб:

$$H=\left[\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad -2\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}\right];$$

Власне число $\lambda_1=-2$ матриці A^T, яке тут задіяне, є *полюсом спостережуваності* моделі (5.6). Вектор $[4;-2]^T$ є власним вектором матриці A^T.

У свою чергу, канонічна модель (5.8), яка є еквівалентною моделі (5.6), має діагональну матрицю $A=diag\{-2;-3\}$ при змінних стану z_1(t) та z_2(t).

При цьому матриця $\bar{C}=[2;0];$ котра відповідає за формування реакції системи y(t) , є матрицею з одним нульовим стовпцем.

Тому, відповідно до критерію Гільберта, система (5.6) є частково спостережуваною. Тобто, властивість спостережуваності (повної або часткової) модель системи зберігає при переході від одного базису (x1(t),x2(t)) до іншого $(z_1(t);z_2(t));$.

Приклад 3.

Побудувати для моделей (5.6) та (5.8) підпростір спостережуваності.

Оскільки у моделі (5.8) спостережуваної змінною є змінна $z_1(t)$, то підпростір спостережуваності визначається власним вектором $W = [2;-1]^T$ матриці A^T, з яким співпадають вектори $C^T = 2W$ та $A^T C^T = -2C^T = -4W$, котрі є складовими матриці спостережуваності $H = \left[C^T \vdots A^T C^T\right]$ (рис. 5.2.).

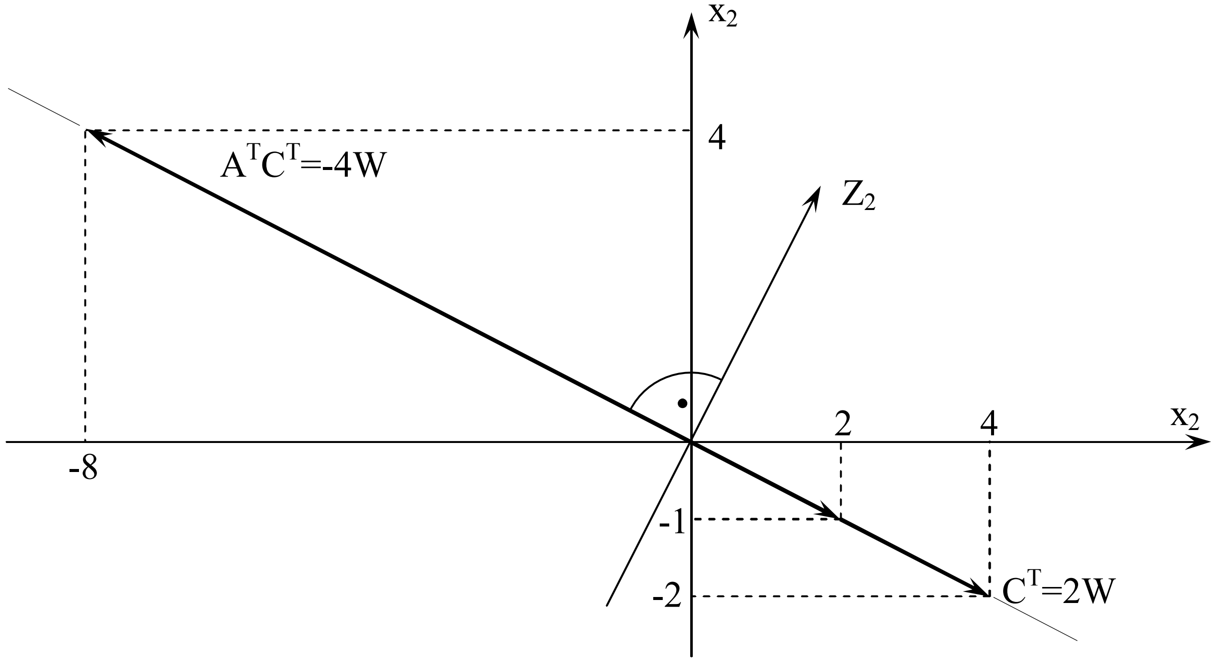


Рис. 5.2.Підпростір спостережуваності моделей (5.6) і (5.8)

Приклад 4.

Для моделі (5.6) побудувати кононічну форму спостережуваності .

В результаті розгляду прикладу 2 було вставлено, що ранг матриці спостережуваності цієї моделі дорівнює двом. Тобто вона є частково спостережуваною. Тому для побудови канонічної форми спостережуваності скористаємося перетворенням *z(t)=Vx(t)* з матрицею:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_2 \end{bmatrix}$$

сформованою у такий спосіб.

В якості вектора V_1 візьмемо вектор C, який є першим рядком матриці відтворюваності $Q=H^T$. Що ж стосується вектора V_2, то його веберемо довільно, але так, щоб $\det V \neq 0$.

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \det V = 10; \quad V^{-1} = \begin{bmatrix} 2/10 & 2/10 \\ -1/10 & 4/10 \end{bmatrix}.$$

Канонічна форма спостережуваності для моделі (5.6), враховуючи вище сказане, має вигляд:

$$\frac{dz(t)}{dt} = VAV^{-1}z(t) + VBu(t); z(0) = Vx_0,$$
$$y(t) = CV^{-1}z(t),$$

де

$$VAV^{-1} = \begin{bmatrix} -2;0 \\ 1.5;-3 \end{bmatrix}; \quad VB = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad CV^{-1} = [1;0]; \quad z(0) = \begin{bmatrix} 4x_{10} - 2x_{20} \\ x_{10} + 2x_{20} \end{bmatrix}$$

Тепер запишемо канонічну форму спостережуваності у скалярному вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1(t)}{dt} = -2z_1(t) + 8u(t), \\ \dfrac{dz_2(t)}{dt} = 1{,}5z_1(t) - 3z_2(t) + 7u(t), \end{cases} \qquad \begin{aligned} z_1(0) &= 4x_{10} - 2x_{20}, \\ z_2(0) &= x_{10} + 2x_{20}, \end{aligned}$$
$$y(t) = z_1(t),$$

<u>**Завдання для лабораторної роботи №5**</u>

5.1.Для записаних нижче моделей побудувати канонічні моделі з діагональними матрицями при змінних стану.

5.2.Дослідити задані та канонічні моделі з метою визначення міри їхньої спостережуваності за допомогою критеріїв Калмана і Гільберта.

5.3. Побудувати канонічну форму спостережуваності для заданих моделей.

1) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 2x_2(t) + 3u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 10x_1(t) - 7x_2(t), \quad x_2(0) = -10; \end{cases}$ $y(t) = 2x_1(t) - x_2(t);$	2) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -7x_1(t) + 5x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + 2x_2(t) + 4u(t), \quad x_2(0) = 8; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) - x_2(t);$
3) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + 3x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -3x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = -6; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) + 3x_2(t);$	4) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 6x_1(t) + 5x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -14.4x_1(t) - 11x_2(t) - 3.2u(t), \quad x_2(0) = 7; \end{cases}$ $y(t) = 1.8x_1(t) + x_2(t);$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 5x_1(t) + 2x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 3; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -28x_1(t) - 10x_2(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = 5; \end{cases}$ $y(t) = 7x_1(t) + 2x_2(t);$	6) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + 5x_2(t) + 10u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -2.4x_1(t) - 6x_2(t) - 6u(t), \quad x_2(0) = -5; \end{cases}$ $y(t) = 0.6x_1(t) + x_2(t);$
7) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + 5x_2(t) - 10u(t), \quad x_1(0) = 9; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) - 7x_2(t) + 8u(t), \quad x_2(0) = 7; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) + x_2(t);$	8) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + 5x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -3x_2(t) + 8u(t), \quad x_2(0) = 6; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) + 5x_2(t);$
9) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 5x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 10; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) - 8x_2(t) - 5u(t), \quad x_2(0) = -5; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) + x_2(t);$	10) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 5x_2(t) - 5u(t), \quad x_1(0) = 12; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -5.6x_1(t) - 8x_2(t) + 4u(t), \quad x_2(0) = -8; \end{cases}$ $y(t) = 7x_1(t) + 5x_2(t);$
11) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) + 5x_2(t) - 10u(t), \quad x_1(0) = 3; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -2x_1(t) - 6x_2(t) + 4u(t), \quad x_2(0) = -5; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) + x_2(t);$	12) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) + 5x_2(t) - 5u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -3.6x_1(t) - 7x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 6; \end{cases}$ $y(t) = 6x_1(t) + 5x_2(t);$
13) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -7x_1(t) + 5x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 10; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -3.6x_1(t) + 2x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = -9; \end{cases}$ $y(t) = 6x_1(t) - 5x_2(t);$	14) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 6x_1(t) + 4x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 10; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -17.5x_1(t) - 11x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 7; \end{cases}$ $y(t) = 5x_1(t) + 2x_2(t);$
15) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 5x_1(t) + 4x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -13.5x_1(t) - 10x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = -6; \end{cases}$ $y(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t);$	16) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + 4x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -x_1(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = -3; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) - 4x_2(t);$

17) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 4x_2(t) - 5u(t), \quad x_1(0) = 4; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -7x_1(t) - 8x_2(t) + 5u(t), \quad x_2(0) = 9; \end{cases}$ $y(t) = 7x_1(t) + 4x_2(t);$	18) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) + 4x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 4; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 0.5x_1(t) - 2x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 8; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) + 4x_2(t);$
19) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) - 4x_2(t) - 4u(t), \quad x_1(0) = 10; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -0.5x_1(t) - 2x_2(t) + 2u(t), \quad x_2(0) = 5; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) + 2x_2(t);$	20) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) - 4x_2(t) + 8u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -0.5x_1(t) - 4x_2(t) - 2u(t), \quad x_2(0) = -6; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) + 4x_2(t);$
21) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 2x_1(t) - 4x_2(t) + 7u(t), \quad x_1(0) = 10; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 7x_1(t) - 9x_2(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = 5; \end{cases}$ $y(t) = -7x_1(t) + 4x_2(t);$	22) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) - 4x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 10; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -5x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = -7; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t);$
23) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 5x_1(t) - 4x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 17.5x_1(t) - 12x_2(t) + 7u(t), \quad x_2(0) = 5; \end{cases}$ $y(t) = 7x_1(t) - 4x_2(t);$	24) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1(t) + 4x_2(t) + 5u(t), \quad x_1(0) = 10; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -2x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = -5; \end{cases}$ $y(t) = -3x_1(t) + 4x_2(t);$
25) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 5x_1(t) + 4x_2(t) - 8u(t), \quad x_1(0) = 5; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -17.5x_1(t) - 12x_2(t) + 14u(t), \quad x_2(0) = 10; \end{cases}$ $y(t) = 7x_1(t) + 4x_2(t);$	26) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 4x_1(t) + 4x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 15; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -13.5x_1(t) - 11x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 9; \end{cases}$ $y(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t);$
27) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 4x_1(t) + 2x_2(t) - 2u(t), \quad x_1(0) = 10; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -27x_1(t) - 11x_2(t) + 6u(t), \quad x_2(0) = 7; \end{cases}$ $y(t) = 3x_1(t) + x_2(t);$	28) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 2x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 20; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -20x_1(t) - 10x_2(t) - 10u(t), \quad x_2(0) = 5; \end{cases}$ $y(t) = 5x_1(t) + 2x_2(t);$
29) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) + 2x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 15; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - 4x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 9; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) - 2x_2(t);$	30) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) - 2x_2(t) + 2u(t), \quad x_1(0) = 15; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -5x_1(t) + 8u(t), \quad x_2(0) = 6; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) + x_2(t);$

31) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -7x_1(t) + 5x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 7; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -4x_1(t) + 2x_2(t) + 4u(t), \quad x_2(0) = 8; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) - x_2(t);$	32) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) + 2x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 15; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - 4x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 9; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) - 2x_2(t);$
33) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t) + 4x_2(t) + 6u(t), \quad x_1(0) = 4; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = 0.5x_1(t) - 2x_2(t) + 3u(t), \quad x_2(0) = 8; \end{cases}$ $y(t) = x_1(t) + 4x_2(t);$	34) $\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 2x_2(t) + 4u(t), \quad x_1(0) = 20; \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} = -20x_1(t) - 10x_2(t) - 10u(t), \quad x_2(0) = \text{[illegible]} \end{cases}$ $y(t) = 5x_1(t) + 2x_2(t);$

ЛІТЕРАТУРА

1.Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1989.- 752 с.

2.Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновеннные диффереціальные уравнения. Качественная теория с приложениями,- М.: Мир, 1986.- 246 с.

3.Гельднер К., Кубик С. Нелинейные системы уравнения.- М.: Мир, 1986.- 368 с.

4.Барбашин Е.А. Функции Ляпунова.- М..: Наука, 1970.- 96 с.

5. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости.- М.: Наука. 1967.- 472 с.

6. Заде Л.» Дезоэр Ч. Теория линейных систем. Методы пространства состояний. - М..:. Наука, 1970.- 704 с.

7.Деруссо П-, Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления.-М.: Наука. 1970.- 620 с.

8. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир. 1977.-620 с.

9.Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения.- М.: Наука, 1976.-320 с.

10. Самойленко А.М., Кривошей С.А. Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи.- М.: Высш.шк., 1969.- 388 с.

11. Мороз А..И.- Курс теории систем.- М.:Высш. шк. 1987.- 304 с.